Passaggio da ISU a IU: esempi termici della Sez. 3.5

Nella Sez. 3.5 si era determinata la rappresentazione IU di due sistemi termici a partire dalla loro rappresentazione ISU. Ora abbiamo tutti gli strumenti per verificare la correttezza di quanto riportato in tale sezione.

1.1 Esempio termico della Sez. 3.5.1

Nella Sez. 3.5.1 si era considerato un sistema termico che poteva essere descritto da una dinamica lineare stazionaria la cui rappresentazione ISU è del seguente tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu && (1.1) \\ y &= Cx + Du, && (1.2) \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{k_{12}+k_{e1}}{c_1} & \frac{k_{12}}{c_1} \\ \frac{k_{12}}{c_2} & -\frac{k_{12}+k_{e2}}{c_2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = [1 \quad 0], \qquad D = 0.$$

Si era poi detto che, andando a determinare la rappresentazione IU di questo sistema, si ottiene la seguente equazione:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u + b_1 \dot{u},$$

dove:

$$a_0 = \frac{k_{e1}k_{e2} + k_{12}(k_{e1}+k_{e2})}{c_1c_2} \qquad a_1 = \frac{k_{12}+k_{e2}}{c_2} + \frac{k_{12}+k_{e1}}{c_1} \qquad b_0 = \frac{k_{12}+k_{e2}}{c_1c_2} \qquad b_1 = \frac{1}{c_1}. \qquad (1.3)$$

Verifichiamo ora la validità di quanto affermato a suo tempo. La procedura per determinare la rappresentazione IU a partire dalla ISU richiede il calcolo della funzione di trasferimento $W(s) = C(sI-A)^{-1}B+D$ associata alla rappresentazione ISU data. Procediamo quindi innanzitutto al calcolo di $(sI-A)^{-1}$. Si ha:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s + \frac{k_{12}+k_{e1}}{c_1} & -\frac{k_{12}}{c_1} \\ -\frac{k_{12}}{c_2} & s + \frac{k_{12}+k_{e2}}{c_2} \end{bmatrix},$$

il cui determinante è

$$\begin{aligned} det(sI-A) &= \left(s + \frac{k_{12}+k_{e1}}{c_1}\right)\left(s + \frac{k_{12}+k_{e2}}{c_2}\right) - \frac{k_{12}^2}{c_1c_2} \\ &= s^2 + \left(\frac{k_{12}+k_{e1}}{c_1} + \frac{k_{12}+k_{e2}}{c_2}\right)s + \frac{k_{12}(k_{e1}+k_{e2}) + k_{e1}k_{e2}}{c_1c_2}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{det(sI-A)} \begin{bmatrix} s + \frac{k_{12}+k_{e2}}{c_2} & \frac{k_{12}}{c_1} \\ \frac{k_{12}}{c_2} & s + \frac{k_{12}+k_{e1}}{c_1} \end{bmatrix}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI-A)^{-1}B + D = [1,\ 0](sI-A)^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \\ &= \frac{1}{c_1}\frac{s + \frac{k_{12}+k_{e2}}{c_2}}{s^2 + \left(\frac{k_{12}+k_{e1}}{c_1} + \frac{k_{12}+k_{e2}}{c_2}\right)s + \frac{k_{12}(k_{e1}+k_{e2})+k_{e1}k_{e2}}{c_1c_2}} \\ &= \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + s^2}, \end{aligned}$$

con i coefficienti a_0, a_1, b_0 e b_1 indicati nella (1.3).

Ora, per determinare la rappresentazione IU, si scrive la relazione in s che lega l'ingresso U alla risposta forzata in uscita Y:

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + s^2} U(s).$$

Moltiplicando a sinistra e a destra per il denominatore di $W(s)$:

$$(a_0 + a_1 s + s^2)Y(s) = (b_0 + b_1 s)U(s),$$

cioè

$$a_0 Y(s) + a_1 s Y(s) + s^2 Y(s) = b_0 U(s) + b_1 s U(s),$$

che nel tempo corrisponde a:

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + \ddot{y} = b_0 u + b_1 \dot{u}.$$

Questa in effetti è la rappresentazione IU indicata nella Sez. 3.5.1.

