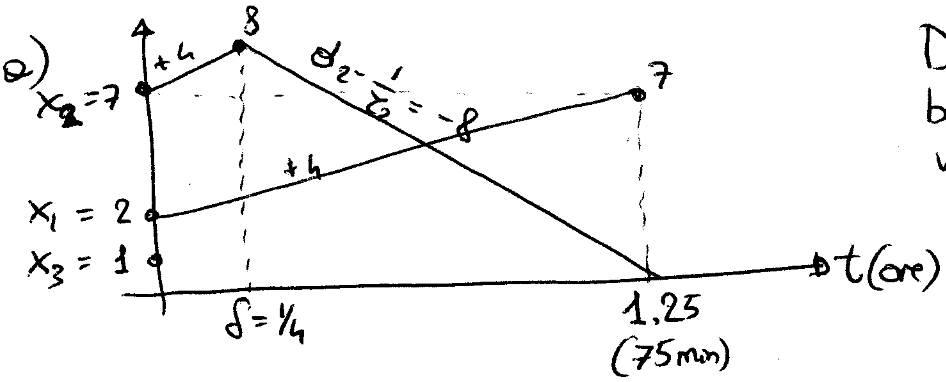
Compito ①

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema che lavora 3 buffer con tempi di setup pari a 15 minuti, tempi di lavorazione $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 5$ minuti e tassi di domanda $d_1 = d_2 = 4$ pz/ora (con d_3 per ora non specificato).
   (a) Si applichi una CLB a partire da $x(0) = [2, 7, 1]$ e si assuma che al tempo zero la macchina, che in base alla CLB comincerà con il buffer 2, debba ancora effettuare il setup. Calcolare per quali valori di d_3 la CLB, dopo aver vuotato il buffer 2, sceglierà il buffer 3, discutendo se per tali valori di d_3 si riesce a mantenere i buffer limitati [5+2pt]
   (b) Assumendo ora $d_3 = 3$ pz/ora, calcolare la frequenza media di setup a regime di una CLB, discutendo se la frequenza media osservata su un orizzonte temporale finito a partire da buffer vuoti risulta maggiore o minore di quella a regime [3+2pt]
2. Si consideri un sistema PULL che lavora due buffer con setup trascurabili. Sia $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 5$, $d_1 = 1$ e $d_2 = 3$ pz/ora. Si vuole minimizzare l'indice $J = \int_0^\infty \sum_i g_i[x_i(t)]dt$, con $g_1(x_1) = x_1^2/4$ e $g_2(x_2) = x_2^2$. Rappresentare sul piano (x_1, x_2) la politica ottima e la traiettoria ottima da $x(0) = [8, -3]$, calcolandone il tempo di percorrenza fino all'origine [7+4+3pt]
3. Si consideri un sistema soggetto a guasti, stabilizzabile, con $\gamma = 0.7$, controllato mediante una politica Hedging Point con scorta z. Sia $P(x \leq 0)$ la probabilità che il buffer a regime abbia un contenuto minore o uguale a zero. Fare un grafico qualitativo di $P(x \leq 0)$ in funzione di $z \geq 0$ indicando in particolare il valore che $P(x \leq 0)$ assume per $z = 0$, per $z = 0^+$ e per $z \to \infty$ [5pt]

Es. 1a)



Durante il setup il buffer 2 cresce con velocità $d_2 = 4$ pz/ora. Siccome $\delta = 0.25$ ore, x_2 aumenterà di 1, arrivando a 8.

Durante la lavorazione, x_2 diminuisce con velocità $d_2 - \frac{1}{\tau_2} = 4 - 12 = -8 \frac{pz}{ora}$, per cui impiega 1 ora a vuotarsi e arriva a ϕ al tempo $0.25 + 1 = 1.25$ ore.

A $t = 1.25$ ore, x_1 è arrivato a $x_1(0) + d_1 \cdot 1.25 = 2 + 4 \cdot 1.25 = \underline{7 \text{ pz}}$, mentre x_3 a $x_3(0) + d_3 \cdot 1.25 = 1 + 1.25 \cdot d_3$. Affinché la CLB scelga il buffer 3, deve essere

$$1 + 1.25 \cdot d_3 \geq 7 \quad \leftrightarrow \quad d_3 \geq \frac{6}{1.25} = \underline{4.8} \text{ pz/ora}$$

Se $d_3 \geq 4.8$ pz/ora, $\rho = \sum_{i=1}^{3} d_i \tau_i \geq 4 \cdot \frac{5}{60} + 4 \cdot \frac{5}{60} + 4.8 \cdot \frac{5}{60} = 1.06 > 1$

e quindi non si riesce a mantenere i buffer limitati.

