

Analisi modale dell'esempio del carrello

Si consideri un carrello di massa m che si sposta su una rotaia rettilinea e orizzontale (si veda il Cap. 2 degli appunti delle lezioni). L'equazione dinamica del carrello è data da:

$$m\ddot{s} + f\dot{s} = u(t), \quad (1)$$

dove $s(t)$ è la posizione del carrello al tempo t , $u(t)$ la forza che agisce su di esso e f il coefficiente di attrito viscoso. Nel Cap. 2 dianzi richiamato era stata anche fornita una rappresentazione ISU del carrello. In particolare, scegliendo come variabili di stato la posizione e la velocità del carrello:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix},$$

si otteneva una rappresentazione ISU

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (3)$$

con matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0.$$

Nel caso di $f = 0$ la matrice A , come è semplice verificare, ha come autovalore 0 con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. Pertanto, non solo non è possibile applicare i concetti dell'analisi modale visti nel Cap. 7 degli appunti (che richiedevano autovalori distinti e cioè con molteplicità algebriche, e quindi geometriche, pari a uno), ma non si può neanche diagonalizzare la matrice A , in quanto non è possibile trovare una base di autovettori.

Assumeremo quindi per ora che sia $f \neq 0$ e, per semplicità, supporremo $f = 1$ e $m = 1$. In tal caso le matrici sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0.$$

Gli autovalori di A sono in questo caso distinti e possiamo pertanto applicare tutti i concetti visti nel Cap. 7. Procediamo quindi con il calcolo di tali autovalori, che sono le radici del polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 1).$$

La matrice A ha due autovalori distinti ($\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$). Per applicare i concetti dell'analisi modale visti nel Cap. 7, occorre determinare gli autovettori destri (e sinistri) relativi a ciascun autovalore. Poiché gli autovalori hanno tutti molteplicità algebrica uno, anche la loro molteplicità geometrica sarà uno e pertanto ci sarà un solo autovettore destro indipendente per ognuno dei due autovalori.

Autovettore destro relativo a $\lambda_1 = 0$. È il vettore non nullo $w \in \mathbb{R}^2$ soluzione del sistema di equazioni $(A - \lambda_1 I)w = 0$. Si ha $A - \lambda_1 I = A$, essendo $\lambda_1 = 0$. Come atteso, $A - \lambda_1 I = A$ ha rango 1 (gli autovalori sono quei numeri λ per cui $A - \lambda I$ non ha rango pieno, che è 2 in questo caso, e quindi sono tali che $(A - \lambda I)w = 0$ ammette soluzioni w non nulle). In questo caso, se $w = [w(1), w(2)]'$, le due equazioni del sistema $Aw = 0$ sono dipendenti e danno entrambe come condizione $w(2) = 0$. Scegliendo $w(1) = 1$ (essendo $w(1)$ libera in questo caso), si ottiene come soluzione $w = [1, 0]'$. Prendiamo quindi come autovettore destro w_1 relativo a λ_1 questo vettore, cioè $w_1 = [1, 0]'$.

Autovettore destro relativo a $\lambda_2 = -1$. È il vettore non nullo $w \in \mathbb{R}^2$ soluzione del sistema di equazioni $(A - \lambda_2 I)w = 0$. Si ha:

$$A - \lambda_2 I = A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso, $A+I$ non ha rango pieno (la seconda riga è nulla) e l'unica condizione da soddisfare è quella dettata dall'equazione associata alla prima riga della matrice, cioè $w(1)+w(2) = 0$. Si può quindi scegliere come autovettore $w_2 = [1, -1]'$.

Individuati i due autovettori destri, si può formare la matrice

$$T^{-1} = [w_1, w_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

che ha appunto per colonne i due autovettori. Facendo i conti si trova che la sua inversa T in questo caso coincide con T^{-1} e pertanto $v'_1 = [1, 1]$ e $v'_2 = [0, -1]$, essendo infatti le righe di T i due autovettori sinistri v'_1 e v'_2 cercati.

