Controllo in catena aperta di un carrello: calcolo della risposta mediante Laplace

Si consideri un carrello di massa m che si sposta su una rotaia rettilinea e orizzontale (si veda il Cap. 2 degli appunti delle lezioni). Si assuma per semplicità come equazione dinamica del carrello

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = u(t) \tag{1}$$

dove $x(t)$ è la posizione del carrello al tempo t, $u(t)$ la forza che agisce su di esso, supposta limitata da un valore massimo pari a F (cioè $|u(t)| \leq F$) e γ il coefficiente di attrito viscoso. Assumeremo nel seguito nulla la posizione e la velocità iniziali del carrello, cioè $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$.

Calcolo della risposta a un controllo in catena aperta in assenza di attrito viscoso

Considerando in prima approssimazione trascurabile l'attrito viscoso (cioè $\gamma = 0$), il controllo che permette di spostare in tempo minimo il carrello da $x_0 = 0$ a $x(2T) = L$, con $2T$ tempo di completamento dello spostamento, agisce accelerando al massimo ($u = F$) il carrello per metà del percorso per poi decelerarlo al massimo ($u = -F$) nella seconda metà:

$$u(t) = \begin{cases} F & t \in (0, T) \\ -F & t \in (T, 2T) \\ 0 & t > 2T \end{cases} \tag{2}$$

Nel Cap. 2 degli appunti del corso si era ricavata l'espressione della posizione del carrello, che si riporta qui per comodità:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F}{2m}t^2 & t \in (0, T) \\ \frac{F}{2m}(-2T^2 + 4T\,t - t^2) & t \in (T, 2T) \\ \frac{F}{m}T^2 & t > 2T \end{cases} \tag{3}$$

Assegnato uno spostamento desiderato L, tale espressione permette anche di determinare il valore di T che consente di ottenere uno spostamento finale del carrello pari a L. Infatti, dalla precedente, essendo la posizione finale del carrello pari a $\frac{F}{m}T^2$, ponendola pari a L si ricava:

$$T = \sqrt{\frac{mL}{F}}.$$

Vediamo come è possibile ricavare l'espressione di $x(t)$ in (3) utilizzando la trasformata di Laplace. Ci sono due modi possibili:

1. Procedere per intervalli:
   a) Calcolare prima la risposta in $[0, T]$, supponendo quindi $u(t) = F\delta_{-1}(t)$. Questo fornisce una soluzione $x(t)$ valida per $t \leq T$.
   b) Calcolare la risposta in $[T, 2T]$ considerando T come tempo iniziale e traslando tutto quindi di T. Sia $\tilde{t} = t - T$ la nuova variabile temporale. Le condizioni iniziali del problema saranno quindi il valore di x e di $\dot{x}$ che vengono dal punto precedente per $t = T$, mentre $u(\tilde{t}) = -F\delta_{-1}(\tilde{t})$. Questo fornisce una soluzione $x(\tilde{t})$ da cui la soluzione in t sarà $x(t - T)$ (cioè, se per esempio come soluzione trovassimo $x(\tilde{t}) = [\tilde{t}^2 - 2]\delta_{-1}(\tilde{t})$, la soluzione in t sarebbe $[(t-T)^2 - 2]\delta_{-1}(t-T)$).
   c) Analogamente, ricavando le condizioni iniziali a $2T$ dal punto precedente e ponendo $u = 0$, si ricava la soluzione anche per $t > 2T$.
2. Calcolare la trasformata della $u(t)$ in (2) e procedere al calcolo diretto di $x(t)$.

