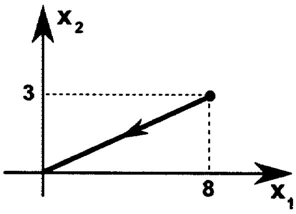
COGNOME: NOME: MATRICOLA:

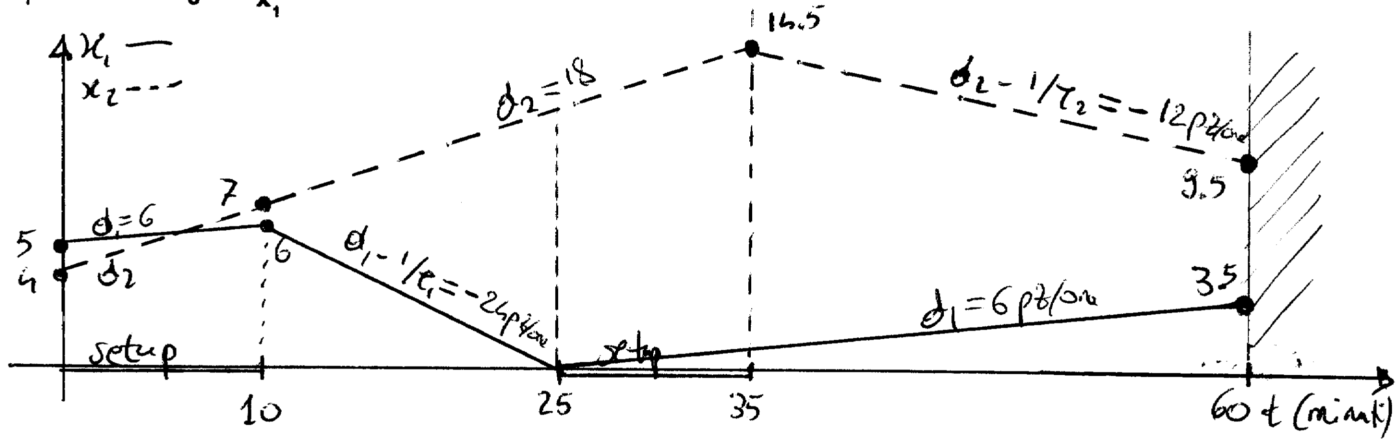
**N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).**

1. Si consideri un sistema PUSH con tempi di setup non trascurabili, costituito da una macchina che lavora $P = 2$ tipi di parti con tassi di domanda $d_1 = 6$ e $d_2 = 18$ pezzi/ora, tempi di lavorazione $\tau_1 = \tau_2 = 2$ minuti e tempo di setup pari a 10 minuti. Valutare la stabilizzabilità del sistema. Assumendo poi che il contenuto iniziale dei due buffer sia $x_1(0) = 5$ e $x_2(0) = 4$ e che la macchina al tempo 0 debba ancora effettuare il setup, tracciare il grafico dell'andamento dei due buffer per $t \in (0, T)$ con $T = 60$ minuti nel caso si adotti una politica CLB. Quale buffer avrebbe scelto al tempo 0 una politica CLAB? [3+6+2pt]
2. Si consideri un sistema di produzione di tipo PUSH che produce due tipi di parti con tempi di setup trascurabili. I tassi massimi di produzione e di domanda sono rispettivamente: $\mu_1 = \mu_2 = 3$, $d_1 = d_2 = 1$ pz/ora. Si vuole minimizzare l'indice $J = \int_0^\infty [5x_1(t) + x_2(t)]\,dt$. Disegnare sul piano $(x_1, x_2)$ la traiettoria ottima a partire dal punto $(8, 3)$ e confrontare il costo di questa traiettoria con quello che si ottiene seguendo (a massima velocità) il percorso indicato nella figura in basso. [5+5pt]
3. Si consideri una macchina soggetta a guasti con tempi di funzionamento e di guasto a distribuzione esponenziale con parametri $q_d = 1$ e $q_u = 5$ rispettivamente. Siano $d = 8$ pz/ora il tasso della domanda e $\mu = 10$ pz/ora quello massimo di produzione. Si vuole minimizzare l'indice di costo $J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[\int_0^T g[x(t)]dt\right]$, dove $g(x) = 6x^2$. Mostrare che il sistema è stabilizzabile e calcolare la scorta ottima $z^*$. Quanto vale il contenuto medio a regime del buffer se si usa una politica hedging point con scorta $z = z^*$? [3+5+2pt]




