COGNOME: COMPITO 1 NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema di produzione di tipo PULL che produce due tipi di parti con tempi di setup trascurabili. I tassi massimi di produzione sono $\mu_1 = 9$ e $\mu_2 = 3$ pz/ora. I tassi di domanda sono $d_2 = 1$ pz/ora e d_1 come specificato nel seguito.
   (a) Determinare per quali valori di d_1 il sistema risulta stabilizzabile [3pt]
   (b) Si assuma ora $d_1 = 3$ pz/ora. Si vuole minimizzare l'indice di costo $J = \int_0^\infty [g_1(x_1(t)) + g_2(x_2(t))]\,dt$, dove

N.B. $g_1(-1) = g_1(-1^+) = 1$ per cui g_1 è continua (necessario per convessità)

$$g_1(x_1) = \begin{cases} x_1^3 & x_1 \geq 0 \\ -x_1 & x_1 \in (-1, 0) \\ -2x_1 - 1 & x_1 \leq -1 \end{cases} \qquad g_2(x_2) = \frac{3}{2}x_2^2.$$

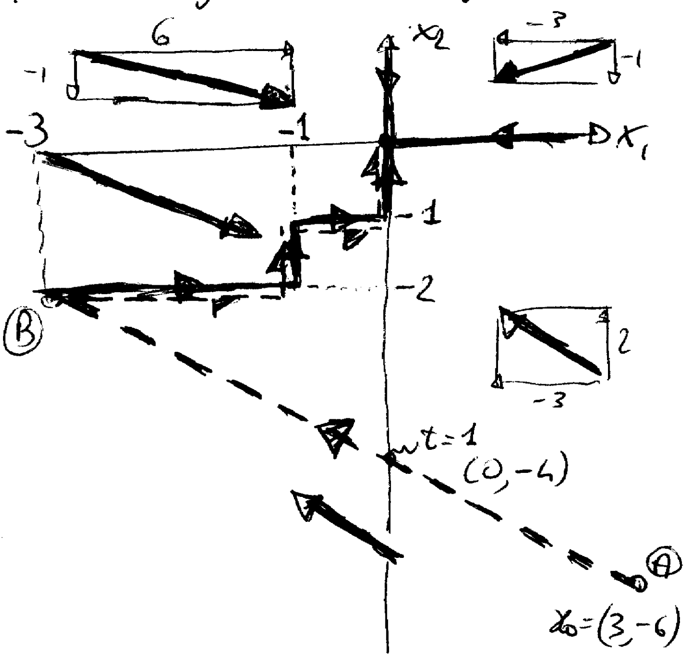
Verificare se sono soddisfatte le condizioni di ottimalità delle politiche miopi e riportare sul piano (x_1, x_2) la politica ottima. Indicare quindi sullo stesso piano la traiettoria ottima dal punto $(3, -6)$ e calcolarne il tempo di percorrenza [2+7+3+4pt]

2. Si consideri una macchina soggetta a guasti con tempi di funzionamento e di guasto a distribuzione esponenziale con parametri q_d e q_u rispettivamente. Si indichino con d e μ rispettivamente i tassi di domanda e di produzione massima e si assuma che la funzione di costo da minimizzare sia $J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[\int_0^T g[x(t)]dt\right]$, con $g(x) = x^+ + 3x^-$.
   (a) Se $q_d = 3$, $q_u = 15$, $d = 4$ pz/ora e $\mu = 5$ pz/ora, mostrare la stabilizzabilità e calcolare la scorta ottima z^* [3+5pt]
   (b) Supponendo ora di non conoscere q_d, q_u, d e μ, ma sapendo che il loro valore è tale che la scorta ottima z^* sia strettamente positiva, calcolare la probabilità che, applicando la politica ottima, il buffer abbia a regime un contenuto negativo [4pt]

ES. 1) (a) Il sistema è stabilizzabile se $\rho = \frac{d_1}{\mu_1} + \frac{d_2}{\mu_2} \leq 1$ ($\rho = 1$ è ammissibile in quanto i tempi di setup sono trascurabili). Quindi:

$$\rho = \frac{d_1}{\mu_1} + \frac{d_2}{\mu_2} = \frac{d_1}{9} + \frac{1}{3} \leq 1 \iff \boxed{d_1 \leq 6 \text{ pz/ora}}$$

(b) Se $d_1 = 3$, $\rho = 2/3 < 1$. Inoltre g_1 e g_2 sono convesse, positive per $x \neq 0$ e nulle in 0. Pertanto la politica ottima è di tipo miope. Nel I quadrante la politica ottima è $u_1 = u_2 = 0$, nel II $u_1 = \mu_1$ e $u_2 = 0$, nel IV $u_1 = 0$ e $u_2 = \mu_2$. Nel III quadrante occorre confrontare $\mu_1 \frac{dg_1}{dx_1}$ con $\mu_2 \frac{dg_2}{dx_2}$.



