COGNOME: NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

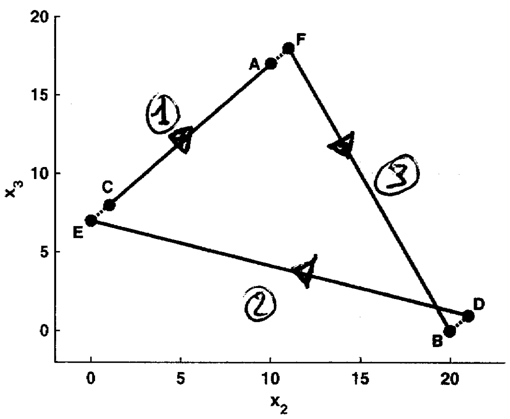
1. Si consideri un sistema PULL che produce tre tipi di parti con tempi di setup trascurabili. I tassi massimi di produzione sono $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 9$ e $\mu_3 = 6$ pz/ora, quelli di domanda $d_1 = 1$, $d_2 = 2$ e $d_3 = 2$ pz/ora. Volendo minimizzare l'indice $J = \int_0^\infty \sum_i g_i[x_i(t)]dt$, con $g_1(x_1) = 3|x_1|$, $g_2(x_2) = |x_2|$ e $g_3(x_3) = \frac{1}{2}x_3^2$, calcolare i tassi produttivi ottimi al tempo zero e il tempo minimo di svuotamento se $x(0) = [-5, -7, -1]$. La scelta dei tassi ottimi è unica? Ripetere con $x(0) = [2, -4, -6]$. [$2 \times (4+4)$pt]

2. Si consideri un sistema PUSH con tempo di setup pari a 0.5 ore, che lavora tre tipi di parti con gli stessi tassi di domanda e di produzione dell'esercizio precedente (si ricordi che $\tau_i = 1/\mu_i$).

   (a) Si assuma che al tempo t i buffer abbiano un contenuto $x_1(t) = 20$, $x_2(t) = 14$ e $x_3(t) = 2$ e che la macchina stia lavorando il buffer 2. Determinare il buffer che verrà lavorato dopo il 2 se la macchina sta applicando una CLW [5pt]

   (b) Calcolare il WIP medio a regime di una Round Robin e confrontarlo con il Lower Bound delle politiche non-idling. [5pt]

   (c) La figura sotto riporta il ciclo limite a regime sul piano (x_2, x_3) ottenuto applicando una CLB. I segmenti tratteggiati AF, CE e BD corrispondono ai setup. Dire quale buffer viene lavorato in ciascuna tratta AC, DE e BF, riportando anche sulla figura il verso di percorrenza di ciascuna tratta. Qual è il tempo complessivo di percorrenza dell'intero ciclo? [3+2pt]



Es. 1) Occorre confrontare i $\mu_i \frac{dg_i}{dx_i}\Big|_{x_i(0)}$.

Si ha:

$\frac{dg_1}{dx_1}\Big|_{x_1<0}$

$$\mu_1 \frac{dg_1}{dx_1}\Big|_{x_1(0)} = 3\cdot(-3) = -9, \text{ essendo } x_1(0) = -5 < 0,$$

$dg_2/dx_2|_{x_2<0}$

$$\mu_2 \frac{dg_2}{dx_2}\Big|_{x_2(0)} = 9\cdot(-1) = -9, \text{ essendo } x_2(0) = -7 < 0,$$

$$\mu_3 \frac{dg_3}{dx_3}\Big|_{x(0)} = 6\cdot\left(\frac{\cancel{2}x_3}{\cancel{2}}\right)\Big|_{x_3(0)} = 6\cdot(-1) = -6.$$

Ora, i buffer ① e ② hanno la stessa priorità (maggiore di quella del buffer 3) per cui si può scegliere $u_1^*(0) = \alpha\mu_1 = 3\alpha$ e $u_2^*(0) = (1-\alpha)\mu_2 = 9(1-\alpha)$ $\forall\, \alpha \in (0,1)$, cioè la scelta non è univoca. Invece $u_3^*(0) = 0$.

Poiché $x_i(0) \le 0 \ \forall i$,

$$T_{clear} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \frac{|x_i(0)|}{\mu_i}}{1-\rho} = \frac{\frac{5}{3}+\frac{7}{9}+\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{6}\right)} = 23.5 \text{ ore}$$

Se $x(0) = (2,-4,-6)$, $u_1^*(0) = 0$, essendo $x_1(0) > 0$. Ora,

$$\mu_2 \frac{dg_2}{dx_2}\Big|_{x_2(0)} = 9\cdot(-1) = -9 \text{ mentre } \mu_3 \frac{dg_3}{dx_3}\Big|_{x_3(0)} = 6\cdot x_3\big|_{-6} = -36$$

In questo caso la scelta degli u_i^* è unica!

Vince ③ e pertanto $u_1^*(0) = 0$, $u_2^*(0) = 0$ e $u_3^*(0) = \mu_3 = 6$ pz/ora.

