COGNOME: NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri una macchina soggetta a guasti con tempi di funzionamento e di guasto a distribuzione esponenziale con parametri q_d e q_u rispettivamente. L'indice da minimizzare è $J = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\left[\int_0^t g[x(\tau)]d\tau\right]$ con $g(x) = c_p x^+ + c_m x^-$, con $c_p = 1$ e $c_m = 10$. Siano $d = 6$ il tasso della domanda e $\mu = 10$ quello massimo di produzione.
   (a) Assumendo $q_d = 1$ e $q_u = 100$, mostrare che il sistema è stabilizzabile e calcolare la scorta ottima z^*. [5pt]
   (b) Con q_d e q_u liberi, riportare sul piano (q_d, q_u) la regione di stabilizzabilità e quella in cui la politica ottima è JIT. Dire se in generale, cioè per qualsiasi scelta dei parametri positivi q_d, c_p, c_m, μ e d $(\mu > d)$, è sempre possibile trovare un valore di q_u per cui la politica ottima è JIT (giustificare la risposta). [7pt]
   (c) Con $q_d = 1$, tracciare il grafico di z^* in funzione di q_u. [4pt]

2. Si consideri un sistema costituito da una singola macchina che produce $P = 2$ tipi di parti con tempi di setup trascurabili. Siano $d_1 = 3$ e $d_2 = 1$ i tassi di domanda per le due parti e $\mu_1 = 8$ e $\mu_2 = 3$ i corrispondenti tassi massimi di produzione. Si vuole minimizzare l'indice $J = \lim_{T\to\infty} \int_0^T g[x(t)]dt$ dove $g(x) = g_1(x_1) + g_2(x_2) = \frac{x_1^2}{16} + \frac{|x_2|^3}{9}$.
   (a) Indicare sul piano (x_1, x_2) la politica ottima. Riportare quindi la traiettoria ottima a partire da $x(0) = [-3, -10]$ e calcolare il tempo minimo T_{clear} necessario a portare tutti i buffer a 0. [9pt] 4+3+2
   (b) Assumendo che il sistema lavora anche una terza parte con $d_3 = 1$, $\mu_3 = 4$, e $g_3(x_3) = |x_3|$, verificare la stabilizzabilità e calcolare il tempo minimo T_{clear} per portare i buffer da $x(0) = [-3, -10, +100]$ a 0. [4pt]

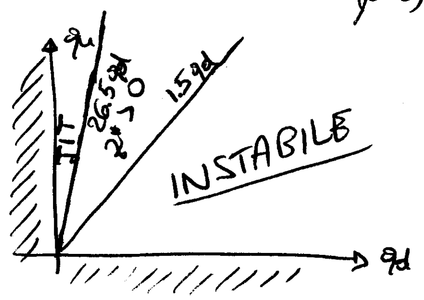
   2+2

3. Con riferimento a sistemi singola macchina e setup non trascurabile, spiegare cos'è una politica non idling e citare un tipo di situazione in cui potrebbe essere conveniente utilizzare un altro tipo di politica. [2pt]

Es. 1 (a) Stabilizzabile: $\Delta = \mu q_u - d(q_d + q_u) = 394 > 0$ (equivalente a $\frac{\mu q_u}{q_d+q_u} > d$)

Scorta ottima: $\gamma = \frac{\Delta}{(\mu-d)(q_d+q_u)} = 0.9752 \geq 0.91 = \frac{c_m}{c_p+c_m} \Rightarrow z^*=0$ (JIT)

(b)



Condizione stabilizzabilità: $\frac{\mu q_u}{q_d+q_u} > d$

da cui

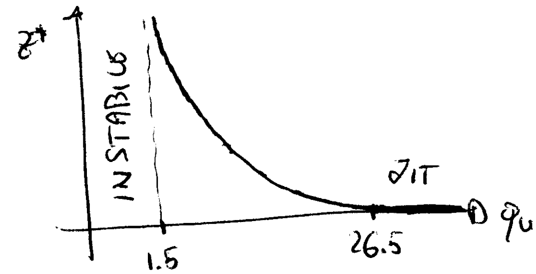
$$\boxed{q_u > \frac{d}{\mu-d} q_d = 1.5\, q_d}$$

