COGNOME: Compito 1 NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema push con setup non trascurabile, costituito da una singola macchina che lavora $P = 4$ tipi di parti con tassi di domanda $d = [3, 2, 4, 5]$ pezzi/ora, tempi di lavorazione $\tau = [6, 4, 5, 2]$ minuti e tempo di setup $\delta = 3$ ore.
   - (a) Valutare la stabilizzabilità del sistema e la frequenza media di setup a regime di una politica CLAR [3+3pt]
   - (b) Supponendo di applicare una Round Robin, valutare: il WIP medio a regime del sistema; il contenuto medio a regime del buffer 1; la percentuale di tempo che a regime la macchina dedica a lavorare i pezzi di tipo 1 [3+2+2pt]
2. Si consideri un sistema pull costituito da una singola macchina che produce $P = 2$ tipi di parti con tempi di setup trascurabili. Siano $d_i = 1$ pezzi/ora i tassi di domanda e $\mu_i = 3$ pezzi/ora i tassi massimi di produzione per le 2 parti. Si vuole minimizzare l'indice $J = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \sum_{i=1}^P g_i[x_i(t)]dt$ dove $g_1(x_1) = x_1^2/6$, $g_2(x_2) = |x_2|^3/9$.
   - (a) Verificare che sono soddisfatte tutte le condizioni di ottimalità delle politiche miopi e disegnare sul piano (x_1, x_2) la politica ottima [3+5pt]
   - (b) Sia $x(0) = [-10, 0]$. Riportare sul piano (x_1, x_2) la traiettoria ottima e calcolarne il tempo di percorrenza da $x(0)$ all'origine. [3+3pt]
   - (c) Sempre a partire da $x(0) = [-10, 0]$, e sempre seguendo la traiettoria ottima, calcolare il lavoro $w(t)$ presente nel sistema al tempo $t = 8$ e utilizzare questo dato per calcolare il valore di $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sempre a $t = 8$ (N.B. Si ricorda che nel caso pull con $x_i(t) \le 0$ per ogni i, il lavoro viene definito come $w(t) := \sum_i \frac{|x_i(t)|}{\mu_i}$). [2+2pt]

Es. 1a) La condizione di stabilizzabilità è $\rho < 1$, dove $\rho = \sum_{i=1}^{P} d_i \tau_i$.

Si ha: $\rho = (6\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 2\cdot 5)/60 = 56/60 < 1$ ok, è stabilizzabile.

La CLAR è una politica non idling ed è stabile perché $\rho < 1$.

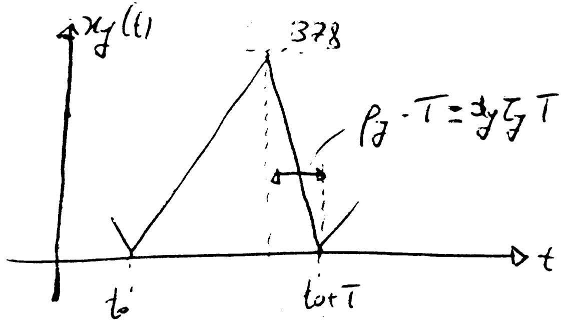
Quindi $f_{CLAR} = \frac{1-\rho}{\delta} = \boxed{0.022 \text{ setup/ora}}$

(1b) $WIP_{RR} = J_{RR}(\gamma_i = 1/\tau_i) = \frac{P.S}{2(1-\rho)} \sum_{i=1}^{P} d_i(1 - d_i\tau_i) = \boxed{1960 \text{ pezzi}}$

Il contenuto medio a regime del buffer 1 è il primo elemento della sommatoria del WIP_{RR}:

$\bar{x}_1 = \frac{PS}{2(1-\rho)} d_1 (1 - d_1\tau_1) = \boxed{189 \text{ pezzi}}$

(oppure la metà del picco raggiunto a regime dal buffer cioè 378/2).