1.1.1 Il caso $\mathbf{k_{12} = 0}$

Se però $k_{12} = 0$, si ha:

$$W(s) = \frac{1}{c_1} \frac{s + \frac{k_{e2}}{c_2}}{s^2 + \left(\frac{k_{e1}}{c_1} + \frac{k_{e2}}{c_2}\right) s + \frac{k_{e1}k_{e2}}{c_1 c_2}} = \frac{1}{c_1} \frac{s + \frac{k_{e2}}{c_2}}{\left(s + \frac{k_{e2}}{c_2}\right)\left(s + \frac{k_{e1}}{c_1}\right)} = \frac{\frac{1}{c_1}}{s + \frac{k_{e1}}{c_1}},$$

avendo avuto una semplificazione tra numeratore e denominatore. Questo porta quindi, seguendo la stessa procedura indicata pocanzi, alla seguente rappresentazione IU:

$$\dot{y} + \frac{k_{e1}}{c_1} y = \frac{1}{c_1} u,$$

che è la stessa indicata nella Sez. 3.5.1 ed ha un ordine (uno) inferiore rispetto alla dimensione (due) della rappresentazione ISU di partenza. Questo, come si era detto, è indice di una non completa raggiungibilità e/o osservabilità del sistema. Ciò è stato causato, come si è visto, dalla semplificazione tra numeratore e denominatore della $W(s)$ che ha avuto luogo dopo aver scelto $k_{12} = 0$.

1.2 Esempio termico della Sez. 3.5.2

Il sistema termico considerato nella Sez. 3.5.2 ha una rappresentazione ISU caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{k_{12}+k_e}{c} & \frac{k_{12}}{c} \\ \frac{k_{12}}{c} & -\frac{k_{12}+k_e}{c} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1/c \\ 1/c \end{bmatrix}, \qquad C = [1 \quad 0], \qquad D = 0.$$

Seguendo gli stessi passi della sezione precedente, si ha:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s + \frac{k_{12}+k_e}{c} & -\frac{k_{12}}{c} \\ -\frac{k_{12}}{c} & s + \frac{k_{12}+k_e}{c} \end{bmatrix},$$

da cui

$$\begin{aligned} det(sI - A) &= \left(s + \frac{k_{12} + k_e}{c}\right)^2 - \frac{k_{12}^2}{c^2} \\ &= \left(s + \frac{2k_{12} + k_e}{c}\right)\left(s + \frac{k_e}{c}\right), \end{aligned}$$

(avendo sfruttato la relazione $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$) e

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{det(sI - A)} \begin{bmatrix} s + \frac{k_{12}+k_e}{c} & \frac{k_{12}}{c} \\ \frac{k_{12}}{c} & s + \frac{k_{12}+k_e}{c} \end{bmatrix}.$$

Pertanto:

$$
\begin{aligned}
W(s) &= C(sI-A)^{-1}B+D \\
&= [1,\ 0](sI-A)^{-1}\begin{bmatrix} 1/c \\ 1/c \end{bmatrix}+0 \\
&= \frac{1}{c}\frac{s+\frac{2k_{12}+k_e}{c}}{\left(s+\frac{2k_{12}+k_e}{c}\right)\left(s+\frac{k_e}{c}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{c}}{s+\frac{k_e}{c}}.
\end{aligned}
$$

Questo corrisponde ad una rappresentazione IU del tipo:

$$
\dot{y}+\frac{k_e}{c}y=\frac{1}{c}u,
$$

coincidente con quella riportata nella Sez. 3.5.2 e, anche in questo caso, di ordine inferiore alla dimensione della rappresentazione ISU di partenza.