

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Definizioni e concetti preliminari . . . . .	1
1.2	Obiettivi del corso . . . . .	2
1.3	Possibili situazioni e complicazioni al problema di base . . . . .	3
1.4	Struttura del corso . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Esempio introduttivo: controllo della posizione di un carrello</b>	<b>5</b>
2.1	Controllo a catena APERTA ( <i>open loop, feedforward</i> ) . . . . .	5
2.2	Controllo in catena CHIUSA ( <i>controreazione, feedback, closed loop</i> ) . . . . .	6
2.3	Rappresentazione ingresso-uscita e rappresentazione di stato . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Sistemi lineari e stazionari e loro rappresentazioni</b>	<b>9</b>
3.1	Rappresentazione I-S-U (Ingresso-Stato-Uscita) . . . . .	9
3.2	Rappresentazione I-U (Ingresso-Uscita) . . . . .	9
3.3	Conseguenze delle ipotesi di linearità e stazionarietà . . . . .	10
3.3.1	La linearità e il principio di sovrapposizione degli effetti . . . . .	10
3.3.2	La stazionarietà e l'invarianza rispetto a traslazioni nel tempo . . . . .	11
3.4	Relazione tra le due rappresentazioni . . . . .	11
3.5	Esempio: controllo della temperatura in un ambiente composto da due stanze. . . . .	13
3.5.1	Caso 1 . . . . .	13
3.5.2	Caso 2 . . . . .	15
3.6	Cenni sulla scelta delle variabili di stato . . . . .	18
3.7	Esempi di sistemi lineari e non . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Risposta esplicita nel tempo</b>	<b>21</b>
4.1	La matrice esponenziale . . . . .	21
4.1.1	Alcune proprietà della matrice esponenziale . . . . .	21
4.2	Soluzione esplicita nella rappresentazione di stato . . . . .	22
4.2.1	Causalità . . . . .	22
4.2.2	Principio di sovrapposizione degli effetti . . . . .	22
4.2.3	Risposta libera e forzata . . . . .	22
4.2.4	Prodotto di matrici esponenziali ed inversa di una matrice esponenziale . . . . .	23
4.3	Matrice di transizione dello stato e delle risposte impulsive . . . . .	23
<b>5</b>	<b>La trasformata di Laplace</b>	<b>27</b>
5.1	Richiami sui numeri complessi . . . . .	27
5.2	La trasformata di Laplace . . . . .	29
5.2.1	Proprietà della Trasformata di Laplace . . . . .	29
5.2.2	Trasformata di alcune funzioni di uso corrente . . . . .	30
5.3	Il Teorema del Valore Finale . . . . .	32

5.3.1	Qualche applicazione del Teorema del Valore Finale . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Calcolo delle risposte mediante la trasformata di Laplace e rappresentazioni I-U ed I-S-U equivalenti</b>	<b>35</b>
6.1	Calcolo della risposta nel dominio della trasformata a partire da I-S-U . . . . .	35
6.2	Calcolo della risposta nel dominio della trasformata a partire da I-U . . . . .	37
6.3	Equivalenza di rappresentazioni I-S-U e I-U . . . . .	39
6.3.1	Da I-S-U a I-U . . . . .	40
6.3.2	Da I-U a I-S-U . . . . .	40
6.4	Esempio . . . . .	43
6.5	Calcolo della risposta nel dominio del tempo: la trasformata inversa di Laplace di funzioni razionali strettamente proprie. . . . .	45
6.5.1	Procedura per il calcolo della trasformata inversa di Laplace di funzioni razionali strettamente proprie . . . . .	46
6.6	Esempio di calcolo della risposta a partire da IU e passaggio IU $\rightarrow$ ISU . . . . .	48
6.6.1	Calcolo della risposta a partire da condizioni iniziali nulle . . . . .	48
6.6.2	Calcolo della risposta a partire da condizioni iniziali non nulle . . . . .	49
6.6.3	Passaggio alla rappresentazione ISU . . . . .	50
6.7	Trasformata inversa di Laplace di funzioni razionali strettamente proprie: il caso di poli complessi . . . . .	50
6.8	Esercizio . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Cambiamenti di coordinate nello spazio di stato e analisi modale</b>	<b>55</b>
7.1	Cambiamenti di coordinate . . . . .	55
7.1.1	Effetti del cambiamento di coordinate sulle matrici di transizione dello stato e sulle matrici (o funzioni) delle risposte impulsive nello stato e nell'uscita . . . . .	56
7.1.2	Effetti del cambiamento di coordinate sulle trasformate di Laplace delle matrici di transizione dello stato e sulle matrici (o funzioni) delle risposte impulsive nello stato e nell'uscita . . . . .	56
7.2	Analisi modale . . . . .	58
7.2.1	Qualche richiamo di algebra lineare . . . . .	58
7.2.2	Decomposizione spettrale . . . . .	59
7.2.3	Il caso planare . . . . .	61
7.2.4	Osservabilità ed eccitabilità dei modi . . . . .	64
7.3	Esempio sull'Analisi Modale . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Sistemi a tempo discreto</b>	<b>73</b>
8.1	Introduzione . . . . .	73
8.1.1	Obiettivi . . . . .	74
8.2	Calcolo della risposta: soluzione esplicita della risposta libera e forzata nello stato e nell'uscita . . . . .	74
8.3	Calcolo della risposta nello stato e in uscita: la trasformata Zeta . . . . .	75
8.3.1	Trasformata di alcune funzioni di uso corrente . . . . .	75
8.3.2	Alcune proprietà della trasformata Zeta . . . . .	76
8.3.3	Ulteriori trasformate Zeta . . . . .	77
8.3.4	Trasformata Zeta inversa . . . . .	79
8.3.5	Uso della trasformata Zeta per il calcolo della risposta . . . . .	79
8.3.6	Cenni all'analisi modale e ai sistemi a segnali campionati . . . . .	80
8.3.7	Esempio completo di calcolo della risposta . . . . .	81
8.3.8	Antitrasformazione con poli complessi . . . . .	83

<b>9</b>	<b>Risoluzione di alcuni esercizi su: calcolo della trasformata diretta e inversa di Laplace, funzioni di trasferimento, calcolo della risposta</b>	<b>85</b>
9.1	Trasformata diretta di Laplace . . . . .	85
9.1.1	$y_8(t) = t e^{-t} \sin(3t) \delta_{-1}(t)$ . . . . .	85
9.1.2	$y_4(t) = (t - 2)^3 \delta_{-1}(t)$ . . . . .	85
9.1.3	$y_{10}(t) = e^{3t} \delta_{-1}(t - 1)$ . . . . .	85
9.1.4	$y_6(t) = \sin(10t + 5) \delta_{-1}(t)$ . . . . .	86
9.1.5	$y_7(t) = t \cos(2\pi t) \delta_{-1}(t)$ . . . . .	86
9.2	Trasformata inversa di Laplace . . . . .	86
9.2.1	$F_1(s) = \frac{1}{s^2+2}$ . . . . .	86
9.2.2	$F_2(s) = \frac{s+1}{4s^2+\pi^2}$ . . . . .	87
9.2.3	$F_4(s) = \frac{s^2+3}{(s+2)(s+1)^2}$ . . . . .	87
9.2.4	$F(s) = [F_1(s)]^2 = \frac{1}{(s^2+2)^2}$ . . . . .	88
9.2.5	$F_5(s) = \frac{7s^2-8s+5}{s^3+2s^2+5s}$ . . . . .	89
9.3	Funzioni di trasferimento . . . . .	90
9.4	Esercizi di calcolo della risposta a partire dalla rappresentazione IU . . . . .	91
9.4.1	Esercizio (vii) del file risp.pdf riportato nella sezione Esercizi del sito del corso . . . . .	91
9.4.2	Esercizio (ix) del file risp.pdf riportato nella sezione Esercizi del sito del corso . . . . .	93



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Definizioni e concetti preliminari

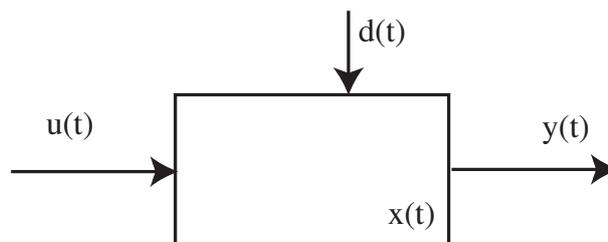
Con il termine *controllo* indichiamo in questo corso, in modo molto generale, *l'azione o l'insieme di azioni indirizzate a far assumere a un sistema un comportamento desiderato*.

