(B1

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri una macchina soggetta a guasti con tempi di funzionamento e di guasto a distribuzione esponenziale e media $\frac{1}{q_d} = 100$ e $\frac{1}{q_u} = 2$ ore rispettivamente. Si consideri una funzione di costo $g(x) = c_p x^+ + c_m x^-$, con $c_p = 1$ e $c_m = 10$, essendo x il contenuto del buffer. Si voglia minimizzare $J = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\left[\int_0^t g[x(\tau)]d\tau\right]$.
   - Qual è in media sul lungo periodo la percentuale di tempo di funzionamento della macchina? [2pt]
   - Sia $\mu = 70$ pezzi/ora il tasso massimo di produzione e $d = 65$ pezzi/ora la domanda. Mostrare che il sistema è stabile e calcolare la scorta ottima z^* in questo caso. [5pt]
   - Lasciare ora μ e d liberi e indicare sul piano (d, μ) la zona di stabilità e (se c'è) quella in cui la politica ottima è JIT (ossia $z^* = 0$). Fornire quindi (se esiste) la funzione $\mu(d)$ che, per ogni $d > 0$, esprime il valore minimo di μ per cui la politica ottima è JIT. [8pt]

2. Si consideri un sistema di produzione push costituito da una macchina che produce 3 tipi di parti, ciascun tipo richiesto con tasso $d_i = 9$ pezzi/ora. Sia $\tau_i = 2$ minuti il tempo richiesto per lavorare una quantità unitaria di pezzi di tipo i, $x_i(t)$ il contenuto del buffer della parte i al tempo t, $i = 1, 2, 3$ e $\delta = 5$ minuti il tempo di setup.
   - Il sistema è stabilizzabile? Perché? [4pt]
   - Una politica lavora le parti secondo la seguente sequenza: 1-3-2-3 e cambia parte ogni 10 minuti, indipendentemente dal contenuto dei buffer. Riesce a mantenere i buffer limitati? [5pt]
   - Sia $x(0) = (2, 3, 5)$. È possibile in questo caso portare il sistema nello stato $x = (0, 0, 0)$? Perché? [2pt]
   - Confrontare il valore analitico del WIP (Work In Process) medio a regime di una Round Robin con il Lower Bound LB sul WIP di tutte le politiche non-idling. Cosa si osserva? [4pt]
   - *Facoltativa:* Quale sarà il WIP medio a regime di una politica CLB in questo caso? Perché?

ES. 1

- $\overline{t_f} = \frac{1}{q_d}$ $\quad \overline{t_g} = \frac{1}{q_u}$ $\quad$ % $\overset{\text{funzionamento}}{\text{tempo}} = \frac{\overline{t_f}}{\overline{t_f}+\overline{t_g}} = \frac{q_u}{q_d+q_u} \simeq \underline{98\%}$

- $\mu = 70$, $d = 65 \Rightarrow$ Condiz. stab.: $\frac{\mu q_u}{q_d+q_u} > d$, infatti $\Delta = \mu q_u - d(q_d+q_u) = 1.85 > 0$.
  Quindi il sistema è stabile.

  Ora, poiché $\gamma = \frac{\mu q_u - d(q_d+q_u)}{(\mu-d)(q_d+q_u)} = 0.73 < 0.91 = \frac{c_m}{c_p+c_m} \longrightarrow z^* > 0$

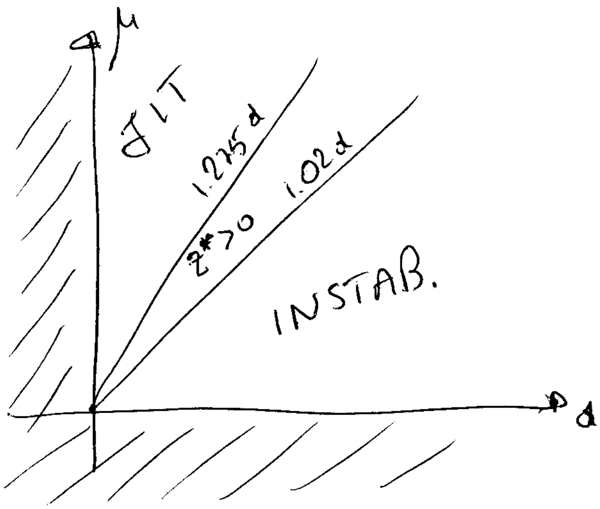
  è dato da $z^* = \frac{1}{\alpha} \log_e\left(\frac{c_p+c_m}{c_p}(1-\gamma)\right) = \underline{196.1}$

  dove $\alpha = \frac{\mu q_u - d(q_d+q_u)}{d(\mu-d)}$

- d e μ liberi.
  STAB.: $\mu > \frac{q_d+q_u}{q_u} \cdot d \Rightarrow \boxed{\mu > 1.02\, d}$

JIT: $\gamma \geq \frac{C_m}{C_p + C_m} \Rightarrow \mu \geq \frac{C_p (q_d + q_u)}{\underbrace{C_p q_u - C_m q_d}_{>0}} \cdot d$

$>0 \rightarrow$ esistenza μ abbast. grande: JIT ottima



$\Rightarrow \boxed{\mu \geq 1.275\, d}$

N.B. La regione di stabilità contiene quella di ottimalità della politica JIT.

La funzione $\boxed{\mu(d) = 1.275\, d}$

Es. 2

- Per la stab.: $\rho = d_1 \tau_1 + d_2 \cdot \tau_2 + d_3 \cdot \tau_3 = 3 \cdot 9 \cdot \frac{2}{60} = \frac{54}{60} = 0.9 < 1$.
- No, perché $f_{MAX} = \frac{1-\rho}{\delta} = 1.2$ volte/ora
  mentre la politica proposta fa 6 setup/ora, più spesso quindi del limite max di qualsiasi politica stabile.
- No, perché in questo caso $\delta > 0$ non è trascurabile e i buffer non possono essere portati tutti a $\emptyset$ contemporaneamente (ma solo uno alla volta).
- Essendo il sistema perfettamente simmetrico (τ_i e d_i uguali tra loro), il WIP di una RR coincide con il LB di tutte le politiche non idling: $\rho_j = d_j \cdot \tau_j$

  $$WIP_{RR} = J_{RR}(\gamma_i = 1/\tau_i) = \frac{\rho \cdot \delta}{2(1-\rho)} \sum_{j=1}^{P} d_j (1 - \rho_j) = \underline{23.6}$$

  $$LB_{WIP} = LB(\gamma_i = 1/\tau_i) = \frac{\delta \left(\sum_{j=1}^{P} \sqrt{d_j (1-\rho_j)} \right)^2}{2(1-\rho)} = \underline{23.6}$$

  (N.B. La RR è una politica non idling in generale $J_{RR} \geq LB$)
- (facoltativo) Sempre per la simmetria, la CLB converge a una RR con $WIP_{CLB} \cong LB = \underline{23.6}$