ES. 1) $\rho = d_1\tau_1 + d_2\tau_2 = 6\cdot\frac{2}{60} + 18\cdot\frac{2}{60} = \frac{48}{60} < 1$

$\Rightarrow$ Essendo $\rho<1$, il sistema è stabilizzabile.




Al tempo ∅ la CLB sceglie il buffer 1 perché $x_1(0)=5>4=x_2(0)$. La lavorazione comincia a t = 10 minuti, dopo il setup. Durante il setup $x_1$ sale a 6 e $x_2$ a 7. La parte 1 viene lavorata a una velocità di 30 pezzi all'ora, per cui

$\dot{x}_1 = d_1 - 1/\tau_1 = 6 - \frac{1}{2/60} = 6-30 = -24$ pz/ora.

Occorrono 15 minuti per portare $x_1$ a ∅. Dopo il setup viene lavorata la parte 2 a una velocità sempre di 30 pz/ora con $\dot{x}_2 = d_2 - \frac{1}{\tau_2} = 18-30 = -12$ pz/ora.

A t = 60, $x_2$ vale $14.5 - 12\cdot\frac{25}{60} = 9.5$. La parte uno invece, salendo a velocità $d_1$, arriva a 3.5.

Al tempo ∅ la politica CLAB avrebbe invece scelto il buffer 2, infatti $j^*(0) = \arg\max_i x_i(10)$

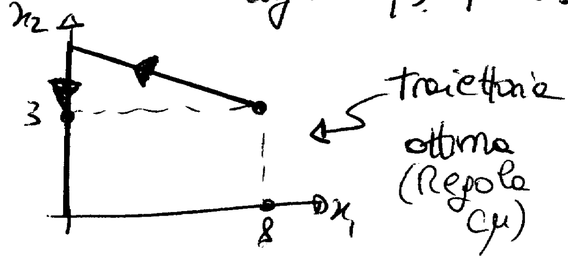
$= \arg\max\{6, 7\} = 2$. ■

ES. 2) Si ha $c_1=5$ e $c_2=1$.

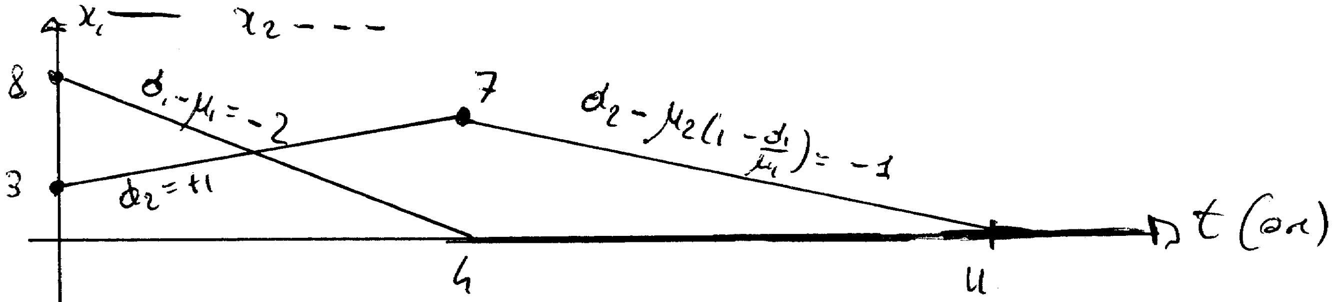
$c_1\mu_1 = 5\cdot 3 = 15$

$c_2\mu_2 = 1\cdot 3 = 3$

Quindi $c_1\mu_1 > c_2\mu_2 \Rightarrow$ ha priorità la parte 1.