Indichiamo con il termine di *sistema dinamico* (o semplicemente sistema) un'entità caratterizzata da un'evoluzione temporale, che ci interessa abbia un comportamento desiderato e la rappresenteremo con un rettangolo come riportato in figura 1.1. Per fare qualche esempio e per fissare le idee, per noi un sistema può essere una centrale termica, nucleare, un forno, un impianto manifatturiero, un'automobile, un satellite artificiale, un robot, l'insieme dei titoli della borsa, una popolazione batterica, un organismo biologico, una rete di calcolatori, una rete di telecomunicazioni, internet, ecc.

Un sistema viene descritto da una serie di grandezze che evolvono nel tempo. Queste possono essere distinte in:

- *Variabili di stato*, indicate generalmente con  $x(t)$ , dove  $x(t) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  (la necessità di usare  $\bar{n}$  invece di  $n$  sarà chiarita nel seguito), costituiscono l'insieme di variabili che contengono tutte le informazioni necessarie per conoscere la situazione attuale del sistema e quindi per poterne prevedere (unitamente al modello matematico e alla conoscenza dell'ingresso che verrà applicato) tutta l'evoluzione futura;
- *Variabili di uscita*, indicate generalmente con  $y(t)$ , dove  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ , costituiscono l'insieme di variabili direttamente misurabili del sistema e/o che interessa abbiano un andamento nel tempo desiderato (tipicamente tutte le variabili che interessa abbiano un andamento desiderato sono anche misurate);
- *Variabili di ingresso* (o di *controllo*), indicate generalmente con  $u(t)$ , dove  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ , costituiscono l'insieme di variabili che possono essere impostate dal controllista;
- *Variabili di disturbo*, indicate generalmente con  $d(t)$ , dove  $d(t) \in \mathbb{R}^l$ , costituiscono delle variabili non manipolabili e, generalmente, neanche misurabili, che agiscono sul sistema.

Per fissare le idee, se il nostro sistema è un'automobile, saranno per esempio segnali di ingresso  $u(t)$  la quantità di carburante che mediante l'acceleratore faremo arrivare al motore, la forza frenante impartita mediante il freno, l'angolo di sterzata impostato tramite il volante.



**Figura 1.1:** Un sistema dinamico con evidenziate le variabili di ingresso, di stato, di uscita e di disturbo

Le variabili di uscita  $y(t)$ , che ci interessa abbiano un andamento desiderato nel tempo  $y_d(t)$ , potrebbero essere in questo caso la posizione e la velocità assunta dall'automobile. In questo caso (ma non è sempre così) le variabili di uscita coincidono con alcune delle variabili di stato  $x(t)$ . Il vettore di stato  $x(t)$  può però comprendere tutta una serie di variabili aggiuntive (oltre a posizione e velocità) quali per esempio il contenuto del serbatoio, la temperatura del motore, la carica elettrica presente nella batteria, e via dicendo. In generale però, come verrà accennato nel seguito, è compito dell'ingegnere controllista individuare l'insieme più semplice di variabili di stato che permetta di costruire un modello (e quindi una legge di controllo) soddisfacente in relazione alle specifiche che si vogliono ottenere. Così, in questo caso, per esempio, la temperatura del motore potrebbe non essere necessaria a modellare il sistema automobile, ai fini di chi deve progettare una legge di controllo ad alto livello volta a guidare il veicolo (ossia indirizzata a scegliere la spinta sui pedali del freno e dell'acceleratore e il comando di sterzo per raggiungere un determinato luogo con certi vincoli sulle velocità e sulle posizioni via via raggiunte).

Il legame funzionale generale che caratterizza l'evoluzione dinamica di un sistema può essere scritto nel seguente modo:

$$\dot{x} = f[x(t), u(t)] \quad (1.1)$$

$$y(t) = h[x(t), u(t)] \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

dove  $f$  e  $h$  sono opportune funzioni e  $x_0$  è il valore iniziale del vettore di stato  $x(t)$ . Altri tipi di rappresentazione sono possibili come verrà spiegato nel corso.

## 1.2 Obiettivi del corso

Il problema del controllo, obiettivo di questo corso (e in generale della Teoria dei Controlli Automatici), è quello di trovare una legge di controllo  $u(t)$  che garantisca un certo comportamento desiderato per il sistema. Tipicamente richiederemo:

- la *stabilità*, definita più rigorosamente nel seguito, che corrisponde sinteticamente e approssimativamente all'idea che tutte le variabili di stato rimangano limitate per ogni  $t$ ;
- l'*inseguimento* da parte di  $y(t)$  di un segnale desiderato  $y_d(t)$ , con una determinata *precisione a regime* e un determinato *comportamento transitorio*.

Come fase preliminare alla *sintesi* di un controllore si introdurranno *strumenti di analisi* (calcolo della risposta, valutazione della stabilità) che rivestono comunque un'importanza fondamentale anche come argomento fine a se stesso (per esempio per prevedere l'evoluzione di un sistema dinamico, libera o a fronte di una particolare grandezza forzante). Gli *strumenti di analisi* verranno portati avanti anche per i sistemi a tempo discreto, quelli cioè descritti da equazioni alle differenze anziché da equazioni differenziali:

$$x(k+1) = f[x(k), u(k)] \quad (1.4)$$

$$y(k) = h[x(k), u(k)] \quad (1.5)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.6)$$

dove  $k \in \mathbb{Z}$ . Tali sistemi possono risultare da un campionamento di quelli a tempo continuo definiti in precedenza o, come verrà descritto più avanti, modellare sistemi intrinsecamente discreti, naturali o artificiali.

Non rientra tra gli obiettivi del presente corso la sintesi di controllori per sistemi dinamici a tempo discreto, argomento che verrà trattato in corsi successivi.

### 1.3 Possibili situazioni e complicazioni al problema di base

Le funzioni  $f$  e  $h$  possono essere più o meno complicate, e potrebbero anche cambiare nel tempo. In questo corso studieremo solamente il caso si tratti di funzioni *lineari* e *stazionarie*, ma questa è solo una situazione che approssima una realtà molto più complessa.

Il problema del controllo è molto più complesso se le variabili di uscita e quelle di controllo sono più di una: in questo corso ci occuperemo del solo caso scalare ( $p = q = 1$ ).

Le funzioni  $f$  e  $h$  possono essere (e sono nella pratica) note solo con una certa approssimazione: in questo corso si supporranno esattamente note, cosa che nella pratica non accade mai. Una legge di controllo progettata in modo da funzionare quando il modello presenti incertezze e/o segnali di disturbo  $d(t)$  appartenenti a una certa classe viene detta *robusta*.

Una legge di controllo invece che modifica se stessa per far fronte a una variazione temporale delle funzioni  $f$  e  $h$ , oppure per essere in grado di controllare un impianto in cui  $f$  e  $h$  non sono note, viene detta *adattativa*. In questo caso la legge di controllo può presupporre la presenza di un blocco che identifica le funzioni  $f$  e  $h$ , approssimandole dentro una classe di funzioni prestabilite.

In una buona parte del corso si assumerà assente il segnale di disturbo  $d(t)$ . Qualora presente, considereremo solo segnali di disturbo scalari, costanti o sinusoidali. Nella realtà però, i segnali di disturbo potrebbero essere anche non deterministici: in questo caso si parla di *controllo stocastico*. La componente stocastica nei Controlli Automatici ha un ruolo rilevante dal punto di vista applicativo quando, oltre alla presenza di componenti stocastiche nell'evoluzione dinamica del sistema, si assume anche che le misure  $y(t)$  siano soggette ad errori. Opportuni algoritmi di filtraggio vanno definiti in questo caso per stimare nel modo migliore possibile lo stato del sistema (il filtro di Kalman, ampiamente utilizzato in moltissime applicazioni, è uno dei possibili strumenti per fare questo) e per poter quindi applicare in modo opportuno una legge di controllo. Questo non rientra comunque negli obiettivi di questo corso.