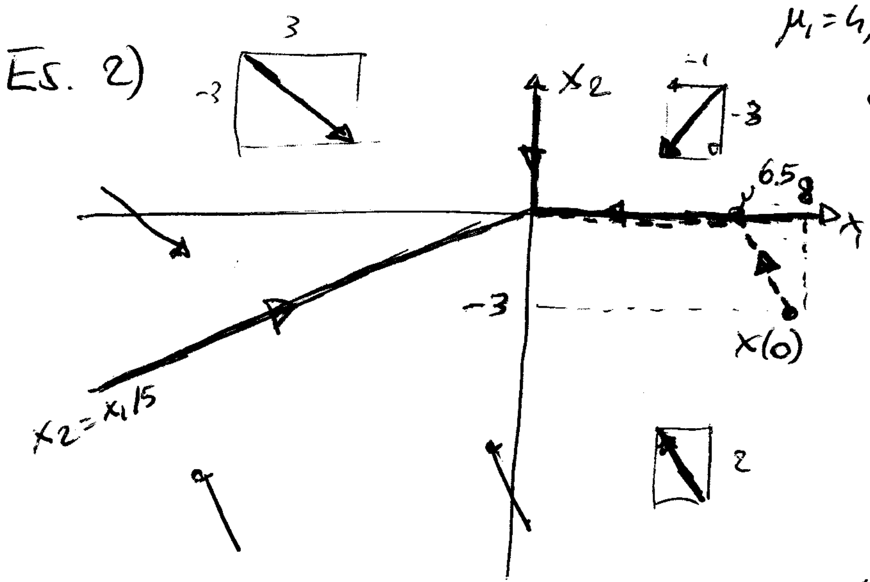
1b) Con $d_3 = 3$ pz/ora, $\rho = \frac{55}{60} < 1$ per cui il sistema è stabilizzabile e la CLB, non idling, a regime fa i setup a una frequenza

$$f = \frac{1 - \rho}{\delta} = \frac{5/60}{15/60} = \frac{1}{3} \text{ setup/ora.}$$

Nel transitorio, se si parte da buffer nulli, la frequenza ~~media~~ di setup è maggiore (le lavorazioni durano meno tempo che a regime), per cui la frequenza media iniziale sarà maggiore di quella a regime.

Es. 2)

$\mu_1=4,\ \mu_2=5,\ d_1=1,\ d_2=3$



Si ha $\rho=\frac{1}{4}+\frac{3}{5}=0.85<1$.

Nel terzo quadrante:

$$\mu_1\frac{dp_1}{dx_1} \gtreqless \mu_2\frac{dp_2}{dx_2}$$

$$4\left(2\frac{x_1}{4}\right) \gtreqless 5\cdot 2x_2$$

$$\boxed{x_1 \gtreqless 5x_2}$$

La linea di confine è la retta $\boxed{x_2=\frac{1}{5}x_1}$

La traiettoria ottima da $x(0)=\begin{bmatrix}8\\-3\end{bmatrix}$ è tratteggiata. All'inizio si ha:

$x_1(t)=x_1(0)-d_1\cdot t=8-t$ arriva a $\varnothing$ a $t=8$ ore

$x_2(t)=x_2(0)+(\mu_2-d_2)t=-3+2t$ arriva a $\varnothing$ a $t=1.5$ ore

Quindi si interseca prima l'asse x_1 a $t=1.5$ ore nel punto $(6.5,0)$. Il buffer 1 si vuota sempre a velocità -1, per cui il tempo che si impiega per arrivare nell'origine (che è anche il tempo minimo) è $T_{clear}=\underline{8\text{ ore}}$ ■

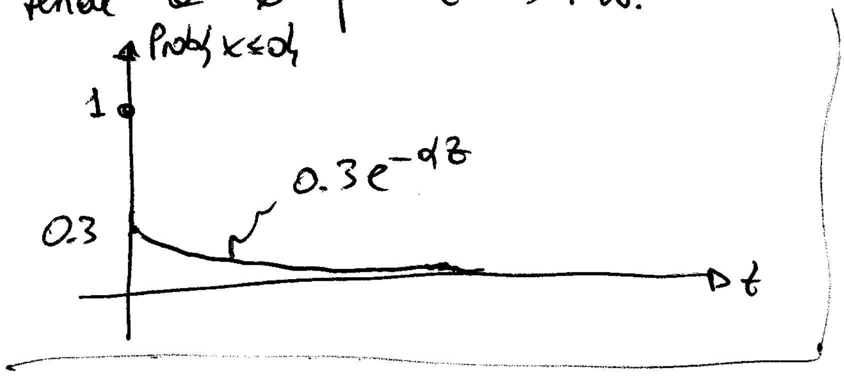
Es. 3)

Se $z=0$, $\text{Prob}\{x\le 0\}$ è chiaramente $\underline{1}$, perché a regime $x\le z$ sempre.

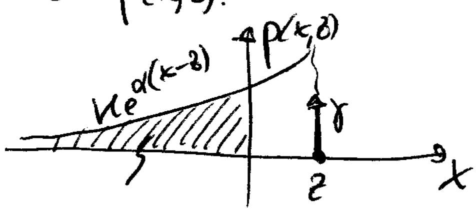
Se $z>0$, $\text{Prob}\{x\le 0\}=\int_{-\infty}^{0}p(x,z)\,dx=\int_{-\infty}^{0}K e^{\alpha(x-z)}dx=Ke^{-\alpha z}\left.\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right|_{-\infty}^{0}$

$=\frac{K}{\alpha}e^{-\alpha z}=(1-\gamma)e^{-\alpha z}=0.3\,e^{-\alpha z}$ (essendo $\frac{K}{\alpha}=1-\gamma$).

Pertanto, per $z=0^+$, $\text{Prob}\{x\le 0\}=\lim_{z\to 0}0.3e^{-\alpha z}=\underline{0.3}$, mentre tende a $\varnothing$ per $z\to+\infty$.



Questo risultato si poteva ricavare anche guardando il profilo di $p(x,z)$:



dove l'area ● evidenziata è proprio la $\text{Prob}\{x\le 0\}$

e sapendo che $\int_{-\infty}^{z}p(x,z)\,dx+\gamma=1$. All'aumentare di z da $\varnothing$ all'∞, l'area passa da 1 a $\varnothing$ con un salto di γ quando z diventa positivo ($z=0^+$) ■