Per quanto riguarda il Tclear, il buffer 1, positivo, impiega 2 ore per arrivare a $\emptyset$, essendo $\dot{x}_1 = -d_1 = -1$ e $x_1(0) = 2$. Per portare gli altri due a zero, occorre un tempo (lavorando al massimo):

$$T_{clear}^{(2,3)} = \frac{\frac{|x_2(0)|}{\mu_2}+\frac{|x_3(0)|}{\mu_3}}{1-\rho^{(2,3)}} = \frac{\frac{4}{9}+\frac{6}{6}}{1-\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{6}\right)} = 3.25 \text{ ore, quindi } \cancel{\text{dopo}} \text{ che il buffer ① } \cancel{\text{ha}}\ \cancel{\text{ate}} \text{ raggiunto lo zero}$$

Per calcolare il Tclear complessivo ci sono varie possibilità. Un modo è quello di calcolare w al tempo 2, essendo $x_i(2) \leq 0 \ \forall i$. Da qui si può applicare la formula del caso in cui $x_i \leq 0 \ \forall i$. Si ha:

$$w^{(2,3)}(2) = w^{(2,3)}(0) + (\rho^{(2,3)} - 1) \cdot 2,$$

essendo $w^{(2,3)}(0) = \frac{|x_2(0)|}{\mu_2} + \frac{|x_3(0)|}{\mu_3} = 1.44$ e $\rho^{(2,3)} = \frac{2}{9} + \frac{2}{6} = 0.56$.

Pertanto $w^{(2,3)}(2) = 1.44 + (0.56 - 1) \cdot 2 = 0.56$

Ora, $w(2) = \frac{|x_1(2)|}{\mu_1} + \frac{|x_2(2)|}{\mu_2} + \frac{|x_3(2)|}{\mu_3} \equiv w^{(2,3)}(2)$, essendo $x_1(2) = 0$.

Quindi, T_{clear} da $x(2)$ è $\frac{w(2)}{1-\rho} = \frac{w^{(2,3)}(2)}{1 - (\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{6})} = 5$ ore

e quello totale richiesto è $T_{clear} = 2 + 5 = \underline{7 \text{ ore}}$ ■

ES. 2) a) Il buffer 2 scende con velocità $d_2 - \mu_2 = -7$ pz/ore, pertanto si vuoterà al tempo $T_2 = 2$ ore. Al tempo T_2, gli altri due buffer presenteranno un contenuto $x_i(0) + d_i \cdot T_2 \Rightarrow x_1(2) = x_1(0) + d_1 \cdot T_2 = 20 + 1 \cdot 2 = 22$ pezzi e $x_3(2) = x_3(0) + d_3 \cdot T_2 = 2 + 2 \cdot 2 = 6$ pezzi. La CLW dà priorità al buffer che massimizza $\tau_i \cdot x_i(T_2) \Rightarrow \tau_1 x_1(T_2) = \frac{22}{3} = 7.3$, $\tau_3 x_3(T_2) = \frac{6}{6} = 1$.

Vince quindi il buffer ①, che sarà quindi quello che verrà lavorato dopo ②.

b) $\overline{WIP_{RR}} = \frac{P \cdot \delta}{2(1-\rho)} \sum_{i=1}^{P} d_i (1 - \rho_i) = \underline{24 \text{ pezzi}}$, essendo $P = 3$, $\delta = 0.5$ ore, $\rho_i = d_i \tau_i$ e $\rho = \sum_{i=1}^{P} \rho_i$.

Si noti che $\rho = 0.89 < 1$, per cui la RR riesce a mantenere i buffer limitati (e $\overline{WIP_{RR}}$ è finito).

$LB = \frac{\delta}{2(1-\rho)} \left(\sum_{i=1}^{P} \sqrt{d_i (1-\rho_i)} \right)^2 = \underline{23.31 \text{ pezzi}}$. Si noti che, come atteso, $\overline{WIP_{RR}} \geq LB$, che è un lower bound sul WIP a regime di tutte le politiche non idling, e quindi anche della RR.

c) Il verso di percorrenza e il buffer lavorato è indicato sulla figura. Nella tratta CA, per esempio, aumentano sia x_2 sia $x_3 \Rightarrow$ la macchina sta lavorando ①. Il verso è quello dei setup in cui sia x_2 sia x_3 aumentano (non potrebbe essere quello opposto perché la macchina non può far diminuire ② e ③ contemporaneamente). Per il tempo di percorrenza T_c, si noti che in un ciclo vengono effettuati 3 setup, cui corrisponde quindi una frequenza $\frac{3}{T_c}$. Essendo la CLB una politica stabile non idling, la sua frequenza media a regime di setup sarà $\frac{1-\rho}{\delta} = 0.22$ setup/ora.

Pertanto $\frac{3}{T_c} = \frac{1-\rho}{\delta} \Rightarrow T_c = \frac{3 \cdot \delta}{1-\rho} = \underline{13.5}$ ore ■