A prescindere dagli errori di misura, le informazioni presenti nel segnale di uscita possono o meno essere sufficienti per risalire al valore dello stato così come non è detto esista sempre una legge di controllo  $u(t)$  in grado di modificare a piacimento il vettore di stato. Queste proprietà sono rispettivamente note come *osservabilità* e *raggiungibilità* del sistema. Verranno solo accennate nel corso, quando necessario ai fini dell'obiettivo principale che ci siamo proposti.

Vogliamo infine far notare molto brevemente che i sistemi dinamici possono essere classificati ulteriormente anche in base al tipo di dinamica che li caratterizza. Distinguiamo in particolare tra sistemi con *dinamica continua* e sistemi con *dinamica a eventi*. Nel caso di dinamica continua distinguiamo, come già anticipato nella Sez. 1.2, tra quelli a *tempo continuo* (che sono quelli cui si è fatto riferimento in questa introduzione, la cui evoluzione è descritta mediante equazioni del tipo riportato in (1.1)-(1.3)) e quelli a *tempo discreto* (con evoluzione temporale descritta mediante equazioni del tipo riportato in (1.4)-(1.6)) a cui si farà riferimento più avanti nel corso. I sistemi a eventi sono invece caratterizzati da un'evoluzione temporale in cui lo stato cambia a causa di eventi asincroni. Infine, vengono spesso indicati come *ibridi* quei sistemi caratterizzati sia da una componente continua sia da una componente ad eventi che interagiscono tra di loro in vari modi. Questo tipo di sistemi ha una rilevanza notevole in molte applicazioni moderne della teoria del controllo.

## 1.4 Struttura del corso

In questo corso si considereranno solo sistemi lineari e stazionari, con un solo ingresso e una sola uscita, in cui le funzioni  $f$  e  $h$  sono note senza incertezze, con, eventualmente, segnali di disturbo che sono funzioni del tempo costanti o sinusoidali.

Il corso seguirà di massima questi passi:

- (i) Prima parte del corso: definizione e proprietà dei sistemi lineari stazionari, loro rappresentazioni e calcolo della risposta (a tempo continuo e a tempo discreto).
  - Definizione della classe dei modelli considerati, cioè di  $f$  e  $h$ : si definiranno in particolare i sistemi *lineari e stazionari* a tempo continuo.
  - Possibili rappresentazioni matematiche di un sistema lineare stazionario e loro equivalenza.
  - Soluzione in forma esplicita, trasformazione di coordinate e analisi modale.
  - Il *calcolo della risposta* nello stato e nell'uscita (cioè di  $x(t)$  e  $y(t)$ ) a fronte di un certo segnale di ingresso assegnato  $u(t)$  e di una certa condizione iniziale  $x_0$  mediante trasformata di Laplace.
  - Sistemi a tempo discreto: soluzione esplicita e calcolo della risposta mediante trasformata Zeta.
  
- (ii) Seconda parte del corso: definizione della stabilità, criteri per valutarla e metodologie di sintesi del controllore (solo per sistemi a tempo continuo).
  - Definizione di *stabilità* e di *punto di equilibrio*, con particolare riferimento ai sistemi lineari e stazionari a tempo continuo, stabilità interna ed esterna.
  - Criterio di Routh per verificare la stabilità di un sistema lineare stazionario a tempo continuo.
  - Effetti della connessione di sistemi dinamici.
  - Risposta armonica, diagrammi di Bode e criterio di Nyquist.
  - Il problema della sintesi, cioè come determinare  $u(t)$  per ottenere stabilità, precisione e transitorio soddisfacente.
  - Il luogo delle radici per valutare la stabilità di un sistema.

## Capitolo 2

### Esempio introduttivo: controllo della posizione di un carrello

Si consideri un carrello su una rotaia in piano e si indichi con  $s(t)$  e  $v(t)$  posizione e rispettivamente velocità al tempo  $t$ . Il carrello è posto in quiete e nell'origine a  $t = 0$  (cioè  $s(0) = s_0 = 0$  e  $v(0) = v_0 = 0$ ).

L'equazione del moto è:

$$m \ddot{s} + f \dot{s} = u \quad (2.1)$$

dove  $m$  è la massa del carrello,  $f$  l'attrito che esso incontra durante il suo moto,  $u$  la forza applicata che rappresenta nel nostro caso l'ingresso o grandezza di controllo.

L'obiettivo è quello di far arrivare il carrello entro un certo tempo ragionevolmente breve in una posizione desiderata  $s_f = 100m$  con precisione elevata, senza mai oltrepassare (né prima né dopo il tempo finale) tale posizione e con un moto sufficientemente regolare.

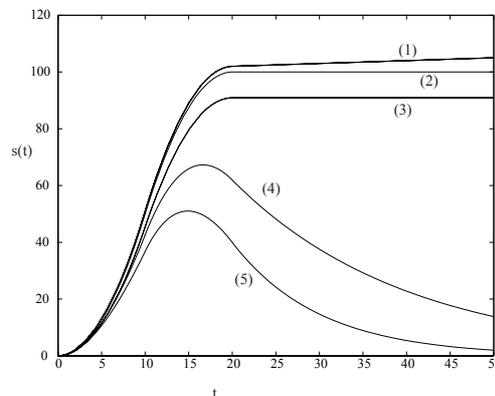
#### 2.1 Controllo a catena APERTA (*open loop, feedforward*)

Supponiamo che l'attrito sia trascurabile ( $f = 0$ ) e consideriamo la seguente legge di controllo a catena aperta:

$$u(t) = \begin{cases} F & t \in (0, T) \\ -F & t \in (T, 2T) \\ 0 & t > 2T \end{cases} \quad (2.2)$$

Se il carrello pesa  $m = 1kg$ , scegliendo la legge di controllo (2.2) con  $T = 10s$  e  $F = 1N$ , effettivamente si arriva nella posizione desiderata  $s_f = 100m$  dopo un tempo di 20 secondi, come mostrato nel tracciato (2) in Fig. 2.1. Si ha infatti, con questa legge di controllo:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{F}{2m} t^2 & t \in (0, T) \\ \frac{F}{2m} (-2T^2 + 4Tt - t^2) & t \in (T, 2T) \\ \frac{F}{m} T^2 & t > 2T \end{cases}$$



**Figura 2.1:** Controllo a catena aperta: (1)  $v_0 = 0.1 \neq 0$ ; (2) nominale; (3)  $m = 1.1kg$ ; (4)  $f = 0.05$ ; (5)  $f = 0.1$

La traiettoria è soddisfacente: arriviamo esattamente nel punto desiderato, senza mai oltrepassarlo, in un tempo ragionevole (minimo se  $|F| = 1N$  è la forza massima applicabile), con una traiettoria regolare. Tuttavia, qualsiasi imprevisto che ci allontana dalle condizioni nominali, ci porta a un comportamento indesiderato:

- se la velocità iniziale è leggermente positiva, con questo controllo il carrello continua a muoversi indefinitamente arrivando a valori illimitati per  $t \rightarrow \infty$  (vedi (1) in Fig 2.1);
- se la massa è leggermente diversa da quella nominale, per esempio  $m = 1.1kg$ , il carrello arriva in un punto finale circa pari a  $90.9m$ , minore del valore desiderato (vedi (3) in Fig 2.1);
- se c'è un attrito diverso da 0, per esempio  $f = 0.05$ , la traiettoria è la (4) in Fig 2.1, e il carrello torna nell'origine per  $t \rightarrow \infty$ , come è possibile dimostrare;
- come il punto precedente ma con  $f = 0.1$  (vedi (5) in Fig 2.1).

Un altro problema è che difficilmente nella pratica il tempo di accelerazione  $T$  è esattamente uguale a quello di frenata, col risultato che il carrello presenterà ragionevolmente una velocità non nulla al termine dell'azione di controllo, che lo allontanerà dalla posizione desiderata (indefinitamente se  $f = 0$ ).

Tutti questi problemi sono tipici di un controllo in catena aperta che non tiene in nessun conto degli effetti reali ottenuti sul sistema dal controllo che si sta applicando.

