COGNOME: Compito 1 NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema che lavora 3 buffer con tempi di setup $\delta = 1$ ora, tempi di lavorazione $\tau_i = 15$ minuti e tassi di domanda $d_i = 1$ pz/ora per $i = 1, 2, 3$. Se ne valuti la stabilizzabilità e si calcoli il WIP medio a regime che si ottiene applicando una RR, discutendo se in questo caso è possibile ottenere un WIP medio a regime minore con qualche altra politica [2+5+2pt]
2. Si consideri un sistema PULL che lavora due buffer con tempi di setup trascurabili. Sia $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 6$, $d_1 = 2$ e $d_2 = 3$ pz/ora. Valutare la stabilizzabilità del sistema e dire se è possibile portare tutti i buffer a zero da qualsiasi condizione iniziale. Disegnare quindi nel piano (x_1, x_2) la regione di tutti i punti che possono essere raggiunti da $x(0) = [10, 10]$: se l'origine appartiene a tale regione, calcolare il tempo minimo per raggiungerla da $x(0)$, altrimenti dire perché non è raggiungibile [2+2+4+2pt]
3. Si consideri un sistema soggetto a guasti con i seguenti parametri: $\mu = 5$ pz/ora, $d = 4$ pz/ora, $q_d = 1$, $q_u = 5$ e funzione di costo $g(x) = c_p x^+ + c_m x^-$, con c_p e c_m definiti nel seguito.
   a) Valutare la stabilizzabilità e, assumendo $c_p = 1$ e $c_m = 5$, calcolare la scorta ottima [2+5pt]
   b) Assumendo ora che il rapporto c_p/c_m valga β, dire per quali β la scorta ottima è nulla [3pt]
   c) Calcolare c_p e c_m sapendo che $J'(z)|_{z=0^-} = -2$ e $J'(z)|_{z=0^+} = 0$ [2pt]

Es. 1) Per la stabilizzabilità, calcoliamo $\boxed{\rho = \sum_{i=1}^{P} d_i \tau_i} = 3 \cdot 1 \cdot \frac{15}{60} = \boxed{\frac{3}{4}}$.

Poiché $\boxed{\rho < 1}$, il sistema $\boxed{\text{è stabilizzabile.}}$

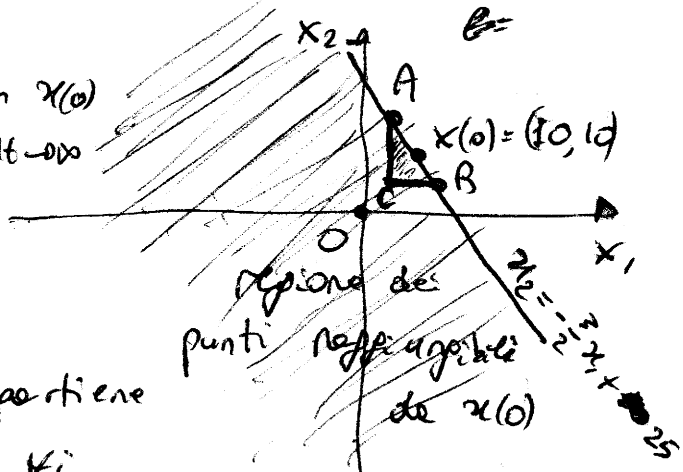
Si ha: $\boxed{WIP_{RR}} = \frac{\rho \cdot \delta}{2(1-\rho)} \sum_{i=1}^{P} d_i (1 - d_i \tau_i) = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1/4} \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{13.5 \text{ pz}}$

Essendo il sistema simmetrico (d_i e τ_i uguali tra loro), la RR è ottima globalmente non solo tra le politiche non idling (il cui LB, nel caso simmetrico, calcolato con $C = 1$, coincide tra l'altro con il WIP_{RR}), e non è quindi possibile fare di meglio.