Dalla figura, il tempo in ciascun periodo della RR che la macchina dedica alla lavorazione di pezzi di tipo 1 è $d_1 \cdot \tau_1 \cdot T$. La percentuale perciò è data da:

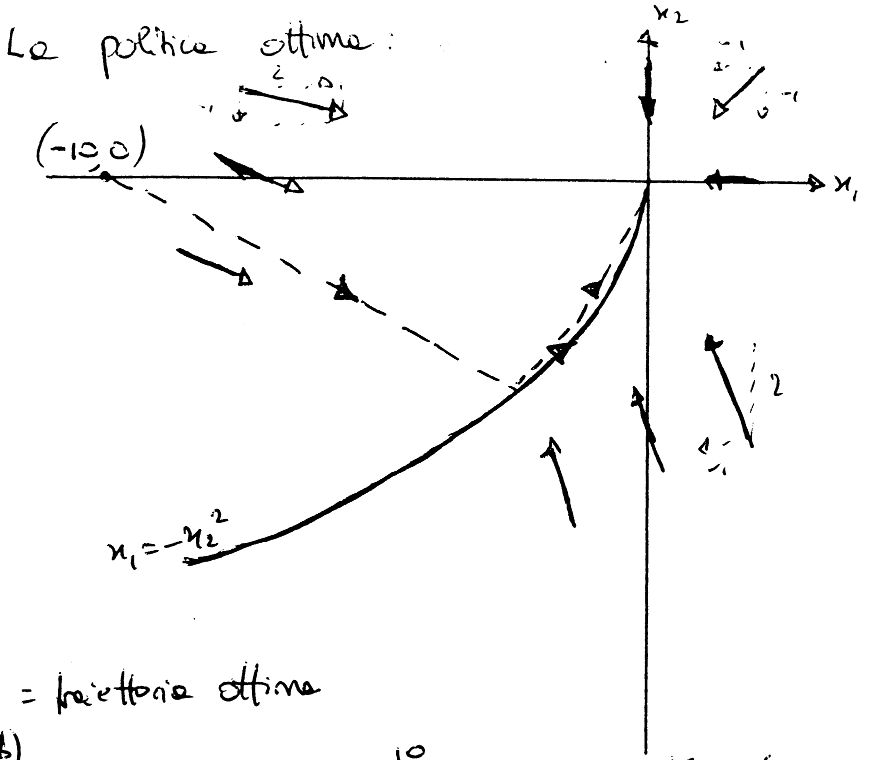
$\%(\text{pezzi } 1) = d_1 \tau_1 T/T = d_1 \cdot \tau_1 = 0.3 = \boxed{30\ \%}$

Es. 2a) Le politiche miopi sono ottime se:

$\rho = d_1/\mu_1 + d_2/\mu_2 = \frac{2}{3} < 1$ ok

Le $g_i(x_i)$ sono convesse, positive e nulle in 0 ok

La politica ottima:



Nel 3° quadrante:

$$\mu_1 \frac{df_1}{dx_1} \gtrless \mu_2 \frac{df_2}{dx_2}$$

$$\frac{df_1}{dx_1} = \frac{x_1}{3} \qquad \frac{df_2}{dx_2} = -\frac{x_2^2}{3}$$

Da cui:

$$x_1 \gtrless -x_2^2$$

La linea di confine è

$$x_1 = -x_2^2$$

– – = traiettoria ottima

(2b)

$$T_{clear} = \frac{w(0)}{1-\rho} = \frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \boxed{10 \text{ ore}}$$

(formula applicabile perché $x_i(0) \leq 0 \ \forall i$)

2c) A $t=8$ l'origine non è stata ancora raggiunta ($T_{clear}=10$).

$x(8)$ è sulla parabola. Infatti, se per assurdo stessi sulla retta avrei: $x_1(8) = -10 + (\mu_1 - \alpha_1)\cdot 8 = -10 + 2\cdot 8 = 6 > 0$!!

(mettendo a sistema $x_1(t) = -10 + 2\cdot t$, $x_2(t) = -t$ con $x_1(t) = -x_2^2(t)$ si può anche calcolare t_1, il tempo in cui la traiettoria incontra la parabola, e si trova $t_1 = 2.32 < 8$).

Si ha: $w(8) = w(0) + \underbrace{(\rho - 1)}_{\dot{w}} \cdot 8 = \frac{10}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 8 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

A $t=8$ ho:

$$\frac{|x_1(8)|}{3} + \frac{|x_2(8)|}{3} = w(8) = \frac{2}{3} \Rightarrow |x_1(8)| + |x_2(8)| = +2$$

$$\hookrightarrow x_1(8) + x_2(8) = -2$$

Inoltre: $x_1(8) = -x_2^2(8)$ (sto sulla parabola)

Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2^2 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow -x_2^2 + x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} -1 \\ +2 \end{cases}$$

Lo escludo perché: $x_2(8) < 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_2(8) = -1 \\ x_1(8) = -x_2^2(8) = -1 \end{array}}$$