## 2.2 Controllo in catena CHIUSA (*controreazione, feedback, closed loop*)

Scegliamo ora una legge di controllo che tiene conto dell'osservazione continua di posizione e velocità del carrello:

$$u(t) = -k(s(t) - s_f) - b\dot{s} \quad (2.3)$$

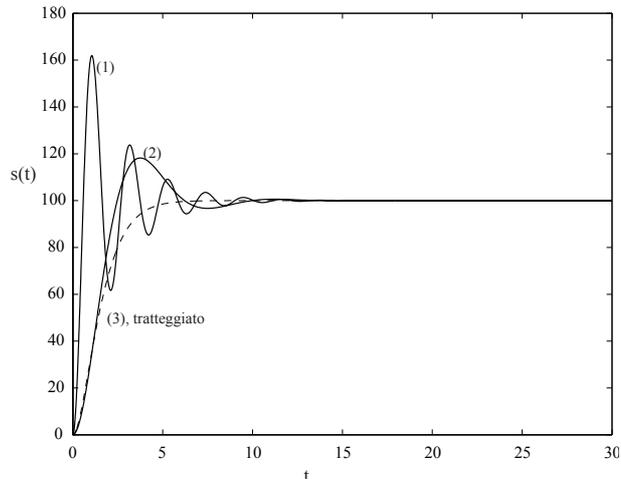
La parte  $k(s(t) - s_f)$ , detta *proporzionale*, svolge la funzione di richiamare come una molla il carrello verso la posizione desiderata; la parte  $b\dot{s}$ , detta *derivativa*, agisce sul moto del carrello come un attrito che attenua o elimina del tutto le oscillazioni attorno alla posizione desiderata. Il comportamento, nelle condizioni nominali, per diverse scelte di  $k$  e  $b$  è riportato in Fig. 2.2.

Un buon comportamento si ottiene per esempio per  $k = 1.5$  e  $b = 2.5$  (tracciato (3) in Fig. 2.2), valori che danno origine a *modi smorzati senza oscillazioni*<sup>1</sup>. In realtà il carrello tende al valore desiderato solo asintoticamente, ma già dopo 8 secondi la posizione del carrello differisce da quella desiderata per meno del 4 per diecimila<sup>2</sup>.

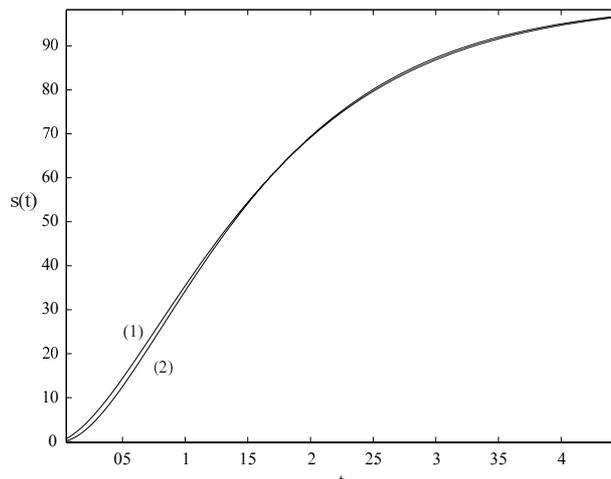
Una legge di controllo in catena chiusa si comporta molto meglio in presenza di disturbi come quelli visti in precedenza. Scegliendo per esempio la (2.3) con  $k = 1.5$  e  $b = 2.5$ , le varie traiettorie corrispondenti ai disturbi riportati prima, sono praticamente indistinguibili da quella nominale. A titolo di esempio, riportiamo il confronto tra traiettoria nominale e quella corrispondente al caso in cui tutti i disturbi agiscano *contemporaneamente* ( $f = 0.1$ ,  $m = 1.1kg$ , e una  $v_0 = 10m/s$  ben maggiore di quella considerata nella perturbazione del caso precedente). Le due traiettorie (nominale e perturbata) risultano praticamente indistinguibili, e solo ingrandendo l'evoluzione nei primi istanti si nota una piccola differenza (cfr. Fig. 2.3).

<sup>1</sup>Tali concetti verranno introdotti nel corso

<sup>2</sup>C'è da dire che i valori di  $u$  risultanti da questo controllo sono molto maggiori in modulo di 1, il valore massimo utilizzato dal controllo a catena aperta: per questo motivo il tempo per arrivare all'obiettivo risulta minore in questo caso.



**Figura 2.2:** Controllo in catena chiusa in condizioni nominali: (1)  $k = 10$ ,  $b = 1$ ; (2)  $k = 1$ ,  $b = 1$ ; (3)  $k = 1.5$ ,  $b = 2.5$  (tratteggiato)



**Figura 2.3:** Controllo in catena chiusa in condizioni perturbate: traiettoria nominale (2) e perturbata (1)

## 2.3 Rappresentazione ingresso-uscita e rappresentazione di stato

Il sistema descritto sopra è un sistema lineare (concetto definito nel corso). Vedremo nel corso che uno stesso sistema lineare può essere descritto con una *rappresentazione ingresso-uscita*, che è quella riportata in (2.1), dove l'ingresso è la variabile di controllo  $u$  e l'uscita è la posizione del carrello, che interessa controllare. Questa rappresentazione è costituita da un'equazione differenziale nelle variabili di ingresso e di uscita. Il sistema carrello può però anche essere descritto con una *rappresentazione di stato*. Per fare ciò occorre innanzitutto individuare le *variabili* che descrivono lo *stato* del carrello (tali variabili sono dette appunto variabili di stato, e il modo con cui sceglierle in generale verrà accennato nel corso). In questo caso le variabili di stato sono la posizione  $s$  e la velocità  $v = \dot{s}$  del carrello. Sia  $x$  il vettore delle variabili di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$$

Allora, la dinamica del carrello nella rappresentazione nello spazio di stato diventa:

$$\dot{x} = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

dove  $A, B, C, D$  sono matrici opportune, dette rispettivamente: *matrice dinamica*, *matrice di ingresso*, *matrice di uscita* e *legame diretto ingresso-uscita*. Nel caso del carrello,  $x \in \mathbb{R}^2$ , e tali matrici hanno la seguente forma<sup>3</sup>:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{m} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$C = [ 1 \quad 0 ]$$

$$D = 0$$

In generale, nel caso di sistemi con una sola variabile di ingresso ( $u \in \mathbb{R}$ ), una sola variabile di uscita ( $y \in \mathbb{R}$ ), e  $x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ,  $A$  è una matrice quadrata  $\bar{n} \times \bar{n}$ ,  $B$  è  $\bar{n} \times 1$ ,  $C$  è  $1 \times \bar{n}$  e  $D$  è uno scalare ( $D \in \mathbb{R}$ ).

Il modo di passare in generale da una rappresentazione all'altra sarà argomento del corso.

---

<sup>3</sup>N.B. La scelta delle variabili di stato indicata, e quindi delle matrici  $A, B, C$  e  $D$ , non è univoca

## Capitolo 3

### Sistemi lineari e stazionari e loro rappresentazioni

In questo corso si considera una particolare classe di sistemi dinamici, che è quella dei sistemi *lineari e stazionari*. Il motivo di ciò è duplice: innanzitutto la trattazione analitica di questi sistemi è più semplice ed è perciò propedeutica per studi più avanzati. Inoltre, molti problemi reali possono essere approssimati, intorno ad un opportuno punto di equilibrio, da una dinamica di tipo lineare e stazionario.

