COMPITO 1

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un processo markoviano omogeneo a tempo continuo e sia $\dot{\pi} = Q\pi$ la legge di evoluzione del suo vettore di probabilità $\pi(t)$. Come devono essere gli autovalori di Q affinché esista e sia indipendente da $\pi(0)$ il $\lim_{t\to\infty} \pi(t)$? Quando tale limite esiste, come si calcola? [3pt]
2. Si consideri un sistema di produzione push costituito da una macchina che produce P tipi di parti, richiesti con tassi $d_i = 1$ pezzi/ora per ogni $i = 1, 2, \dots, P$. Siano $\tau_i = 5$ minuti i tempi richiesti per lavorare una quantità unitaria di pezzi di tipo i, $i = 1, 2, \dots, P$. Sia infine $\delta = 6$ minuti il tempo di setup.
   (a) Calcolare il numero massimo P di tipi parti che il sistema può processare mantenendo i buffer limitati. [5pt]
   (b) Descrivere la politica CLAW e, assumendo $P = 8$, si indichi la frequenza di setup a regime di tale politica. [6pt]
   (c) Riportare in un grafico l'andamento [redacted] della frequenza massima di setup a regime di una qualsiasi politica stabile in funzione del numero P di tipi di parti lavorate dal sistema. [4pt]
3. Si consideri un sistema pull costituito da una singola macchina che produce $P = 2$ tipi di parti con tempi di setup trascurabili. Siano $d_1 = 5$ pezzi/ora e $d_2 = 2$ pezzi/ora i tassi di domanda e $\mu_1 = 8$ pezzi/ora, $\mu_2 = 6$ pezzi/ora i tassi massimi di produzione. Si vuole minimizzare l'indice $J = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \sum_{i=1}^P g_i[x_i(t)]dt$ dove $g_i(x_i) = |x_i|$ per $i = 1, 2$.
   (a) Verificare la stabilizzabilità del sistema e le condizioni richieste per l'ottimalità delle politiche miopi. [3pt]
   (b) Disegnare sul piano (x_1, x_2) la politica ottima e la traiettoria ottima a partire dal punto $x(0) = [-5; 2]$. [7pt]
   (c) Calcolare il tempo minimo di svuotamento T_{clear} a partire da $x(0) = [-5; 2]$. [3pt]

Es. 1 - Il processo deve essere ergodico, ossia gli autovalori di Q devono avere tutti (tranne quello in 0) parte reale strettamente negativa. Se esiste, il limite si calcola risolvendo $Q\bar{\pi} = 0$ (cioè determinando l'autovettore di Q relativo a 0), con la condizione di normalizzazione $\sum_i \pi_i = 1$.

Es. 2 (a) $\rho = \rho(P) = \sum_{i=1}^{P} d_i \tau_i = P \cdot 1 \cdot \frac{5}{60} = \frac{5P}{60} < 1$ per la stabilizzabilità.

$$\Rightarrow 60 > 5P \Rightarrow P < \frac{60}{5} = 12 \Rightarrow \boxed{P < 12} \quad \boxed{P_{max} = 11}$$

(b) La CLAW è una politica non idling che al tempo T_n (in cui è stato vuotato un buffer) sceglie quello successivo in base alla regola:

$$i^*(T_n) = \arg\max_{i\in\{1,2,\dots P\}} \tau_i x_i(T_n + \delta) = \arg\max_{i\in\{1,2,\dots P\}} \tau_i [x_i(T_n) + d_i \delta]$$

Si tratta di una CAF che quindi se $\rho < 1$ stabilizza il sistema.

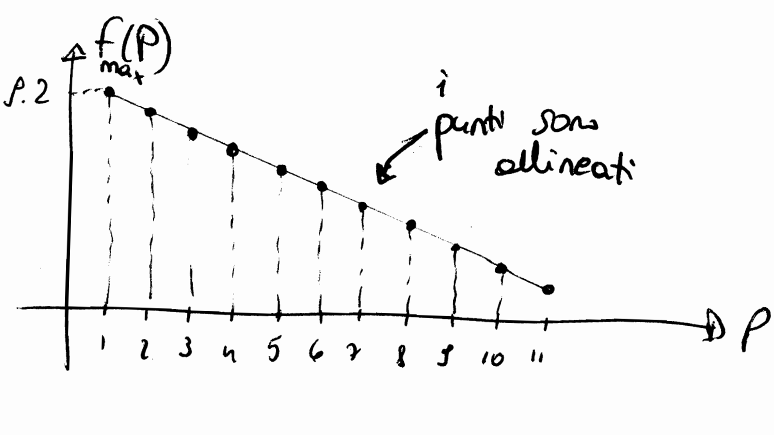
Ora, se $P = 8$, $\rho = \frac{5\cdot 8}{60} = 2/3 < 1$. La frequenza di setup a regime, essendo la CLAW una politica non idling, è $f = \frac{1-\rho}{\delta} = \frac{1/3}{6/60} = \frac{1}{3}\cdot\frac{60}{6} = \frac{10}{3}$