Siamo in un caso planare (cioè di dimensione $\bar{n} = 2$). Pertanto il carrello evolve secondo dei modi che si possono disegnare sul piano (x_1, x_2) . Poiché abbiamo un autovalore nullo e uno negativo, siamo nel caso della Fig. 7.4 degli appunti, anche se gli autovalori e gli autovettori non sono esattamente gli stessi di quella figura. Riproponiamo quindi la figura in questione adattandola al presente caso e ottenendo quindi il grafico riportato in Fig. 1. Questa figura, come si ricorderà, contiene alcune possibili risposte libere che si ottengono al variare delle condizioni iniziali. Si nota come la componente lungo w_1 (che è l'autovettore relativo all'autovalore nullo) rimane costante, mentre quella lungo l'autovettore w_2 (relativo a $\lambda_2 = -1 < 0$) tende a zero per t che va all'infinito. Come visto a suo tempo, la formula della risposta libera è:

$$x_\ell(t) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} w_i c_i = c_1 w_1 + c_2 e^{-t} w_2 = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 e^{-t} \\ -c_2 e^{-t} \end{bmatrix},$$

essendo c_1 e c_2 le componenti della condizione iniziale x_0 rispetto alla base di autovettori w_1 e w_2 ed avendo $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. Dalla figura è evidente come, partendo da un punto del I e II quadrante

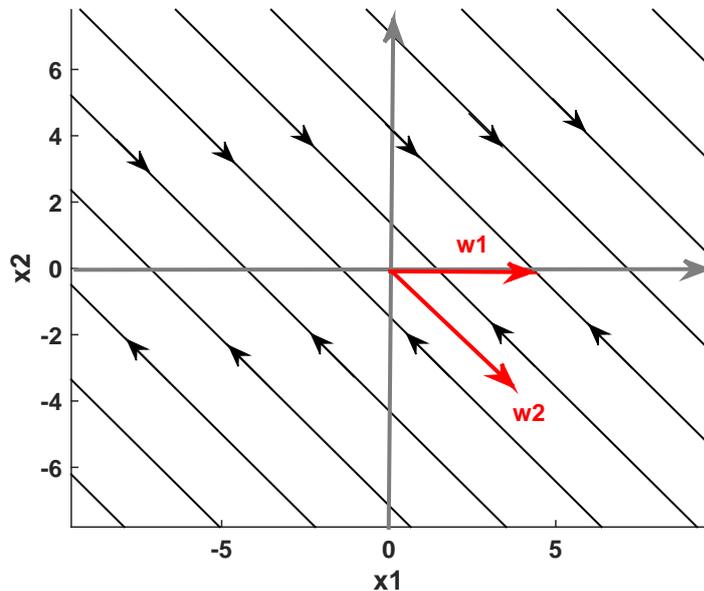


Figura 1: Alcune possibili risposte libere del carrello.

(con velocità quindi x_2 positiva), la posizione x_1 aumenta mentre la velocità tende a zero per t che va all'infinito. Nel III e IV quadrante la velocità è negativa e quindi la posizione diminuisce mentre la velocità tende sempre ad annullarsi. Tutte le risposte libere finiscono sull'asse $x_2 = 0$. Questo è in accordo con quanto si osserva sperimentalmente: nel caso di attrito con l'aria, il carrello si muove rallentando progressivamente fino a fermarsi dopo un certo tempo.

Eccitabilità e osservabilità dei singoli modi. Un modo λ_i è eccitabile con impulsi in ingresso se $v_i' B \neq 0$, essendo v_i' l'autovettore sinistro di A relativo a λ_i . Si ha dunque:

- $\lambda_1 = 0$

$$v_1' B = [1, 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{eccitabile.}$$

- $\lambda_2 = -1$

$$v_2' B = [0, -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{eccitabile.}$$

Un modo λ_i è osservabile in uscita se $C w_i \neq 0$, essendo w_i l'autovettore destro di A relativo a λ_i . Si ha dunque:

- $\lambda_1 = 0$

$$C w_1 = [1, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{osservabile.}$$

- $\lambda_2 = -1$

$$C w_2 = [1, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{osservabile.}$$

I modi sono quindi entrambi eccitabili e osservabili e pertanto possiamo concludere che il sistema è completamente raggiungibile e osservabile. Questo del resto è confermato dall'esperienza: posso sempre scegliere l'ingresso u per raggiungere qualunque posizione e velocità desiderate e, dalla misura della posizione, vedendo come varia nel tempo, posso sempre ricavare anche la velocità.