#### 3.1 Rappresentazione I-S-U (Ingresso-Stato-Uscita)

La rappresentazione I-S-U generale di un sistema dinamico è del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, u, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

dove  $x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  e si è messa in luce anche la possibile dipendenza esplicita dal tempo nelle funzioni  $f$  e  $h$ . Un esempio di ciò è quello di un circuito elettrico dove il legame tra tensione applicata (ingresso) e corrente ottenuta (uscita) cambia per l'invecchiamento dei componenti del circuito, ossia per esempio, una resistenza ha un valore  $R = R(t)$  che varia nel tempo. Nel caso lineare e stazionario, la rappresentazione I-S-U assume la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

dove la linearità consiste nel fatto che le funzioni  $f$  e  $h$  sono funzioni lineari di  $x$  e  $u$ , mentre la stazionarietà risiede nel fatto che le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sono costanti nel tempo. Come anticipato nell'esempio della sezione precedente, le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sono dette rispettivamente: *matrice dinamica*, *matrice di ingresso*, *matrice di uscita* e *legame diretto ingresso-uscita*. Le loro dimensioni nel caso generale in cui  $x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ,  $y \in \mathbb{R}^q$  e  $u \in \mathbb{R}^p$  sono rispettivamente  $\bar{n} \times \bar{n}$ ,  $\bar{n} \times p$ ,  $q \times \bar{n}$  e  $q \times p$ . In questo corso, in cui  $u$  e  $y$  sono scalari (cioè  $q = p = 1$ ), si ha quindi che  $A \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{n}}$  e  $D \in \mathbb{R}$ .

#### 3.2 Rappresentazione I-U (Ingresso-Uscita)

La rappresentazione I-U generale di un sistema dinamico è del tipo:

$$\begin{cases} g(y(t), \dot{y}, y^{(2)}(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dot{u}, u^{(2)}(t), \dots, u^{(m)}(t), t) = 0 \\ y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}, i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.3)$$

dove  $y^{(i)}(t) := d^i y / dt^i$  è la derivata di ordine  $i$  dell'uscita,  $u^{(j)}(t) := d^j u / dt^j$  è la derivata di ordine  $j$  dell'ingresso e anche qui si è messa in luce la possibile dipendenza esplicita dal tempo della funzione  $g$ . Nel caso lineare e stazionario, la rappresentazione I-U assume la seguente

forma:

$$\begin{cases} a_0y(t) + a_1\dot{y} + a_2y^{(2)}(t) + \dots + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + y^{(n)}(t) = b_0u(t) + b_1\dot{u} + b_2u^{(2)}(t) + \dots \\ + b_mu^{(m)}(t), \\ y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}, i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.4)$$

dove la linearità consiste nel fatto che la funzione  $g$  è una combinazione lineare dell'ingresso, dell'uscita e delle loro derivate, mentre la stazionarietà risiede nel fatto che tutti i coefficienti  $a_i$  e  $b_j$  sono costanti nel tempo. Si noti che la costante che moltiplica  $y^{(n)}(t)$  è stata considerata pari ad 1: questo è senza perdita di generalità. Infatti, se l'equazione è di ordine  $n$ , significa che il coefficiente  $a_n$  che moltiplica  $y^{(n)}(t)$  è diverso da zero (altrimenti l'equazione sarebbe di ordine minore di  $n$ ). Ma allora basta dividere tutta l'equazione per  $a_n$  (ribattezzando i coefficienti) per ottenere un'espressione del tipo riportato in (3.4).

Perché la rappresentazione I-U indicata sia quella di un sistema fisico realmente esistente, deve valere la seguente condizione di *causalità*:

$$n \geq m.$$

Se ciò non valesse, per esempio se fosse  $n = 0$  e  $m = 1$ , cioè per esempio  $y = \dot{u}$ , si avrebbe:

$$y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

da cui si evince come l'uscita al tempo  $t$  dipenda da valori futuri dell'ingresso. Se partendo da un sistema fisico si arriva a un legame I-U con  $n < m$ , significa che il modello che abbiamo scritto non è sufficientemente accurato e sono state introdotte approssimazioni non trascurabili. Nel seguito del corso faremo l'ulteriore ipotesi che i due polinomi:

$$p_a(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$$

e

$$p_b(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m$$

sono primi tra loro. Questo non cambia la sostanza delle cose (il legame I-U rimane inalterato se eventuali fattori comuni sono rimossi da una rappresentazione I-U del tipo indicato) ma semplifica alcuni discorsi che verranno fatti successivamente.

### 3.3 Conseguenze delle ipotesi di linearità e stazionarietà

La definizione di linearità e stazionarietà introdotta pocanzi comporta alcune conseguenze di capitale importanza. Le illustriamo con riferimento alla rappresentazione I-S-U (3.2), ma un discorso del tutto analogo vale per la rappresentazione I-U (3.4).

#### 3.3.1 La linearità e il principio di sovrapposizione degli effetti

La linearità di un sistema dinamico implica la validità del *principio di sovrapposizione degli effetti*. Facciamo due esperimenti: (i) partendo da condizioni iniziali nulle  $x_0 = 0$ , applichiamo un ingresso  $u_a(t)$ : otterremo una *risposta*<sup>1</sup> nello stato e nell'uscita rispettivamente  $x_a(t)$  e  $y_a(t)$ ;

<sup>1</sup>Per risposta nello stato (rispettivamente nell'uscita) di un sistema a un certo ingresso e a partire da certe condizioni iniziali si intende la soluzione nello stato (rispettivamente nell'uscita) di (3.2) relativamente a quel dato ingresso e a quelle date condizioni iniziali.

(ii) partendo sempre da condizioni iniziali nulle  $x_0 = 0$ , applichiamo ora un ingresso  $u_b(t)$ : otterremo una *risposta* nello stato e nell'uscita rispettivamente  $x_b(t)$  e  $y_b(t)$ . Se ora applichiamo (sempre da condizioni iniziali nulle) un ingresso combinazione lineare dei due precedenti, ossia  $u(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$ , otterremo come risposta nello stato e nell'uscita rispettivamente:  $x(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$  e  $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$ .

Analogamente, consideriamo i seguenti due esperimenti: (i) poniamo a 0 l'ingresso e partiamo da condizioni iniziali  $x_{0a}$ : otterremo una *risposta* nello stato e nell'uscita rispettivamente  $x_a(t)$  e  $y_a(t)$ ; (ii) poniamo a 0 l'ingresso e partiamo ora da condizioni iniziali  $x_{0b}$ : otterremo una *risposta* nello stato e nell'uscita rispettivamente  $x_b(t)$  e  $y_b(t)$ . Se ora partiamo da condizioni iniziali (sempre supponendo nullo l'ingresso) che sono combinazione lineare delle due condizioni iniziali precedenti, ossia  $x_0 = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$ , otterremo come risposta nello stato e nell'uscita rispettivamente:  $x(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$  e  $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$ . Se sono diversi da zero sia l'ingresso sia le condizioni iniziali, avremo una sovrapposizione degli effetti se consideriamo la stessa combinazione lineare sia per gli ingressi sia per le condizioni iniziali, cioè: (i) sia  $x_a(t)$  e  $y_a(t)$  la risposta rispettivamente nello stato e nell'uscita a partire da condizioni iniziali  $x_{0a}$  e avendo applicato un ingresso  $u_a(t)$ ; (ii) sia  $x_b(t)$  e  $y_b(t)$  la risposta rispettivamente nello stato e nell'uscita a partire da condizioni iniziali  $x_{0b}$  e avendo applicato un ingresso  $u_b(t)$ . Allora avremo come risposta rispettivamente nello stato e nell'uscita  $x(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$  e  $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$  se avremo applicato un ingresso del tipo:  $u(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$  e saremo partiti da  $x_0 = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$ . Questa apparente complicazione della *stessa* combinazione lineare nell'ingresso e nelle condizioni iniziali viene meno nella pratica perché, se considero sistemi stabili, la risposta libera (quella cioè che dipende dalle condizioni iniziali) diviene trascurabile dopo un certo tempo.

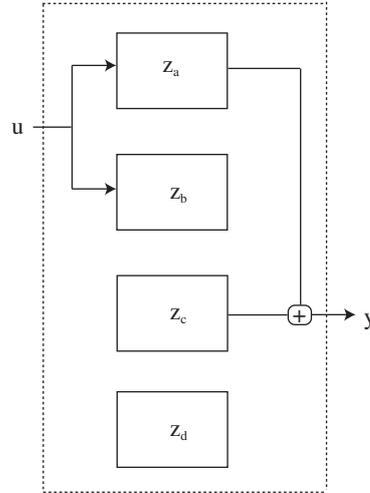
### 3.3.2 La stazionarietà e l'invarianza rispetto a traslazioni nel tempo

L'ipotesi di stazionarietà di un sistema dinamico implica la validità del *principio di invarianza rispetto a traslazioni nel tempo*. Supponiamo di partire al tempo 0 da certe condizioni iniziali  $x(0) = x_0$  e applichiamo un ingresso  $u(t)$ . Otterremo una risposta rispettivamente nello stato e nell'uscita  $x(t)$  e  $y(t)$ . Supponiamo ora di partire al tempo  $t_0 \neq 0$  dalle stesse condizioni iniziali  $x(t_0) = x_0$  e applichiamo un ingresso  $u(t - t_0)$  (cioè lo stesso di prima ma traslato di  $t_0$ ). Otterremo come risposta rispettivamente nello stato e nell'uscita  $x(t - t_0)$  e  $y(t - t_0)$ , ossia le stesse di prima ma traslate di  $t_0$ .