Il secondo metodo permette di effettuare molti meno calcoli ed è quindi quello che verrà prescelto nel seguito. Procediamo quindi al calcolo di $U(s)$, la trasformata di Laplace di $u(t)$ in (2). Si ha:

$$U(s) \;=\; \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_0^{T} Fe^{-st}dt - \int_T^{2T} Fe^{-st}dt$$

$$\begin{aligned} &= F \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{t=T} + F \left. \frac{e^{-st}}{s} \right|_{t=T}^{t=2T} = F\frac{1-e^{-sT}}{s} + F\frac{e^{-s2T}-e^{-sT}}{s} \\ &= F\frac{1-2e^{-sT}+e^{-s2T}}{s}. \end{aligned}$$

Si noti che una funzione del tipo $X(s)e^{-sT}$ ha come trasformata inversa $x(t-T)$, essendo $X(s)$ la trasformata di $x(t)$ (con $x(t)=0$ per $t<0$). Infatti, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t-T)\} &= \int_0^\infty x(t-T)e^{-st}dt = e^{-sT}\int_0^\infty x(t-T)e^{-s(t-T)}dt \\ &= e^{-sT}\int_T^\infty x(t-T)e^{-s(t-T)}dt = e^{-sT}\int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = X(s)e^{-sT}. \end{aligned}$$

Procediamo ora al calcolo della risposta di (1) con $\gamma=0$. Poiché le condizioni iniziali sono nulle, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s), \\ \mathcal{L}\{\ddot{x}\} &= s^2X(s). \end{aligned}$$

Pertanto, se $\gamma=0$, la (1) in s diventa:

$$ms^2X(s)=U(s),$$

da cui

$$X(s) = \frac{1/m}{s^2}U(s) = \frac{F/m}{s^3}\left[1-2e^{-sT}+e^{-s2T}\right] = X_0(s)\left[1-2e^{-sT}+e^{-s2T}\right],$$

avendo introdotto la notazione

$$X_0(s) = \frac{F/m}{s^3}.$$

Per quanto detto pocanzi, se $x_0(t)$ è la trasformata inversa di $X_0(s)$, si avrà

$$x(t) = x_0(t) - 2x_0(t-T) + x_0(t-2T).$$

La trasformata inversa di Laplace di $X_0(s)$ si ricava immediatamente ed è data da:

$$x_0(t) = \frac{F}{2m}t^2.$$

Pertanto, la soluzione finale sarà:

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t) & t\in(0,T) \\ x_0(t)-2x_0(t-T) & t\in(T,2T) \\ x_0(t)-2x_0(t-T)+x_0(t-2T) & t>2T. \end{cases} \tag{4}$$

Ora,

$$x_0(t)-2x_0(t-T) = \frac{F}{2m}t^2 - 2\frac{F}{2m}(t-T)^2 = \frac{F}{2m}(-t^2+4tT-2T^2)$$

e

$$x_0(t)-2x_0(t-T)+x_0(t-2T) = \frac{F}{2m}(t^2-2(t-T)^2+(t-2T)^2) = \frac{FT^2}{m}.$$

Con ciò si è dimostrata la validità della soluzione espressa in (3).

Calcolo della risposta nel caso di perturbazione rispetto alle condizioni nominali

La cosa interessante è che, se provo ad applicare la legge di controllo in catena aperta (2) al carrello nell'ipotesi perturbata che $\gamma>0$, si trova che, per **qualsiasi** valore di γ, la posizione finale del carrello coincide con quella iniziale (cioè, $x_\infty := \lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 = 0$). In altre parole, se nelle condizioni nominali (cioè per $\gamma=0$) alla fine del movimento il carrello si trova in posizione L (si ha in particolare

$x(t) = L$ per ogni $t > T$ e quindi chiaramente $x_\infty = L$), basta una perturbazione infinitesima su γ per far sì che il carrello controllato da (2) non solo non raggiunga L ma se ne torni indietro fino a fermarsi esattamente in 0 (cioè $x_\infty = 0$).

Verifichiamo innanzitutto questo fatto apparentemente paradossale mediante calcolo diretto e poi cercheremo di giustificarlo sia analiticamente sia con discorsi di tipo più sistemistico.