Il fatto che il sistema sia tutto raggiungibile e osservabile si vede anche dalla funzione di trasferimento, riportata in Tabella 1, che nel caso fin qui esaminato ($f \neq 0$ e $C = [1, 0]$), ha a denominatore un polinomio di secondo grado, in cui compaiono come poli entrambi gli autovalori del sistema (la $W(s)$ rappresenta quindi tutto il sistema). Pertanto, nel caso $f \neq 0$ fin qui esaminato, il blocchetto raggiungibile e osservabile z_a della figura 3.1 degli appunti (che è l'unico presente in questo caso) è in effetti formato da autospazi (i due autospazi relativi ai due autovalori del sistema).

	Misura della posizione ($C = [1, 0]$)	Misura della velocità ($C = C_v = [0, 1]$)
$f \neq 0$	$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$	$W(s) = \frac{1}{s+1}$
$f = 0$	$W(s) = \frac{1}{s^2}$	$W(s) = \frac{1}{s}$

Tabella 1: La funzione di trasferimento $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ nei vari casi esaminati in questo documento: si lascia per esercizio il calcolo di questa funzione. Si noti come, misurando la velocità (seconda colonna della tabella), la funzione di trasferimento $W(s)$ abbia a denominatore un polinomio di grado uno, minore della dimensione del sistema, e non rappresenti quindi tutto il sistema.

Nel caso invece in cui $f = 0$, abbiamo visto che non esiste una base di autovettori e quindi non si possono applicare i concetti dell'analisi modale visti nel Cap. 7. Il sistema carrello rimane tuttavia sempre raggiungibile e osservabile (come confermato dall'esperienza nonché dalla funzione di trasferimento riportata in Tabella 1 che ha un denominatore di grado 2, sempre pari alla dimensione del sistema), ma il blocchetto z_a non è più formato da autospazi.

Il caso di misura della velocità

Se misuro la velocità anziché la posizione, la matrice C invece di $[1, 0]$ sarà data da

$$C_v = [0, 1].$$

Come è semplice verificare, perdo l'osservabilità del modo $\lambda_1 = 0$. Infatti, gli autovettori destri e sinistri sono sempre gli stessi (dipendono solo dalla matrice A e non dalla C) e anche l'eccitabilità rimane immutata, non avendo modificato la matrice B . Per l'osservabilità dei due modi invece ho:

- $\lambda_1 = 0$

$$C_v w_1 = [0, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{NON osservabile.}$$

- $\lambda_2 = -1$

$$C_v w_2 = [0, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{osservabile.}$$

Del resto, se misuro solo la velocità, non c'è modo di scoprire la posizione del carrello (a meno che non conosca da dove sono partito, ma l'osservabilità significa appunto la possibilità di risalire al valore delle variabili di stato usando unicamente le informazioni che mi vengono dalle misure).

Ciò è confermato dalla funzione di trasferimento (si veda sempre la Tabella 1) dove, se misuro la velocità, il grado del denominatore della $W(s)$ risulta pari a uno, minore quindi della dimensione del sistema: la funzione di trasferimento non lo rappresenta tutto e ho ora sia il blocchetto z_a (rappresentato dalla $W(s)$), sia il blocchetto z_b , raggiungibile ma non osservabile. Nel caso affrontato con l'analisi modale ($f \neq 0$), z_a è dato da z_2 (coordinata nell'autospazio dell'autovalore eccitabile e osservabile), mentre z_b da z_1 (coordinata nell'autospazio dell'autovalore eccitabile ma non osservabile). La funzione di trasferimento contiene come polo solo l'autovalore $\lambda_2 = -1$ eccitabile e osservabile.

Nel caso $f = 0$, i due blocchetti z_a e z_b non sono più costituiti da autospazi, non esistendo in effetti una base di autovettori in questo caso, e la funzione di trasferimento contiene l'unico autovalore in 0 come polo semplice: non è più rappresentato in questo caso il modo polinomiale $t\delta_{-1}(t)$ (corrispondente a $1/s^2$), che in effetti descrive l'evoluzione libera della variabile non osservabile, cioè la posizione del carrello a partire da posizione nulla ($x_1(0) = s(0) = 0$) e velocità unitaria ($\dot{x}_2(0) = v(0) = 1$).