Quindi $\boxed{f = 3.\bar{3} \text{ setup/ora}}$

(c) $f_{max}(P) = \frac{1-\rho(P)}{\delta} = \frac{1 - \frac{5P}{60}}{6/60} =$

$$= \frac{60 - 5P}{6} = 10 - \frac{5}{6}P$$

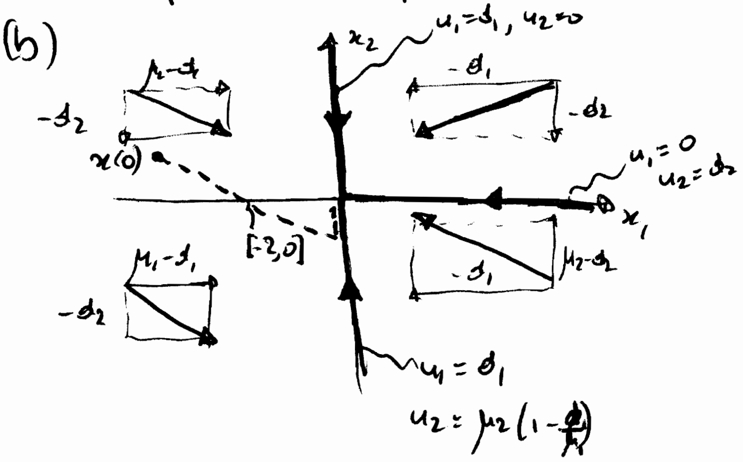
N.B. Per $P = 1$ non servono setup.



ES. 3 (a) Condizione di stabilizzabilità: $\rho = \frac{d_1}{\mu_1} + \frac{d_2}{\mu_2} = \frac{5}{8} + \frac{2}{6} = \frac{15+8}{24} = \frac{23}{24} < 1$

Siccome valle $f_i(x_i) = |x_i|$ sono convesse, positive per $x_i \neq 0$ e nulle in ϕ, le politiche miopi sono ottime.

(b)



Per $x_1 < 0$, $x_2 < 0$:

$$\frac{df_1}{dx_1} = -1, \quad \frac{df_2}{dx_2} = -1$$

$$\Rightarrow \mu_1 \frac{df_1}{dx_1} = -8 < -6 = \mu_2 \frac{df_2}{dx_2}$$

Ha priorità la parte ① in tutto il III quadrante.

(c) Tclear da $(-5, 2)$:

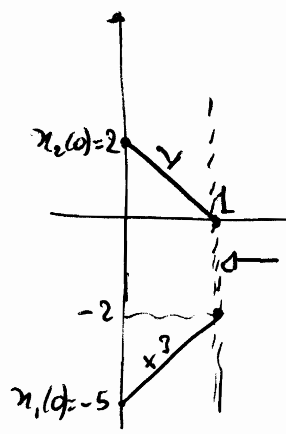
Nel primo tratto, $x_1(t) = -5 + (\mu_1 - d_1)t = -5 + 3t$

$x_2(t) = 2 - d_2 t = 2 - 2t$

A $t = 1$ sono con $x_2 = 0$ e $x_1 = -5 + 3 \cdot 1 = -2$

Da $(-2, 0)$, $T_{clear} = \frac{w(\phi 1)}{1-\rho} = \frac{\frac{|-2|}{\mu_1} + \frac{|\phi|}{\mu_2}}{1-\rho} = \frac{2/8}{1/24} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$ ore

In totale $T_{clear} = 1 + 6 = \underline{7}$ ore



da qui in poi sono nel terzo quadrante, posso applicare la formula $T_{clear} = \frac{w}{1-\rho}$