## 3.4 Relazione tra le due rappresentazioni

Per uno stesso sistema lineare e stazionario, sono sempre possibili entrambe le rappresentazioni I-S-U e I-U e vedremo più avanti come si passa da I-S-U a I-U e viceversa. Vogliamo ora solo fare qualche osservazione sulla relazione che sussiste tra la dimensione  $\bar{n}$  dello stato nella rappresentazione I-S-U di (3.2) di un certo sistema e l'ordine massimo  $n$  della derivata dell'uscita nella sua rappresentazione I-U (3.4). Se guardiamo l'esempio fatto in precedenza (carrello) notiamo che  $\bar{n} \equiv n$  ( $\bar{n} \equiv n = 2$ ). Ci chiediamo: vale sempre  $\bar{n} \equiv n$ ? La risposta è no, in realtà  $\bar{n} \geq n$ . Come mai? Cosa denota il caso  $\bar{n} \equiv n$  e cosa denota il caso  $\bar{n} > n$ ?

Il fatto che possa aversi per un certo sistema  $n < \bar{n}$  capita perché alcune parti dello spazio di stato del sistema (alcuni sottospazi) possono o non essere raggiunte dall'ingresso o non influenzare l'uscita e quindi non concorrere alla rappresentazione I-U del sistema, che riguarda solo la parte che è sia raggiungibile dall'ingresso e sia osservabile in uscita. Più precisamente, tutto lo



**Figura 3.1:** Rappresentazione grafica delle proprietà di raggiungibilità e osservabilità

spazio di stato può essere scomposto in quattro sottospazi (non tutti sempre presenti):

$$\mathbb{R}^{\bar{n}} = X_a \oplus X_b \oplus X_c \oplus X_d$$

dove  $X_a$  = sottospazio raggiungibile e osservabile,  $X_b$  = sottospazio raggiungibile non osservabile,  $X_c$  = sottospazio osservabile non raggiungibile e  $X_d$  = sottospazio non osservabile e non raggiungibile. Questi sottospazi hanno intersezione nulla. Sia  $n_a, n_b, n_c, n_d$  la dimensione di  $X_a, X_b, X_c, X_d$ , rispettivamente, con  $n_a + n_b + n_c + n_d = \bar{n}$ . Se considero un opportuno cambiamento di coordinate  $z = Tx$ , i primi  $n_a$  elementi del nuovo vettore di stato  $z$  sono relativi a  $X_a$  e li indichiamo con  $z_a$ , gli elementi da  $n_a + 1$  a  $n_a + n_b$  sono relativi a  $X_b$  e li indichiamo con  $z_b$ , gli elementi da  $n_a + n_b + 1$  a  $n_a + n_b + n_c$  sono relativi a  $X_c$  e li indichiamo con  $z_c$ , gli elementi da  $n_a + n_b + n_c + 1$  a  $n_a + n_b + n_c + n_d$  sono relativi a  $X_d$  e li indichiamo con  $z_d$ . Ora, l'ingresso  $u$  influenza (ossia modifica) solo il valore di  $z_a$  e  $z_b$  mentre non ha effetto su  $z_c$  e  $z_d$ . Ancora, vale che qualunque punto dei sottospazi  $X_a$  e  $X_b$  può essere raggiunto con un ingresso  $u$  opportuno, mentre nessun movimento è possibile mediante  $u$  all'interno degli altri due sottospazi. Analogamente, l'uscita  $y$  dipende solo dalle componenti  $z_a$  e  $z_c$  mentre le componenti  $z_b$  e  $z_d$  non hanno effetto sull'uscita. Ancora, vale che osservando l'uscita posso risalire a tutti i movimenti avvenuti nei sottospazi  $X_a$  e  $X_c$  ma non a quelli avvenuti in  $X_b$  e  $X_d$ . Il discorso precedente è rappresentato graficamente in Fig. 3.1 dove le frecce indicano che una certa variabile influisce sui valori che assume un'altra<sup>2</sup>.

Quello che accade è che il legame I-U dell'intero sistema coincide con il legame I-U del blocchetto  $z_a$ . Poiché tale blocchetto è raggiungibile e osservabile (ossia tutti i punti di  $X_a$  possono essere raggiunti con opportuni  $u$  e tutti i movimenti in  $X_a$  hanno effetto su  $y$ ), per esso varrà<sup>3</sup>  $n_a \equiv n$ , e quindi in generale  $n \equiv n_a \leq \bar{n} = n_a + n_b + n_c + n_d$ . La conclusione di tutto il discorso è che se un sistema è tutto raggiungibile e osservabile (e quindi è composto solo dal

<sup>2</sup>Per semplicità nella Fig. 3.1 sono state omesse le frecce che collegano tra loro alcuni dei quattro blocchetti. Tuttavia il verso di tali frecce è tale che, in ogni caso, l'ingresso  $u$  mai avrà effetto sui blocchetti  $z_c$  e  $z_d$  così come anche in nessun modo  $y$  sarà influenzata da  $z_b$  e  $z_d$ . La figura in questione risulta da quella che viene chiamata *decomposizione di Kalman*, che non rientra tra gli argomenti del presente corso

<sup>3</sup>Si dimostra che se un sistema è raggiungibile e osservabile la dimensione del suo stato è pari all'ordine massimo della derivata dell'uscita nella sua rappresentazione I-U.

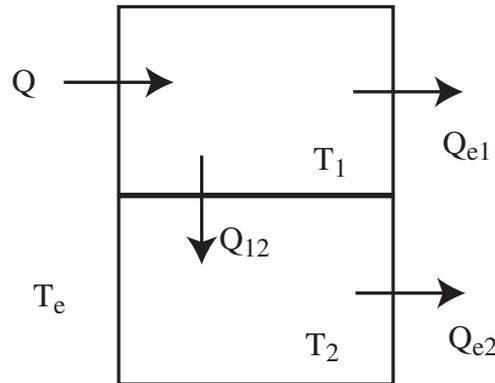


Figura 3.2: Il sistema termico considerato nell'esempio

blocchetto di  $z_a$ ), vale  $n = \bar{n}$ . Se invece non lo è, ossia esistono altri blocchetti oltre quello di  $z_a$ , vale  $n < \bar{n}$ . Il problema associato a questo secondo caso è che parti non raggiungibili e/o non osservabili, se instabili, non possono essere controllate in alcun modo. In tal caso, occorre aggiungere opportuni attuatori/sensori per rendere queste parti accessibili al controllo.

### 3.5 Esempio: controllo della temperatura in un ambiente composto da due stanze.

Questo esempio serve per evidenziare la presenza in un sistema dinamico (di tipo lineare e stazionario) di parti non raggiungibili e/o non osservabili. Nel primo caso (sezione 3.5.1) tale presenza sarà immediatamente evidente dalle variabili di stato, nel secondo caso (sezione 3.5.2) verrà messa in luce da un cambiamento di coordinate opportuno. Alcuni concetti utilizzati in questo esempio saranno approfonditi più avanti nel corso (in particolare come si ricava I-U da I-S-U), altri invece non rientrano tra gli argomenti trattati nel presente corso (definizione formale di raggiungibilità e osservabilità, criteri per verificare queste proprietà e per individuare il cambiamento di base necessario a metterle in luce). Quello che si deve imparare da questo esempio è che nei sistemi lineari ci possono essere parti non raggiungibili e/o non osservabili e ci possiamo accorgere di ciò quando l'ordine dell'equazione nella rappresentazione I-U è minore della dimensione dello stato nella rappresentazione I-S-U.

