Compito ②

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema che lavora 4 buffer con tempi di setup $\delta = 1$ ora, tempi di lavorazione $\tau_i = 10$ minuti e tassi di domanda $d_i = 1$ pz/ora per $i = 1, 2, 3, 4$. Se ne valuti la stabilizzabilità e si calcoli il WIP medio a regime che si ottiene applicando una RR, discutendo se in questo caso è possibile ottenere un WIP medio a regime minore con qualche altra politica [2+5+2pt]
2. Si consideri un sistema PULL che lavora due buffer con tempi di setup trascurabili. Sia $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = 4$, $d_1 = 3$ e $d_2 = 2$ pz/ora. Valutare la stabilizzabilità del sistema e dire se è possibile portare tutti i buffer a zero da qualsiasi condizione iniziale. Disegnare quindi nel piano (x_1, x_2) la regione di tutti i punti che possono essere raggiunti da $x(0) = [6, 6]$: se l'origine appartiene a tale regione, calcolare il tempo minimo per raggiungerla da $x(0)$, altrimenti dire perché non è raggiungibile [2+2+4+2pt]
3. Si consideri un sistema soggetto a guasti con i seguenti parametri: $\mu = 4$ pz/ora, $d = 3$ pz/ora, $q_d = 1$, $q_u = 4$ e funzione di costo $g(x) = c_p x^+ + c_m x^-$, con c_p e c_m definiti nel seguito.
   a) Valutare la stabilizzabilità e, assumendo $c_p = 1$ e $c_m = 4$, calcolare la scorta ottima [2+5pt]
   b) Assumendo ora che il rapporto c_p/c_m valga β, dire per quali β la scorta ottima è nulla [3pt]
   c) Calcolare c_p e c_m sapendo che $J'(z)|_{z=0^-} = -3$ e $J'(z)|_{z=0^+} = 0$ [2pt]

Es. 1) Per la stabilizzabilità, calcoliamo $\boxed{\rho = \sum_{i=1}^{P} d_i \tau_i = 4 \cdot 1 \cdot \frac{10}{60} = \frac{2}{3}}$.

Poiché $\boxed{\rho < 1}$ il sistema $\boxed{\text{è stabilizzabile.}}$

Si ha: $\boxed{WIP_{RR} = \frac{\rho \cdot \delta}{2 \cdot (1-\rho)} \sum_{i=1}^{P} d_i (1 - d_i \tau_i)} = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1/3} \cdot 4 \cdot \frac{5}{6} = \boxed{20 \text{ pz}}$

Essendo il sistema simmetrico (d_i e τ_i uguali tra loro), la $\boxed{\text{RR è ottima globalmente}}$ non solo tra le politiche non idling (il cui LB, nel caso simmetrico, calcolato con $c_i = 1$, coincide tra l'altro con il WIP_{RR}), e non è quindi possibile far di meglio.

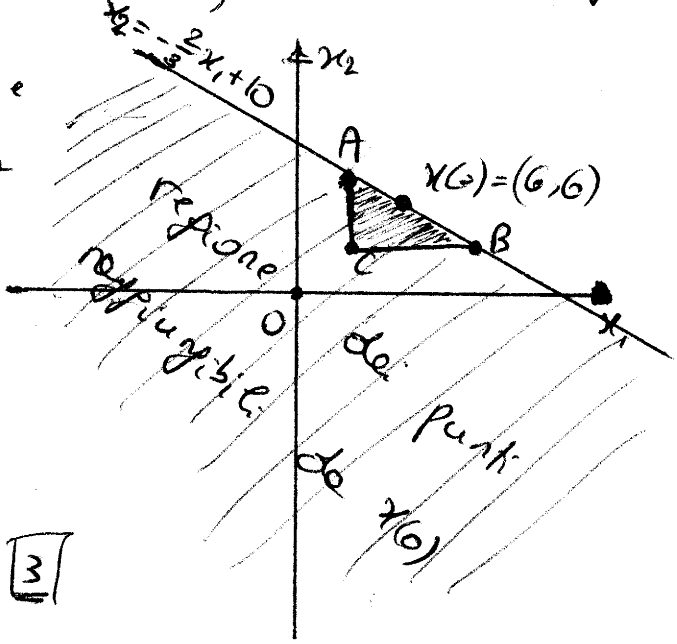
Es. 2) Si ha: $\boxed{\rho = \sum_{i=1}^{P} \frac{d_i}{\mu_i}} = \frac{3}{6} + \frac{2}{4} = \boxed{1.}$

Essendo $\delta = 0$ (setup trascurabile), per la stabilizzabilità (cioè per riuscire a mantenere tutti i buffer limitati), occorre e basta $\boxed{\rho \leq 1}$. Quindi, essendo $\rho = 1$, il sistema $\boxed{\text{è stabilizzabile.}}$ Tuttavia, per riuscire a portare a $\emptyset$ tutti i buffer da qualsiasi condizione iniziale, deve essere $\rho < 1$ strettamente e quindi, in questo caso, $\boxed{\text{non è possibile farlo}}$ (si noti che, per esempio, con $x_i(0) < 0$ $\forall i$ la formula del Tclear, con $1-\rho$ a denominatore, darebbe un valore infinito, segno che non è possibile raggiungere l'origine del piano (x_1, x_2) da punti del 3° quadrante).