Calcolo diretto

Chiaramente la trasformata di $x(t)$, essendo sempre nulle le condizioni iniziali, e la $U(s)$ sono identiche a quelle ricavate pocanzi. Essendo però $\gamma \neq 0$, nel dominio di Laplace la (1) diviene ora:

$$ms^2X(s) + \gamma sX(s) = U(s).$$

Dividendo per m e raccogliendo X:

$$s(s + \frac{\gamma}{m})X = \frac{1}{m}U.$$

Pertanto

$$X(s) = \frac{1/m}{s(s+\frac{\gamma}{m})}U(s) = \frac{F/m}{s^2(s+\frac{\gamma}{m})}\left[1 - 2e^{-sT} + e^{-s2T}\right] = X_0(s)\left[1 - 2e^{-sT} + e^{-s2T}\right],$$

avendo introdotto anche qui la notazione

$$X_0(s) = \frac{F/m}{s^2(s+\frac{\gamma}{m})}.$$

Per quanto detto pocanzi, se $x_0(t)$ è la trasformata inversa di $X_0(s)$, si avrà

$$x(t) = x_0(t) - 2x_0(t-T) + x_0(t-2T).$$

Procediamo quindi al calcolo della trasformata inversa di Laplace di $X_0(s)$. Si ha:

$$X_0(s) = \frac{F/m}{s^2(s+\frac{\gamma}{m})} = \alpha_{11}\frac{1}{s} + \alpha_{12}\frac{1}{s^2} + \alpha_{21}\frac{1}{s+\frac{\gamma}{m}}.$$

Determinando i coefficienti con le usuali formule si ottiene:

$$X_0(s) = -\frac{Fm}{\gamma^2}\frac{1}{s} + \frac{F}{\gamma}\frac{1}{s^2} + \frac{Fm}{\gamma^2}\frac{1}{s+\frac{\gamma}{m}}.$$

Dalla precedente si ha infine:

$$x_0(t) = \left[\frac{Fm}{\gamma^2}\left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1\right) + \frac{F}{\gamma}t\right]\delta_{-1}(t).$$

Anche qui vale la (4) ma con la funzione $x_0(t)$ appena calcolata. Tra le altre cose, è interessante osservare che:

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to 0} x_0(t) = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0} x'(t) = \lim_{t\to 0} x_0'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{Fm}{\gamma^2}\left(-\frac{\gamma}{m}\right)e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{F}{\gamma} = 0,$$

che conferma la validità della soluzione in termini di condizioni iniziali.

Procediamo ora però alla parte più interessante, che è il calcolo del limite per t che tende all'infinito di $x(t)$. Ora scrivendo in modo esplicito la soluzione si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) - 2x_0(t-T) + x_0(t-2T) \\ &= -\frac{Fm}{\gamma^2}\left[\delta_{-1}(t) - 2\delta_{-1}(t-T) + \delta_{-1}(t-2T)\right] \\ &+ \frac{Fm}{\gamma^2}\left[e^{-\frac{\gamma}{m}t}\delta_{-1}(t) - 2e^{-\frac{\gamma}{m}(t-T)}\delta_{-1}(t-T) + e^{-\frac{\gamma}{m}(t-2T)}\delta_{-1}(t-2T)\right] \\ &+ \frac{F}{\gamma}\left[t\delta_{-1}(t) - 2(t-T)\delta_{-1}(t-T) + (t-2T)\delta_{-1}(t-2T)\right]. \end{aligned}$$

Ora, per $t > 2T$, il primo e il terzo termine della precedente sono identicamente nulli. Infatti:

$$\delta_{-1}(t) - 2\delta_{-1}(t-T) + \delta_{-1}(t-2T) = 1 - 2 + 1 = 0,$$

e

$$t\delta_{-1}(t) - 2(t-T)\delta_{-1}(t-T) + (t-2T)\delta_{-1}(t-2T) = t - 2(t-T) + (t-2T) = 0.$$

Pertanto, per $t > 2T$, la risposta $x(t)$ è data semplicemente da:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{Fm}{\gamma^2}\left[e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 2e^{-\frac{\gamma}{m}(t-T)} + e^{-\frac{\gamma}{m}(t-2T)}\right] \\ &= \frac{Fm}{\gamma^2}e^{-\frac{\gamma}{m}t}\left[1 - 2e^{\frac{\gamma T}{m}} + e^{\frac{2\gamma T}{m}}\right], \end{aligned}$$

da cui si vede facilmente che $x(t)$ tende a 0 per t che tende all'infinito (essendo γ e m costanti positive).