Es. 2) Si ha: $\boxed{\rho = \sum_{i=1}^{P} \frac{d_i}{\mu_i}} = \frac{2}{4} + \frac{3}{6} = \boxed{1.}$

Essendo $\delta = 0$ (setup trascurabile), per la stabilizzabilità (cioè per riuscire a mantenere tutti i buffer limitati) occorre e basta $\boxed{\rho \leq 1}$. Quindi, essendo $\rho = 1$, il sistema $\boxed{\text{è stabilizzabile}}$ Tuttavia, per riuscire a portare a $\emptyset$ tutti i buffer da qualsiasi condizione iniziale, deve essere $\rho < 1$ strettamente e quindi, in questo caso $\boxed{\text{non è possibile farlo}}$ (si noti che, per esempio, con $x_i(0) < 0 \ \forall i$ la formula del Tclear darebbe un valore infinito, segno che non è possibile raggiungere l'origine del piano (x_1, x_2)).

Per quanto riguarda i punti del piano (x_1, x_2) raggiungibili da $x(0) = (10, 10)$, si noti che i punti raggiungibili in un tempo dt con tutte le possibili scelte di u_1 e u_2 ($u_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{2} u_i/\mu_i \leq 1$) appartengono a un triangolo rettangolo cui ipotenusa contiene tutti e soli i punti che vengono raggiunti lavorando al massimo. Con $\rho = 1$, $x(0)$ sta sull'ipotenusa in quanto è possibile mantenere i buffer costanti solo lavorando al massimo (con $u_i = d_i \ \forall i$, $\sum_{i=1}^{2} u_i/\mu_i = \sum_{i=1}^{2} d_i/\mu_i = \rho = 1$). I vertici del triangolo hanno coordinate: $A=[x_1(0)-d_1\cdot dt,\ x_2(0)+(\mu_2-d_2)dt]$, $B=[x_1(0)+(\mu_1-d_1)dt,\ x_2(0)-d_2\cdot dt]$ e $C=[x_1(0)-d_1\cdot dt,\ x_2(0)-d_2\cdot dt]$. Con $dt=1$ diventano: $A=(8,13)$, $B=(12,7)$, e $C=(8,7)$, come riportato in figura.



All'aumentare di dt, il triangolo si espande con $x(0)$ che rimane sull'ipotenusa e si ottiene per $dt\to\infty$ il semipiano a sinistra della retta che passa per A e B, che ha equazione

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 25,$$

a cui infatti $x(0)$ appartiene. L'origine appartiene a tale regione e, poiché $x_i(0)=10>0\ \forall i$,

$$\boxed{T_{clear}} = \max\left\{\frac{x_i(0)}{d_i}\right\} = \max\left\{\frac{10}{2}, \frac{10}{3}\right\} = \boxed{5}$$

ES.3) a) Si ha $\Delta = \mu q_u - d(q_d+q_u) = 25-4\cdot 6 = 1 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{stabilizzabile}}$

o anche $\mu\frac{q_u}{q_d+q_u} = 4.17 > d = 4$.

Siccome $\gamma = \frac{\mu q_u - d(q_d+q_u)}{(\mu-d)(q_d+q_u)} = 0.17 < \frac{c_m}{c_p+c_m} = 0.83$, $z^*>0$ e si ha:

$$z^* = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{c_m+c_p}{c_p}(1-\gamma)\right) = \boxed{6.44}$$

dividendo sopra e sotto per c_m

3b) La condizione per avere $z^*=0$ è $\gamma \geq \frac{c_m}{c_p+c_m} = \frac{1}{1+\frac{c_p}{c_m}} = \frac{1}{1+\beta}$.

Quindi $(1+\beta)\gamma \geq 1 \to \gamma+\beta\gamma \geq 1 \to \boxed{\beta \geq \frac{1-\gamma}{\gamma} = 5}$

3c) Nel caso di $f(x) = c_p x^+ + c_m x^-$, la $J'(z)$ presenta una discontinuità in 0 passando da $-c_m$ a $-c_m(1-\gamma)+c_p\gamma$. Si ha quindi:

$J'(0^-) = -c_m = -2 \Rightarrow \boxed{c_m=2}$

$J'(0^+) = -c_m(1-\gamma)+c_p\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{c_p =} \; c_m\frac{1-\gamma}{\gamma} = c_m\cdot\beta_{min} = 2\cdot 5 = \boxed{10}$

Si noti infatti che $J'(0^+)=0$ è il valore minimo di $J'(z)$ in 0^+ per cui diventa ottima una scorta nulla e quindi è normale che venga $\frac{c_p}{c_m} = \beta_{min} = \frac{1-\gamma}{\gamma}$, che è il minimo dei valori di β trovati al quesito (3b) per avere $z^*=0$.