Nel tempo, l'andamento dei buffer della traiettoria ottima è:

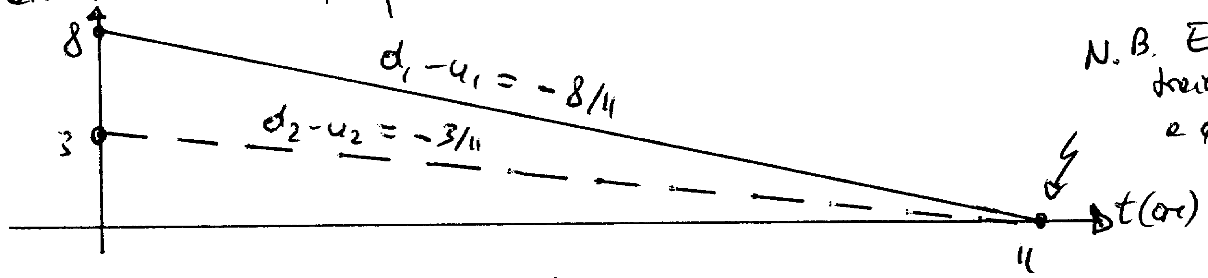



Per $t \in (0,4)$ la macchina lavora il buffer 1 con $u_1 = \mu_1$. Per $t \in (4, 11)$ si prende $u_1 = d_1 = 1$ per mantenere $x_1$ a 0 e si dedica la capacità restante della macchina al buffer 2, cioè $u_2 = \mu_2 (1 - \frac{d_1}{\mu_1}) = 2$.

Il costo è l'area del grafico di $x_1$ pesato con $c_1 = 5$ più l'area di $x_2$:

$$J = 5 \cdot \frac{4 \cdot 8}{2} + \frac{(7+3) \cdot 4}{2} + \frac{7 \cdot 7}{2} = \underline{124.5}$$

L'andamento nel tempo della traiettoria diretta è:




N.B. Entrambe le traiettorie arrivano a $\emptyset$ al tempo $T_{clear} = 11$ ore.

$u_1$ e $u_2$ si ricavano imponendo la velocità massima $\left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2} = 1\right)$ e l'inclinazione del profilo nel piano $(x_1, x_2)$: $\frac{d_1 - u_1}{d_2 - u_2} = \frac{8}{3}$.

Si ricava $u_1 = 19/11 = 1.73$ pz/ora, $u_2 = 14/11 = 1.27$ pz/ora

Si ha $J = 5 \cdot \frac{8 \cdot 11}{2} + \frac{3 \cdot 11}{2} = \underline{236.5}$, come atteso, maggiore del costo ottimo 124.5 calcolato sopra. ■

Es. 3) Si ha: $\Delta = \mu q_u - d(q_d + q_u) = 2 > 0 \Rightarrow$ sì, è ~~stabile~~ stabile.

Quando $g(x) = cx^2$, la politica ottima è hedging point con $z^* = \frac{1-\gamma}{\alpha}$

Ora, $\gamma = \frac{\Delta}{(q_d + q_u)(\mu - d)} = 0.17$ e $\alpha = \frac{\Delta}{d(\mu - d)} = 0.13 \Rightarrow \boxed{z^* = 6.67}$

In generale, se $g(x) = cx^2$ lo scarto ottimo è tale che $E[x] = 0$.
Infatti, il minimo di $J(z)$ si ha imponendo $\frac{dJ}{dz} = 0$. Ma

$$\frac{dJ}{dz} = E\left[\frac{dg}{dx}\right] = E[2cx] = 2c\,E[x].$$

■