Questo fatto sembra **paradossale** perché, se $\gamma = 0$, $x(t) = L$ per ogni $t > 2T$ (e quindi in particolare per t che tende all'infinito), mentre **per ogni** $\gamma > \mathbf{0}$ (anche infinitesimo!), $\mathbf{x(t)}$ **tende a 0 per t che tende all'infinito**. Vediamo se riusciamo a capire perché ciò accade.

Verifica analitica

Un modo possibile per verificare la correttezza di quanto ottenuto si basa su considerazioni analitiche dirette sull'equazione della dinamica (1). Infatti, integrando la (1) tra 0 e ∞, si ottiene la seguente relazione (si noti come l'integrale da 0 a ∞ della $u(\cdot)$ è nullo, essendo pari a $F \cdot T - F \cdot T$):

$$m(v_\infty - v_0) + \gamma(x_\infty - x_0) = 0,$$

essendo $v = \dot{x}$ la velocità del carrello (cioè l'integrale della sua accelerazione) e avendo posto, come fatto per x, $v_\infty := \lim_{t\to\infty} v(t)$. Ora, le condizioni iniziali sono assunte tutte nulle ($x_0 = 0$ e $v_0 = 0$). D'altra parte, poiché per $t > 2T$ agisce solo l'attrito (stiamo assumendo $\gamma > 0$), il carrello prima o poi si ferma, cioè $v_\infty = 0$. Questo implica inequivocabilmente $x_\infty = 0$, a conferma di quanto ottenuto mediante calcolo diretto della soluzione (chiaramente, se $\gamma = 0$, la precedente non permette di raggiungere la stessa conclusione).

Giustificazione basata su considerazioni sistemistiche

Un'interessante giustificazione teorica a quanto accade nel caso perturbato si può dare ricorrendo al **principio di sovrapposizione degli effetti** e di **invarianza alla traslazione temporale** che in effetti la dinamica (1), in quanto lineare e stazionaria, soddisfa. Supponiamo di applicare un controllo $u_a(\cdot)$ definito nel seguente modo:

$$u_a(t) = \begin{cases} F & t \in (0,T) \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{5}$$

In presenza di attrito questo controllo produrrà una traiettoria $x_a(t)$ monotona crescente che tende a un valore limitato $\bar{x}$, ossia

$$\lim_{t\to\infty} x_a(t) = \bar{x}.$$

Consideriamo ora il seguente controllo opposto al precedente:

$$u_b(t) = \begin{cases} -F & t \in (0,T) \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{6}$$

Chiaramente, se applichiamo questo controllo, per la linearità osserveremo un comportamento opposto al precedente, con

$$\lim_{t\to\infty} x_b(t) = -\bar{x}.$$

Trasliamo ora il secondo controllo $u_b(\cdot)$ di T e chiamiamolo $\tilde{u}_b(\cdot)$, cioè

$$\tilde{u}_b(t) = u_b(t-T).$$

È evidente che la somma di $u_a(\cdot)$ e di $\tilde{u}_b(\cdot)$ restituisce proprio il controllo nominale $u(\cdot)$ specificato nella (2), ossia

$$u_a(\cdot) + \tilde{u}_b(\cdot) = u(\cdot).$$

D'altra parte, per l'invarianza alla traslazione temporale, l'effetto di $\tilde{u}_b(\cdot)$ è lo stesso di $u_b(\cdot)$ ma ritardato di T, quindi, se chiamiamo con $\tilde{x}_b(\cdot)$ la traiettoria corrispondente a $\tilde{u}_b(\cdot)$, varrà sempre

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}_b(t) = -\bar{x}.$$

Ma allora è evidente, sempre per la sovrapposizione degli effetti, come

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x_a(t) + \tilde{x}_b(t) = \bar{x} - \bar{x} = 0,$$

essendo $x(\cdot)$ la traiettoria generata dal controllo $u(\cdot)$ specificato in (1).

Si vuole far notare infine come, in assenza di attrito (cioè nel caso $\gamma = 0$), il ragionamento precedente non si applica in quanto il valore di $\bar{x}$ diventa infinito: in tal caso si giunge a una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$ il cui valore dipende in effetti dalla traslazione che viene attuata su $u_b(\cdot)$.