— ▸ — traiettoria ottima

Ora, $\mu_2 \frac{dg_2}{dx_2} = 3 \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cancel{2} x_2 = 9x_2$

$$\mu_1 \frac{dg_1}{dx_1} = \begin{cases} 9 \cdot (-1) & \text{se } x_1 \in (-1, 0) \\ 9 \cdot (-2) & \text{se } x_1 \leq -1 \end{cases}$$

Perciò, nel III quadrante:
- se $x_1 \in (-1, 0)$, vince 2 se $x_2 < -1$
- se $x_1 < -1$, vince 2 se $x_2 < -2$.

La traiettoria ottima da $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ è riportata in figura. Nel primo tratto (A - B) si ha:

$$x_1(t) = x_1(0) - d_1 t = 3 - 3t$$
$$x_2(t) = x_2(0) + (\mu_2 - d_2)t = -6 + 2t$$

Si nota come, per $t = 1$, $x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ e che, per $t = 2$, si intercetta la retta $x_2 = -2$ (infatti, $x_2 = -2$ per t: $-6 + 2t = -2 \Rightarrow t = 2$). A $t = 2$, $x_1 = -4$.
Da questo punto in poi, la traiettoria ottima segue la linea di confine.

Il tempo di percorrenza è $T_{clear} = 1 + T_{clear}(0,-4)$. Infatti, dopo 1 ora, la traiettoria ottima arriva nel punto $(0,-4)$. Poiché tale punto è nel III quadrante, si può applicare la formula:

$$T_{clear}(0,-4) = \frac{\frac{0}{\mu_1} + \frac{4}{\mu_2}}{1-\rho} = \frac{4/3}{1/3} = 4 \text{ ore.}$$

Pertanto, in totale, $T_{clear} = 1 + 4 = \boxed{5 \text{ ore}}$.

ES. 2) (a) Per la stabilizzabilità, deve essere $\frac{\mu q_u}{q_d + q_u} > d$ oppure, equivalentemente, $\mu q_u - d(q_d+q_u) > 0$. Ora, $\mu q_u - d(q_d+q_u) = 5 \cdot 15 - 4 \cdot (15+3) = 3 > 0$ OK

Si ha $\gamma = \frac{\mu q_u - d(q_d+q_u)}{(\mu - d)(q_d+q_u)} = 0.17$ mentre $\frac{c_m}{c_p+c_m} = \frac{3}{1+3} = 0.75$.

Quindi, $\gamma < \frac{c_m}{c_p+c_m} \Rightarrow z^* > 0$ e $z^* = \frac{1}{\alpha} \ln\left[\frac{c_p+c_m}{c_p}(1-\gamma)\right] = 1.61$.

(b) Se $z^* > 0$, $J'(z^*) = 0$. Infatti, quando $z^* > 0$, z^* è un minimo della $J(z)$ che presenta una derivata nulla in tale punto (ciò non vale se $z^* = 0$ dove $J'(z)$ è discontinua).

Ora, $J'(z^*) = E[g'(x)] = \int_{-\infty}^{z^*} g'(x)\, p(x,z)\, dx = \int_{-\infty}^{0} (-c_m)\, p(x,z^*)\, dx +$

$$+ \int_0^{z^*} c_p\, p(x,z^*)\, dx + \gamma \cdot c_p = (-c_m)\, P(x<0) + c_p\, P(x \geq 0).$$

Ma $P(x \geq 0) = 1 - P(x<0)$. Quindi:

$$0 = J'(z^*) = (-c_m)\, P(x<0) + c_p\,(1 - P(x<0)) =$$
$$-(c_m + c_p)\, P(x<0) + c_p$$

da cui $\boxed{P(x<0) = \frac{c_p}{c_p+c_m} = \frac{1}{4}}$.

N.B. Effettuando il calcolo diretto $P(x<0) = \int_{-\infty}^{0} p(x,z)\,dx$ e sostituendo l'espressione di $z^* = \frac{1}{\alpha} \ln\left[\frac{c_p+c_m}{c_p}(1-\gamma)\right]$, anche si otteneva la stessa formula (i vari parametri μ, d, q_d e q_u si sarebbero semplificati facendo i calcoli).