Per quanto riguarda i punti del piano (x_1, x_2) raggiungibili da $x(0) = (6, 6)$, si noti che i punti raggiungibili in un tempo dt da $x(0)$, con tutte le possibili scelte di u_1 e u_2 (con $u_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{P} u_i/\mu_i \leq 1$), appartengono a un triangolo rettangolo la cui ipotenusa contiene tutti e soli i punti che vengono raggiunti lavorando al massimo. Se $\rho = 1$ (come in questo caso), $x(0)$ sta sull'ipotenusa in quanto è possibile mantenere i buffer costanti solo lavorando al massimo (con $u_i = d_i$ $\forall i$, $\sum_{i=1}^{2} \frac{u_i}{\mu_i} = \sum_{i=1}^{2} \frac{d_i}{\mu_i} = \rho = 1$). I vertici del triangolo hanno coordinate:

$A = [x_1(0) - d_1 \cdot dt, x_2(0) + (\mu_2 - d_2) dt]$, $B = [x_1(0) + (\mu_1 - d_1) dt, x_2(0) - d_2 \cdot dt]$ e $C = [x_1(0) - d_1 \cdot dt, x_2(0) - d_2 \cdot dt]$.

Con $dt=1$, diventano: $A=(3,8)$, $B=(9,4)$ e $C=(3,4)$, come mostrato in figura.



All'aumentare di dt, il triangolo ABC si espande con $x(0)$ che rimane sull'ipotenusa e si ottiene, per $dt \to \infty$, il semipiano a sinistra della retta che passa per A e B che ha equazione

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 10,$$

a cui infatti $x(0)$ appartiene. L'origine O appartiene a tale regione ed è quindi raggiungibile da $x(0)$. Poiché $x_i(0) = 6 > 0 \ \forall i$;

$$\boxed{T_{clear}} = \max\left\{\frac{x_i(0)}{d_i}\right\} = \max\left\{\frac{6}{3}, \frac{6}{2}\right\} = \boxed{3}$$

Es. 3a) Si ha $\Delta = \mu q_u - d(q_d + q_u) = 16 - 3\cdot 5 = 1 > 0$ ok, $\boxed{\text{stabilizzabile}}$

o anche $\mu_{eff} = \mu \frac{q_u}{q_d + q_u} = 3.2 > d = 3$.

Siccome $\gamma = \frac{\Delta}{(\mu - d)(q_d + q_u)} = 0.2 < \frac{c_m}{c_p + c_m} = 0.8$, si ha $z^* > 0$ con

$$z^* = \frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{c_p + c_m}{c_p}(1-\gamma)\right] = \boxed{4.16}$$

■

dividendo sopra e sotto per c_m

3b) La condizione per avere $z^* = 0$ è $\gamma \geq \frac{c_m}{c_p + c_m} = \frac{1}{\frac{c_p}{c_m} + 1} = \frac{1}{\beta + 1}$.

Quindi $(\beta+1)\gamma \geq 1 \to \beta\gamma + \gamma \geq 1 \to \boxed{\beta \geq \frac{1-\gamma}{\gamma} = 4}$

■

3c) Nel caso $g(x) = c_p x^+ + c_m x^-$, la $J'(z)$ presenta una discontinuità in 0 passando da $-c_m$ a $-c_m(1-\gamma) + c_p\gamma$. Si ha quindi:

$J'(0^-) = -c_m = -3 \Rightarrow \boxed{c_m = 3}$

$J'(0^+) = -c_m(1-\gamma) + c_p\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{c_p =} \ c_m \frac{1-\gamma}{\gamma} = c_m \beta_{min} = 3\cdot 4 = \boxed{12}$

Si noti infatti che $J'(0^+) = 0$ è il valore minimo di $J'(z)$ in $z = 0^+$ per cui diventa ottima una scorta nulla e quindi è normale che venga $\frac{c_p}{c_m} = \beta_{min} = \frac{1-\gamma}{\gamma}$, che è il minimo dei valori di β trovati al quesito (3b) per avere $z^* = 0$.

■