COGNOME: COMPITO 1 NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Con riferimento ai sistemi push con setup non trascurabile, descrivere molto brevemente la politica Round Robin (RR). Dire, motivando la risposta, se il Work In Process medio a regime di una RR dipende dalla particolare permutazione considerata. [2+2pt]
2. Si consideri un sistema pull costituito da una singola macchina che produce $P = 3$ tipi di parti con tempi di setup trascurabili. Siano $d_i = 1$ pezzi/ora i tassi di domanda e $\mu_i = 4$ pezzi/ora i tassi massimi di produzione per le 3 parti. Si vuole minimizzare l'indice $J = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \sum_{i=1}^{P} g_i[x_i(t)]dt$ dove $g_1(x_1) = 3|x_1|$, $g_2(x_2) = 2|x_2|$ e $g_3(x_3) = x_3^2$.
   (a) Verificare che le condizioni richieste per l'ottimalità delle politiche miopi sono soddisfatte. [3pt]
   (b) Calcolare i tassi produttivi ottimi al tempo t se $x(t) = [-5, -8, -2]$. [4pt]
   (c) Sia $x(0) = [-3, 0, 2]$. Riportare in un grafico l'andamento ottimo nel tempo dei buffer $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. [5pt]
   (d) Calcolare il tempo minimo di svuotamento T_{clear} da $x(0) = [-1, -2, 2]$. [4pt]
3. Si consideri una macchina soggetta a guasti con tempi di funzionamento e di guasto a distribuzione esponenziale con parametri $q_d = 1$ e $q_u = 10$ rispettivamente. Siano $d = 9$ il tasso della domanda e $\mu = 10$ quello massimo di produzione.
   (a) Mostrare che il sistema è stabilizzabile e, se $g(x) = x^+ + 10x^-$, calcolare la scorta ottima. [2+5pt]
   (b) Supponendo di usare una politica hedging point, determinare il valore minimo della scorta z affinché la probabilità di avere una coda di ordini arretrati maggiore di 10 sia minore o uguale a 0.01. [4pt]

Es. 1 La politica RR è una politica non idling che vuota i buffer delle varie parti secondo una sequenza fissata a priori e costituita da una qualsiasi permutazione degli indici da 1 a P (P= numero di tipi di parti). Il WIP medio a regime NON dipende dalla particolare permutazione considerata, essendo in ogni caso dato da $\overline{WIP} = J(\gamma_i = 1/\tau_i) = \frac{\rho S}{2(1-\rho)} \sum_{i=1}^{P} d_i(1-d_i\tau_i)$

Es. 2 (a) L'ottimalità delle politiche miopi è garantita dal fatto che:

(i) $\rho = \frac{d_1}{\mu_1} + \frac{d_2}{\mu_2} + \frac{d_3}{\mu_3} = \frac{3}{4} < 1$ (stabilizzabilità "rafforzata")

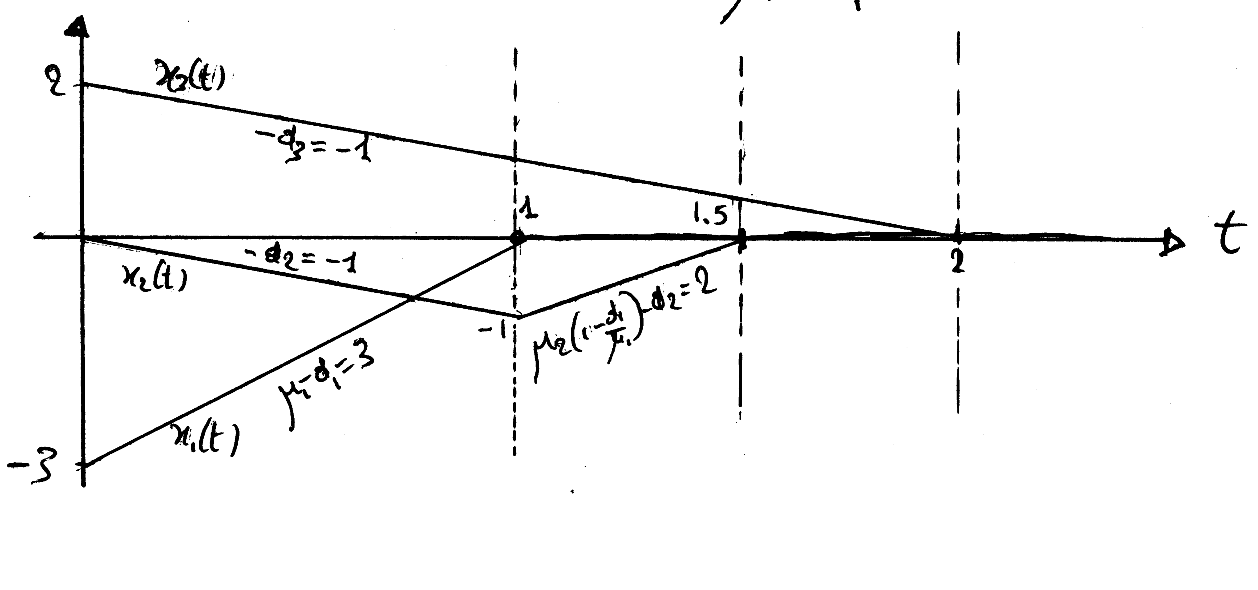
(ii) le tre $g_i(x_i)$ sono convesse, positive (per $x_i \neq 0$) e nulle in 0.