Condizione JIT: $\gamma \geq \frac{c_m}{c_p+c_m}$ da cui:

$$\boxed{q_u \geq \frac{c_m\mu + c_p d}{c_p(\mu-d)} q_d = 26.5 q_d}$$

Per qualsiasi scelta dei parametri, il coefficiente $\frac{c_m\mu + c_p d}{c_p(\mu-d)}$ è positivo e finito. Quindi esiste sempre un q_u abbastanza grande per cui la condizione JIT è verificata. Inoltre, è immediato verificare che $\frac{c_m\mu+c_pd}{c_p(\mu-d)} > \frac{d}{\mu-d}$, da cui segue che la condizione JIT implica anche la stabilizzabilità, e quindi, per tutti i q_u per cui vale la condizione JIT, il sistema è stabilizzabile e pertanto la politica JIT è ottima.

(c)

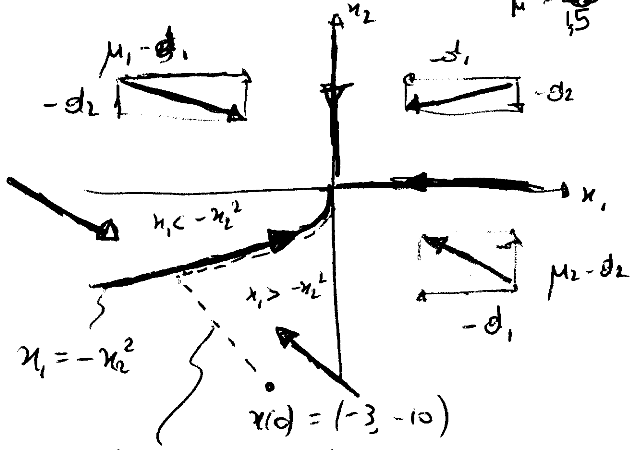


È possibile verificare che la derivata di $z^* = \frac{1}{\alpha} \log\left[\frac{c_m + c_p}{c_p} (1-\rho) \right]$ rispetto a q_u è negativa: per questo motivo z^* è una funzione monotona decrescente.

N.B. $\lim_{q_u \to 1.5} z^* = \infty$.

Esercizio 2

(a)



$$\mu_1 \frac{d f_1}{d x_1} \gtrless \mu_2 \frac{d f_2}{d x_2}$$

$$8 \cdot \frac{2 x_1}{16} \gtrless 3 \cdot \left(\frac{3 x_2^2}{8} \right)$$

$$x_1 \gtrless -x_2^2$$

Tclear da $x(0)$: Poiché $x_i(0) < 0 \ \forall i$, $T_{clear} = \frac{W(0)}{1-\rho}$

Ora, $\rho = \frac{d_1}{\mu_1} + \frac{d_2}{\mu_2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \simeq 0.71$

$W(0) = \frac{|x_1(0)|}{\mu_1} + \frac{|x_2(0)|}{\mu_2} = \frac{3}{8} + \frac{10}{3} \simeq 3.71$

$\Rightarrow T_{clear} \simeq \underline{12.7}$

(b) Poiché $x_3(0) = 100$, $x_3(t)$ impiega $\frac{x_3(0)}{d_3} = 100$ unità di tempo ad arrivare a $\emptyset$, e la macchina può portare a $\emptyset$ come nel punto (a) le parti 1 e 2 in 12.7 unità di tempo e quindi

$T_{clear} = \underline{100}$

Il sistema è stabilizzabile perché $\rho_{TOT} = \frac{d_1}{\mu_1} + \frac{d_2}{\mu_2} + \frac{d_3}{\mu_3} \simeq \underline{0.96} < 1$

Esercizio 3

Una politica non idling o lavora al max o fa: setup. E quindi appena un buffer è stato svuotato, deve cambiare tipo di parte. Potrebbe convenire continuare a lavorare una parte con buffer vuoto per un po' di tempo (politica idling) per esempio se oltre ai tempi ci sono anche dei $\underline{\text{costi}}$ di setup non trascurabili.