#### 3.5.1 Caso 1

Si consideri il sistema in figura 3.2, composto da due ambienti, in cui  $T_1$  e  $T_2$  sono le temperature dei due ambienti,  $Q$  il calore immesso,  $Q_{12}$  quello che passa da un ambiente all'altro e  $Q_{e1}$ ,  $Q_{e2}$  quello che fuoriesce all'esterno, dove la temperatura rimane costante e pari a  $T_e$ .

Le equazioni sono:

$$c_1 \frac{dT_1}{dt} = Q - Q_{12} - Q_{e1} \quad (3.5)$$

$$c_2 \frac{dT_2}{dt} = Q_{12} - Q_{e2} \quad (3.6)$$

essendo  $c_i$  le capacità termiche dei due ambienti. Se  $k_{e1}$  e  $k_{e2}$  rappresentano i coefficienti di trasmissione del calore dei due ambienti verso l'esterno e  $k_{12}$  quello della parete tra di essi, si

ha:

$$Q_{e1} = k_{e1}(T_1 - T_e) \quad (3.7)$$

$$Q_{e2} = k_{e2}(T_2 - T_e) \quad (3.8)$$

$$Q_{12} = k_{12}(T_1 - T_2) \quad (3.9)$$

Sostituendo in (3.5)-(3.6):

$$c_1 \frac{dT_1}{dt} = Q - k_{12}(T_1 - T_2) - k_{e1}(T_1 - T_e) \quad (3.10)$$

$$c_2 \frac{dT_2}{dt} = k_{12}(T_1 - T_2) - k_{e2}(T_2 - T_e). \quad (3.11)$$

Se consideriamo una situazione nominale  $Q = 0$ , all'equilibrio (cioè dopo un tempo abbastanza lungo), la temperatura dei due ambienti sarà pari a  $T_e$ . Per vedere questo basta risolvere, rispetto a  $T_1$  e  $T_2$ , le equazioni (3.10)-(3.11) con  $Q = 0$ , imponendo che le due derivate siano nulle, cioè:

$$0 = -k_{12}(T_1 - T_2) - k_{e1}(T_1 - T_e) \quad (3.12)$$

$$0 = k_{12}(T_1 - T_2) - k_{e2}(T_2 - T_e). \quad (3.13)$$

Definiamo le variabili di stato, di uscita e di ingresso con riferimento alla situazione nominale di equilibrio nel seguente modo:

$$x_1 := T_1 - T_e \quad (3.14)$$

$$x_2 := T_2 - T_e \quad (3.15)$$

$$y := x_1 \quad (3.16)$$

$$u := Q. \quad (3.17)$$

Riscrivendo (3.10)-(3.11) con le nuove variabili e mettendole in forma matriciale, otteniamo una rappresentazione I-S-U per questo sistema del tipo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.18)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.19)$$

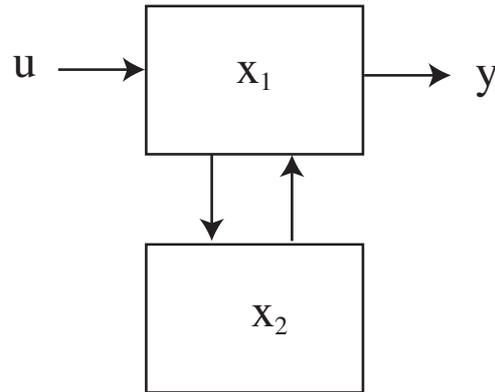
con

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{k_{12}+k_{e1}}{c_1} & \frac{k_{12}}{c_1} \\ \frac{k_{12}}{c_2} & -\frac{k_{12}+k_{e2}}{c_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

Una rappresentazione grafica di queste equazioni è quella in figura 3.3. Le frecce stanno a significare i legami che esistono tra le varie variabili: le frecce tra i due blocchetti  $x_1$  e  $x_2$  in particolare significano che la variabile  $x_1$  ha effetto su  $x_2$  e viceversa, e ciò corrisponde alla presenza dei termini  $\frac{k_{12}}{c_1}$  e  $\frac{k_{12}}{c_2}$  fuori dalla diagonale principale di  $A$ , che *accoppia* le due variabili. La freccia di  $u$  solo sul primo blocchetto indica che solo nell'equazione di  $x_1$  compare la  $u$  (il secondo elemento di  $B$  è nullo). La freccia di  $y$  indica che l'uscita dipende direttamente solo dalla prima variabile (il secondo elemento di  $C$  è nullo). Il legame tra i due blocchetti tuttavia potrebbe permettere all'ingresso di *raggiungere* anche  $x_2$  e potrebbe permettere a  $x_2$  di essere *vista* in uscita. Di fatto questo avviene. Se infatti andiamo a calcolare la rappresentazione I-U di questo sistema troviamo<sup>4</sup>:

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) + b_1\dot{u}(t)$$

<sup>4</sup>La procedura per ricavare la rappresentazione I-U dalla I-S-U sarà spiegata successivamente nel corso



**Figura 3.3:** Visualizzazione grafica delle equazioni (3.18)-(3.19)

dove:

$$a_0 = \frac{k_{e1}k_{e2} + k_{12}(k_{e1} + k_{e2})}{c_1c_2} \quad a_1 = \frac{k_{12} + k_{e2}}{c_2} + \frac{k_{12} + k_{e1}}{c_1} \quad b_0 = \frac{k_{12} + k_{e2}}{c_1c_2} \quad b_1 = \frac{1}{c_1}$$

Dal fatto che l'ordine massimo della derivata dell'uscita nella rappresentazione I-U (che vale 2) coincide con la dimensione dello stato, sappiamo che tutto il sistema è raggiungibile e osservabile, cioè l'ingresso ha effetto sia su  $x_1$ , sia su  $x_2$  e possiamo raggiungere tutti i punti dello spazio di stato  $\mathbb{R}^2$  e inoltre l'uscita dipende sia da  $x_1$  sia da  $x_2$  e possiamo risalire al valore di tutto lo stato dall'osservazione dell'uscita.

Chiaramente, se  $k_{12} = 0$  (parete perfettamente isolante), non c'è interazione tra i due ambienti e infatti la matrice  $A$  diventa diagonale e le due variabili di stato non interagiscono più tra di loro. La rappresentazione grafica del sistema è ancora quella di Fig. 3.3 ma avendo eliminato le due frecce tra i due blocchetti  $x_1$  e  $x_2$ . È chiaro che in questo caso  $x_2$  sia *non raggiungibile* (da  $u$ ) e *non osservabile* (da  $y$ ). Infatti, se si calcola la rappresentazione I-U nel caso  $k_{12} = 0$ , si trova:

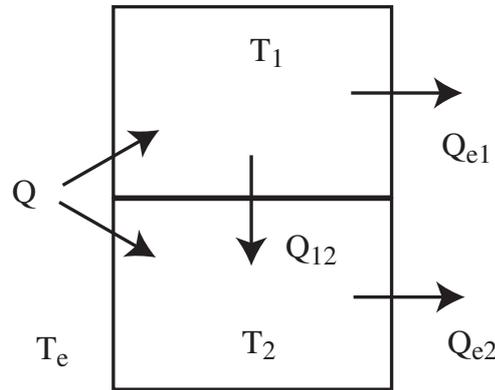
$$\dot{y}(t) + \frac{k_{e1}}{c_1}y(t) = \frac{1}{c_1}u(t)$$

in cui si nota come l'ordine massimo della derivata di  $y$  è uno, minore della dimensione dello stato.

