COGNOME: NOME: MATRICOLA: B1

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema pull costituito da una singola macchina che produce P tipi di parti con tempi di setup trascurabili. Siano $d_i = d = 1$ per ogni i i tassi di domanda per le P parti e $\mu_i = \mu = P + 1$ per ogni i i corrispondenti tassi massimi di produzione. Si vuole minimizzare l'indice $J = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \sum_{i=1}^P g_i[x_i(t)]dt$ dove $g_i(x_i) = \frac{1}{2}x_i^2$.
   (a) Verificare la stabilizzabilità e mostrare che la politica ottima dà priorità alla parte con buffer più negativo. [5pt]
   (b) Se $P = 5$, calcolare T_{clear} a partire da $x(0) = [7, 3, 8, 4, 1]$. [3pt]
   (c) Se $P = 2$, disegnare sul piano (x_1, x_2) la traiettoria ottima a partire da $x(0) = [-5, -8]$. [4pt]

2. Si consideri una macchina soggetta a guasti con tempi di funzionamento e di guasto a distribuzione esponenziale con parametri $q_d = 2$ e $q_u = 20$ rispettivamente. L'indice da minimizzare è $J = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\left[\int_0^t g[x(\tau)]d\tau\right]$ con $g(x) = 2x^+ + 10x^-$. Siano $d = 9$ il tasso della domanda e $\mu = 10$ quello massimo di produzione.
   (a) Mostrare che il sistema è stabilizzabile e calcolare la scorta ottima z^*. [6pt]
   (b) Valutare (motivando la risposta) quale politica risulta più costosa tra una hedging point con scorta $z_1 = 0$ e una hedging point con scorta $z_2 = 20$ [4pt]

3. Si consideri un sistema di produzione push costituito da una macchina che produce 3 tipi di parti, richiesti con tassi $d_1 = 1$, $d_2 = 3$ e $d_3 = 2$ pezzi/ora. Siano $\tau_1 = 20$, $\tau_2 = 5$ e $\tau_3 = 10$ minuti i tempi richiesti per lavorare una quantità unitaria di pezzi di tipo 1, 2 e 3 rispettivamente. Sia infine $\delta = 10$ minuti il tempo di setup.
   ~~8pt~~ 4+4 (a) Calcolare il WIP medio e la frequenza media di setup a regime che si ottiene utilizzando la politica Round Robin. [8pt]
   (b) In un sistema reale i buffer hanno una capacità finita. Supponendo che il sistema sia inizialmente vuoto ($x_i(0) = 0$ per ogni i) e che si utilizzi la politica Round Robin, qual è il valore minimo da assegnare alle capacità dei vari buffer affinché il contenuto $x_i(t)$ di ciascuno di essi non ecceda mai la capacità assegnatagli? [2pt]

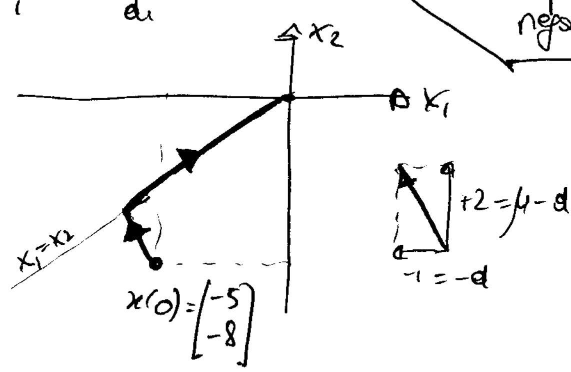
$\boxed{\text{Es. 1}}$ (a) Stabilizzabile se $\rho < 1$, dove $\rho = \sum_{i=1}^{P} \frac{d_i}{\mu_i} = \frac{P}{P+1} < 1$ OK

La politica ottima è miope, lavora le parti negative con minimo $\mu_i \frac{dg_i}{dx_i}$;
cioè lavora la parte $\bar{i} = \arg\min_{i: x_i \le 0} \mu_i \frac{dg_i}{dx_i} = \arg\min_{i: x_i \le 0} \mu \cdot x_i = \arg\min_{i: x_i \le 0} x_i$ - cioè quelle con buffer più negativo

(b) Poiché $x_i(0) \ge 0 \ \forall i$, $T_{clear} = \max_i \frac{x_i(0)}{d_i} = 8$ -

