COGNOME: Compito 1 NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Un sistema di produzione produce 3 tipi di parti (A,B,C) utilizzando 4 diverse stazioni di lavoro (1,2,3,4), secondo la tabella seguente, dove x è il tempo di lavorazione alla stazione 3. Il tempo di trasporto tra una stazione e l'altra è di 2.5 minuti.

Parte	Domanda oraria d_j (pz/ora)	Ciclo produttivo (tempi in minuti)
A	30	$1(2) \rightarrow 4(3) \rightarrow 3(x)$
B	50	$2(5) \rightarrow 3(x)$
C	80	$1(2) \rightarrow 2(5)$

   a) Utilizzando il modello Bottleneck e assumendo $x = 1$ minuto, calcolare il numero di unità da mettere alle varie stazioni e nel sistema di trasporto per soddisfare la domanda indicata in tabella [8pt]

   b) Se $x = 1$ minuto, determinare il WIP necessario per soddisfare la domanda in tabella secondo il Bottleneck esteso [6pt]

   c) Ripetere i due punti precedenti al variare di x da 0 a 4 minuti riportando i risultati in un grafico [4pt]

2. Si consideri una macchina soggetta a guasti con tempi di funzionamento e di guasto a distribuzione esponenziale con media $\bar{t}_f = 1$ e $\bar{t}_g = 0.1$ ore rispettivamente. Siano $d = 4.5$ pz/ora il tasso della domanda e $\mu = 5$ pz/ora quello massimo di produzione.

   (a) Mostrare che il sistema è stabilizzabile e, se $g(x) = 4x^2$, calcolare la scorta ottima [2+5pt]

   (b) Dire (giustificando la risposta) se modificando la $g(x)$ del punto (a) per $x > 10$ (ferma restando la positività e la convessità della funzione), la scorta ottima risulta diversa da quella calcolata al punto (a) [3pt]

3. Con riferimento ai sistemi con setup non trascurabile, riportare molto brevemente i passaggi della dimostrazione che il WIP medio a regime di una Round Robin è maggiore o uguale al Lower Bound sul WIP di qualsiasi politica stabile non idling [3pt]

Es. 1a) In accordo col modello bottleneck, $S_i = \lceil WL_i \cdot \bar{R}_p \rceil$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, dove $\bar{R}_p = \sum_{j=A}^{C} d_j = 160$ pz/ora e 5 è il sistema di trasporto.

Si ha:

$$WL_1 = 2 \cdot \left(\frac{30}{\bar{R}_p}\right) + 2 \cdot \left(\frac{80}{\bar{R}_p}\right) = \frac{220}{\bar{R}_p} \text{ min/pz}$$

$$WL_2 = 5 \cdot \left(\frac{50}{\bar{R}_p}\right) + 5 \cdot \left(\frac{80}{\bar{R}_p}\right) = \frac{650}{\bar{R}_p} \text{ min/pz}$$

$$WL_3 = x \cdot \left(\frac{30}{\bar{R}_p}\right) + x \cdot \left(\frac{50}{\bar{R}_p}\right) = \frac{80x}{\bar{R}_p} = \frac{80}{\bar{R}_p} \text{ min/pz}$$

$$WL_4 = 3 \cdot \left(\frac{30}{\bar{R}_p}\right) = \frac{90}{\bar{R}_p} \text{ min/pz}$$

$$WL_5 = \left[2 \cdot \left(\frac{30}{\bar{R}_p}\right) + 1 \cdot \left(\frac{50}{\bar{R}_p}\right) + 1 \cdot \left(\frac{80}{\bar{R}_p}\right)\right] \cdot 2.5 = \frac{475}{\bar{R}_p} \text{ min/pz}$$

Quindi

$$S_i = \lceil WL_i \cdot \bar{R}_p \rceil = \left\{ \left\lceil \frac{220}{60} \right\rceil, \left\lceil \frac{650}{60} \right\rceil, \left\lceil \frac{80}{60} \right\rceil, \left\lceil \frac{90}{60} \right\rceil, \left\lceil \frac{475}{60} \right\rceil \right\}$$