Un'altra giustificazione basata su strumenti della Teoria dei Controlli Automatici

Un altro metodo per dimostrare che il carrello torna a zero per t che tende all'infinito è basato su un cambiamento di coordinate. Si introducano le variabili di stato $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$. In queste coordinate, come visto nel Cap. 2 degli appunti del corso, la dinamica è del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu,$$

essendo $\mathbf{x}$ il vettore delle variabile di stato $[x_1, x_2]'$ e le matrici A e B date da:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\gamma}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

Introducendo il seguente cambiamento di coordinate (fatto in base agli autovettori di A):

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + \frac{m}{\gamma} x_2 \\ z_2 &= -\frac{m}{\gamma} x_2 \end{aligned}$$

la matrice A diventa diagonale e si ha

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{\gamma} u \\ \dot{z}_2 &= -\frac{\gamma}{m} z_2 - \frac{1}{\gamma} u. \end{aligned}$$

La precedente mostra come z_1 sia un semplice integratore di u e z_2 abbia una dinamica asintoticamente stabile (cioè caratterizzata da un autovalore $\lambda = -\frac{\gamma}{m}$ con parte reale negativa e quindi da risposte libere tutte convergenti a zero). Ora, siccome dopo $2T$ l'integrale di u è 0, sarà innanzitutto $z_1(2T) = 0$ (e chiaramente anche $z_1(t) = 0$ per ogni $t > 2T$) mentre z_2 andrà a zero asintoticamente (avendo, come detto, una dinamica asintoticamente stabile e un ingresso u che si esaurisce in tempo finito). Andando tutto a zero, è evidente che anche x_1 e x_2, combinazione lineare di z_1 e z_2, vanno a zero asintoticamente.

Si noti che il cambiamento di coordinate indicato non è applicabile nel caso in cui $\gamma = 0$: per questo motivo questo discorso non vale nelle condizioni nominali. In effetti il valore di γ ha conseguenze fondamentali sulle proprietà strutturali della matrice A che cessa di essere diagonalizzabile nel momento in cui γ diventa nullo. Infatti, se $\gamma = 0$, la matrice A presenta un autovalore nullo con molteplicità algebrica due ma con molteplicità geometrica uno, minore cioè di quella algebrica (cosa che, come noto, è indice di una matrice A non diagonalizzabile). Se invece $\gamma \neq 0$, A presenta due autovalori distinti, 0 e $-\frac{\gamma}{m}$, ed è quindi diagonalizzabile.

Osservazione. Si vuole far notare come il ragionamento della continuità della soluzione rispetto ai coefficienti dell'equazione differenziale lineare (1), che pure qualcuno potrebbe addurre, non si può applicare banalmente in questo caso. L'obiezione che potrebbe sorgere spontanea è cioè la seguente: come è possibile che per $\gamma = 0$ il carrello arriva a L mentre per qualsiasi $\gamma > 0$ (anche per esempio per $\gamma = 10^{-1000}$) mi ritrovo che il carrello torna esattamente e sempre a 0? In effetti, la proprietà di continuità invocata vale, ma solo per tempi finiti, cioè, fissato un tempo qualsiasi $\bar{t}$, è vero che per ogni $\varepsilon > 0$ è sempre possibile trovare una perturbazione sufficientemente piccola γ_ε su γ tale che la soluzione $x(\bar{t})$ che ottengo al tempo $\bar{t}$ per $\gamma = 0$ differisce da quella perturbata $\tilde{x}(\bar{t})$ che ottengo (sempre al tempo $\bar{t}$) per ogni $\gamma < \gamma_\varepsilon$ per meno di ε. Ma questo ragionamento non si può estendere anche al limite per t che tende all'infinito. Occorrerebbe una proprietà di continuità uniforme che qui non vale, in quanto il γ_ε non può essere scelto solo in funzione di ε ma va determinato anche in base al valore di $\bar{t}$, divenendo sempre più piccolo, a parità di ε, al crescere di $\bar{t}$.