(c) In base ai calcoli fatti al punto (a), si ha $\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \mu_i = P+1 = 3 & \forall i \\ d_i = 1 & \forall i \end{pmatrix}$$



$\boxed{\text{Es. 2}}$ (a) Stabilizzabile se $\frac{\mu q_u}{q_d + q_u} > d$

Ora, $\frac{\mu q_u}{q_d + q_u} = 9.09 > 9 = d$ OK

Ora $\gamma = \frac{\mu q_u - d(q_d + q_u)}{(\mu - d)(q_d + q_u)} = 0.091$, mentre $\frac{c_m}{c_p + c_m} = 0.83 > \gamma \Rightarrow z^* > 0$

ed è dato da $z^* = \frac{1}{\alpha} \ln\left[\frac{c_p + c_m}{c_p}(1 - \gamma)\right] = \underline{7.63}$ $\left(\text{con } \alpha = \frac{\mu q_u - d(q_d + q_u)}{d(\mu - d)}\right)$

b) Occorre calcolare $J(z_1)$ e $J(z_2)$, dove $J(z) = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{z} p(x,z)\, g(x)\, dx + \gamma g(z)$,

con $p(x,z) = \frac{q d \mu}{d(\mu - d)} \gamma\, e^{\alpha(x-z)} = K(z)\, e^{\alpha x}$, essendo $K(z) = \frac{q d \mu}{d(\mu - d)} \gamma\, e^{-\alpha z}$

Si ha: $$J(z) = \int_{-\infty}^{0} -c_m K(z)\, x e^{\alpha x}\, dx + \int_{0}^{z} c_p K(z)\, x e^{\alpha x}\, dx + c_p \gamma z$$

$$= -c_m K(z) \int_{-\infty}^{0} x e^{\alpha x}\, dx + c_p K(z) \int_{0}^{z} x e^{\alpha x}\, dx + c_p \gamma z.$$

Ora, $\int_{-\infty}^{0} x e^{\alpha x}\, dx = -\frac{1}{\alpha^2}$ e $\int_{0}^{z} x e^{\alpha x}\, dx = \frac{1 + e^{\alpha z}(\alpha z - 1)}{\alpha^2}$

Quindi $$J(z) = \frac{c_m K(z) + c_p K(z)\left[1 + e^{\alpha z}(\alpha z - 1)\right]}{\alpha^2} + c_p \gamma z$$

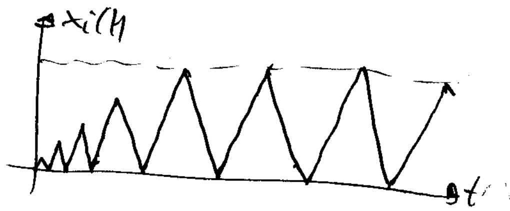
e si ha: $J(z_1) = J(0) = 40.91$, $J(z_2) = J(20) = 32.39$ $\Rightarrow$ La politica hedging point con $z = z_1 = 0$ risulta più costosa.

$\boxed{\text{Es. 3}}$ (a) Essendo la RR una politica non idling (e $\rho = \sum_{i=1}^{3} d_i \tau_i < 1$), la frequenza di setup a regime è:

$$f_{setup} = \frac{1-\rho}{\delta} = \underline{0.5 \text{ setup/ore}}$$

mentre $$\overline{WIP} = J_{RR}(\gamma_i = 1/\tau_i) = \frac{\rho \delta}{2(1-\rho)} \sum_{j=1}^{3} d_j (1 - d_j \tau_j) = \underline{12.75}$$

(b) Essendo il sistema stabile e $x_i(0) = 0\ \forall i$, la parte i avrà una traiettoria del tipo riportato in figura, e quindi il massimo di $x_i(t)$ è il valor del picco a regime dato da



$$\text{picco}(i) = (1 - \rho_i)\, d_i\, T$$ (vedere formula pag. 82 dispensa)

con $\rho_i = d_i \cdot \tau_i$ e $T = \frac{\rho \delta}{1-\rho}$.

I picchi sono quindi: $\underline{4}$, $\underline{13.5}$ e $\underline{8}$ per le parti 1, 2 e 3 rispettivamente.

Questi saranno i valori minimi di capacità da assegnare ai tre buffer.