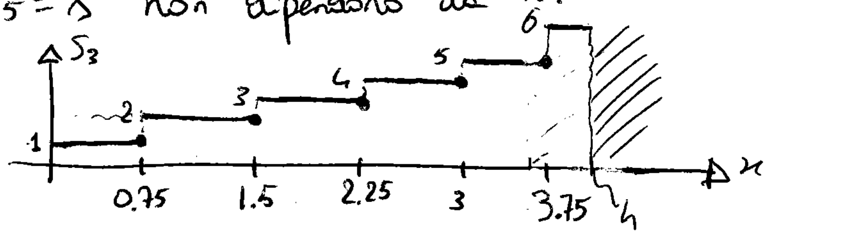
$$= \{4, 11, 2, 2, 8\}$$

1b) Poichè $\bar{R}_p < R_p^*$, siamo nella zona di N piccolo $\Rightarrow WIP = \bar{R}_p \cdot MLT$,

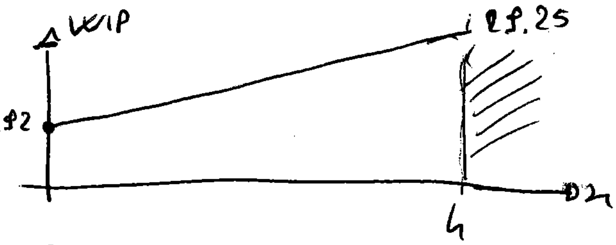
$$MLT_1 = \sum_{i=1}^{5} WL_i \Rightarrow WIP = \frac{220}{60} + \frac{650}{60} + \frac{80}{60} + \frac{90}{60} + \frac{475}{60} = \underline{25.25 \text{ pz}}$$

1c) $S_1 = 4$, $S_2 = 11$, $S_4 = 2$ e $S_5 = 8$ non dipendono da x.

$$S_3 = \left\lceil \frac{80x}{60} \right\rceil = \left\lceil \frac{4}{3} x \right\rceil$$



$$WIP(x) = MLT_1(x) \cdot \overline{R_p} = 23.92 + \frac{4}{3}x$$



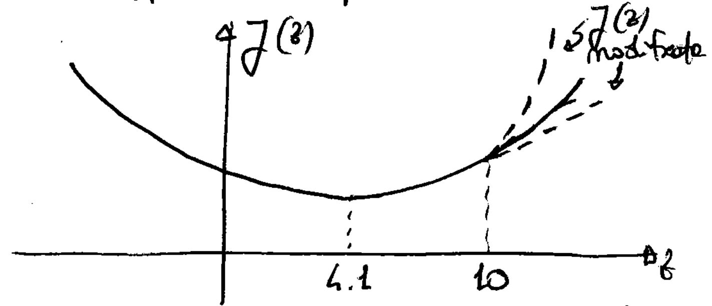
Es. 2a) Il sistema è stabilizzabile, infatti

$$\frac{\mu q_u}{q_d + q_u} = 4.55 > 4.5 = d$$

Poiché $f(x)$ è del tipo cx^2, sappiamo che $z^* = \frac{1-\gamma}{\alpha}$

dove $\gamma = \frac{\mu q_u - d(q_d+q_u)}{(q_d+q_u)(\mu-d)} = 0.091$ e $\alpha = \frac{\mu q_u - d(q_d+q_u)}{d(\mu-d)} = 0.22 \Rightarrow \boxed{z^* = 4.1}$

2b) Essendo $z^* = 4.1 < 10$, una modifica della $f(x)$ per $x > 10$ NON ha effetto su z^*. Infatti $J(z)$ è convessa (prima e dopo il cambiamento della $f(x)$) e si avrebbe una situazione del tipo in figura: cambiando $J(z)$ per $z > 10$ il minimo resta invariato.



Es. 3) Si ha: $WIP_{RR} = \frac{P \cdot \delta}{2(1-\rho)} \sum_{i=1}^{P} d_i (1-\rho_i)$ dove $\rho_i = d_i \cdot \tau_i$

$$LB_{wip} = \frac{\delta}{2(1-\rho)} \left(\sum_{i=1}^{P} \sqrt{d_i(1-\rho_i)} \right)^2$$

$WIP_{RR} \geq LB_{wip} \Longleftrightarrow P \sum_{i=1}^{P} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{P} x_i \right)^2$ dove $x_i = \sqrt{d_i(1-\rho_i)}$

$\Longleftrightarrow \underbrace{\sqrt{P} \sqrt{\sum_{i=1}^{P} x_i^2}}_{= \|v\|_2 \cdot \|x\|_2} \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{P} x_i}_{= \langle v, x \rangle}$ ok per disug. Cauchy-Schwartz

prodotto scalare

dove $v = (1, 1, \ldots 1)$, e $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots}$ è la norma 2 di v.