(b) Occorre confrontare tra loro le quantità $\mu_i\, dg_i/dx_i$ (dove le derivate vanno calcolate nel punto $x(t)$ considerato) e scegliere di lavorare la parte con valore più negativo. Poiché $\mu_i = 4\ \forall i$, è sufficiente confrontare le derivate. Si ha:

$\left.\frac{dg_1}{dx_1}\right|_{x_1(t)} = -3$; $\left.\frac{dg_2}{dx_2}\right|_{x_2(t)} = -2$; $\left.\frac{dg_3}{dx_3}\right|_{x_3(t)} = 2x_3\big|_{-2} = \underline{\underline{-4}}$ Vince la parte 3.

Quindi: $u_1^*(t) = u_2^*(t) = 0$ e $u_3^*(t) = \mu_3 = 4$ pz/ora.

(c)



Per $t \in [0,1]$ ha priorità la parte 1: $u_1^*(t) = \mu_1 = 4$, $u_2^*(t) = u_3^*(t) = \phi$.
Per $t \in [1, 1.5]$ la parte 1 (che ha priorità sulla 2) viene mantenuta a ϕ ($u_1^*(t) = d_1$) e la due viene portata a ϕ con la capacità residua della macchina: $u_2^*(t) = \mu_2 \left(1 - \frac{d_1}{\mu_1}\right)$. La parte 3 continua a diminuire ($u_3^*(t) = 0$).
Per $t \in [1.5, 2]$ si tengono a ϕ le parti 1 e 2 ($u_1^* = u_2^* = d_1 = d_2 = 1$) e si aspetta che anche la 3 vada a ϕ ($u_3^* = 0$).
Per $t > 2$ si tengono a ϕ tutti i buffer: $u_i^* = d_i = 1 \quad \forall i = 1, 2, 3$.
(d) Si lavorano solo le parti uno e due mentre la 3 si vuota. Lavorando al max, per portare a ϕ le parti 1 e 2 occorre un tempo:

$$T_{clear}(1,2) = \frac{W_{12}(0)}{1 - \rho_{12}} = \frac{\frac{|x_1(0)|}{\mu_1} + \frac{|x_2(0)|}{\mu_2}}{1 - \frac{d_1}{\mu_1} - \frac{d_2}{\mu_2}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{2}{4}}{1 - \frac{2}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

A $t = 2$ arriva a ϕ anche x_3 $\Rightarrow$ $\boxed{T_{clear} = 2}$

4

ES. 3 (a) Il sistema è stabilizzabile, infatti $\frac{\mu q_u}{q_d + q_u} = 9.1 > d$.

Poiché $\gamma = 0.081 < \frac{c_m}{c_p + c_m} = 0.91$, $z^* = \frac{1}{\alpha} \log \left[(1-\gamma) \frac{c_p + c_m}{c_p} \right] = \underline{20.72}$.

(b) Il testo chiede il valore minimo di z per cui

$$\text{prob}\{x \le -10\} \le 0.01$$

$$\int_{-\infty}^{-10} p(x, z)\, dx = \int_{-\infty}^{-10} K e^{\alpha(x - z)} dx = K e^{-\alpha z} \int_{-\infty}^{-10} e^{\alpha x} dx$$

dove $K = \frac{q_d \mu}{d(\mu - d)} \gamma$. Ora, $\int_{-\infty}^{-10} e^{\alpha x} dx = \left.\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right|_{-\infty}^{-10} = \frac{e^{-10\alpha}}{\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{K e^{-\alpha z}}{\alpha} e^{-10\alpha} \le 0.01 \Rightarrow z \ge \frac{1}{\alpha} \log \left[\frac{100\, q_d \mu \gamma e^{-10\alpha}}{d(\mu - d)\alpha} \right] = \underline{30.58}$$

3