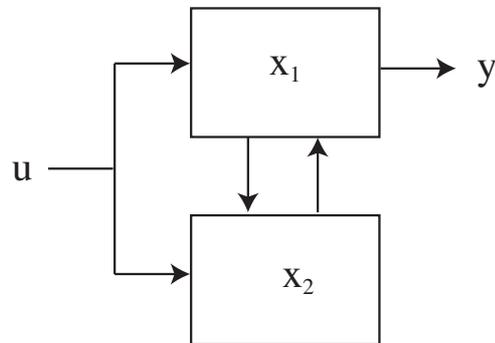
Con riferimento alla situazione generale descritta nella Fig. 3.1, quando  $k_{12} = 0$ , la variabile  $x_1$  coincide con  $z_a$  e  $x_2$  con  $z_d$  mentre mancano in questo caso i blocchetti  $z_b$  e  $z_c$ . Nel caso, invece, in cui  $k_{12} \neq 0$ , il sistema è raggiungibile e osservabile, per cui esiste solo il blocchetto di  $z_a$  che comprende quindi entrambe le variabili  $x_1$  e  $x_2$  (cioè il sottospazio  $X_a$  coincide con tutto  $\mathbb{R}^2$ ).

### 3.5.2 Caso 2

Nell'esempio precedente, quando  $k_{12} = 0$ , la parte non raggiungibile e non osservabile era evidente fisicamente dalle variabili di stato: una apparteneva al sottospazio raggiungibile e osservabile l'altra a quello non raggiungibile e non osservabile. Ciò era particolarmente evidente perché la seconda variabile era completamente scollegata sia dall'ingresso  $u$  sia dall'uscita  $y$ . Le cose non sono però sempre così: a volte tutte le variabili di stato possono essere modificate dall'ingresso e contribuire all'uscita ma il sistema rimane non raggiungibile perché l'ingresso può far spostare



**Figura 3.4:** Il sistema termico considerato nel secondo esempio



**Figura 3.5:** Visualizzazione grafica delle equazioni (3.18)-(3.19) per il sistema del secondo esempio

lo stato solo in un sottospazio e solo le variazioni in un certo sottospazio possono essere visibili in uscita. In questi casi occorre un cambiamento di coordinate<sup>5</sup> per mettere in luce la presenza di parti non raggiungibili e/o non osservabili.

Consideriamo allora il sistema in Fig. 3.4 dove i due ambienti sono identici:

$$c_1 = c_2 = c$$

$$k_{e1} = k_{e2} = k_e$$

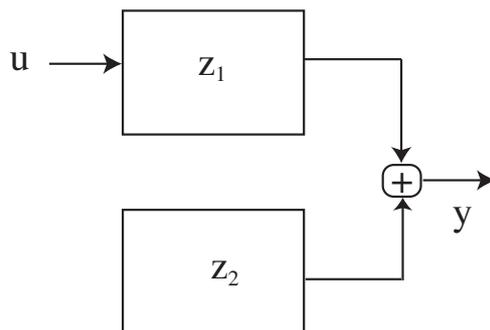
e il calore  $Q$  immesso nel primo ambiente non può differire da quello che viene immesso nel secondo. Anche qui la temperatura esterna  $T_e$  è costante.

Utilizzando le stesse variabili definite in (3.14)-(3.17), si arriva ancora a una coppia di equazioni del tipo (3.18)-(3.19) ma con matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{k_{12}+k_e}{c} & \frac{k_{12}}{c} \\ \frac{k_{12}}{c} & -\frac{k_{12}+k_e}{c} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/c \\ 1/c \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

La rappresentazione grafica è ora riportata in Fig. 3.5.

<sup>5</sup>Come determinarlo non rientra negli scopi di questo corso, come anche una trattazione sistematica delle proprietà di raggiungibilità e osservabilità dei sistemi lineari e l'individuazione dei sottospazi raggiungibili e osservabili



**Figura 3.6:** Visualizzazione grafica delle equazioni (3.22)-(3.23)

Dalla Fig. 3.5, sarebbe ragionevole supporre di avere a che fare con un sistema raggiungibile e osservabile perché  $u$  agisce sia su  $x_1$  sia su  $x_2$  e l'uscita dipende, è vero, solo da  $x_1$ , ma  $x_1$  è influenzata da  $x_2$  e quindi non è impossibile che possa essere osservata da  $y$ . Tuttavia, se vado a calcolare la rappresentazione I-U di questo sistema, trovo:

$$\dot{y}(t) + \frac{k_e}{c}y(t) = \frac{1}{c}u(t)$$

ossia un'equazione di ordine uno, minore della dimensione dello stato. Questo significa che il sistema non è tutto raggiungibile e osservabile, ma ci sono parti non raggiungibili e/o non osservabili. Come mai?

Fisicamente il motivo è che, avendo due ambienti identici, e potendo fornire loro solo quantità uguali di calore, è impossibile scegliere un controllo  $u$  che riscaldi a due temperature diverse i due ambienti. In altri termini, solo una parte dello spazio di stato è raggiungibile, ed è quella relativa al sottospazio  $x_1 = x_2$ . Per vedere questo occorre fare un cambiamento di base  $z = Tx$  del seguente tipo:

$$z_1 = x_1 + x_2 \quad (3.20)$$

$$z_2 = x_1 - x_2 \quad (3.21)$$

da cui  $y = x_1 = (z_1 + z_2)/2$ . Scrivendo la dinamica in queste nuove coordinate si ottiene un'equazione del tipo:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \quad (3.22)$$

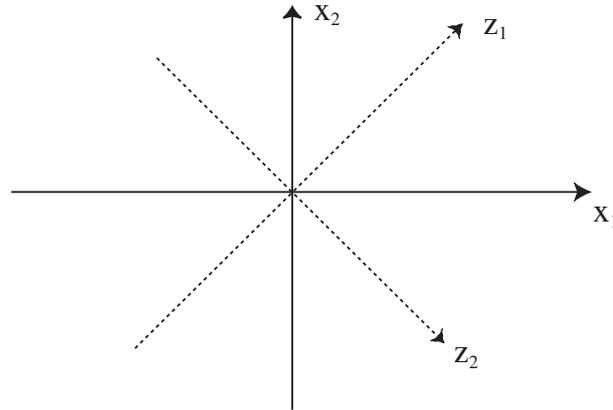
$$y = \bar{C}z + \bar{D}u \quad (3.23)$$

con

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\frac{k_e}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{2k_{12}+k_e}{c} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 2/c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [1/2 \quad 1/2], \quad \bar{D} = 0$$

La rappresentazione grafica in queste nuove coordinate (Fig. 3.6) mette chiaramente in luce che la variabile  $z_2$  non è raggiungibile. Questo significa che non ci si può muovere al di fuori del sottospazio  $x_1 = x_2$ . Il sistema è osservabile ma non tutto raggiungibile, in quanto il blocchetto di  $z_1$  è raggiungibile e osservabile e quello di  $z_2$  solo osservabile.

Con riferimento alla Fig. 3.7, il controllo  $u$  permette qualsiasi spostamento lungo  $z_1$ , che infatti è il sottospazio raggiungibile, ma non ha effetto lungo  $z_2$ , che rimane sempre a 0 (eventualmente dopo un periodo in cui si esaurisce l'effetto delle condizioni iniziali: i due ambienti potrebbero partire infatti da due temperature diverse).



**Figura 3.7:** Il cambiamento di coordinate utilizzato (a meno di un fattore di scala)

Con riferimento alla Fig. 3.1, si avranno in questo caso solo i blocchetti di  $z_a$  (con  $z_a$  coincidente in effetti con  $z_1$ ) e  $z_c$  (con  $z_c$  coincidente con  $z_2$ ).

### 3.6 Cenni sulla scelta delle variabili di stato

Si è detto che le variabili di stato contengono tutta l'informazione necessaria per poter prevedere (dato il modello) l'evoluzione libera del sistema. Esse descrivono la situazione interna del sistema, nel senso che dipendono da e "riassumono" tutta la sua storia passata.

Nei sistemi fisici, tipicamente, la situazione interna è associata ad accumuli di energia. Per questo motivo, volendo dare a un ingegnere dei criteri di massima, molto semplificati, per la scelta delle variabili di stato di un sistema (con cui scrivere poi il modello matematico che rappresenterà l'evoluzione dinamica del processo studiato) si daranno le seguenti indicazioni:

- Per un circuito elettrico si sceglieranno come variabili di stato le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti che percorrono gli induttori (N.B.: una variabile - di tensione - per ogni condensatore e una variabile - di corrente - per ogni induttore). Questo corrisponde agli accumuli di energia elettrica e magnetica presenti nei componenti del circuito.
- Per un sistema meccanico composto da masse puntiformi, per ogni massa del sistema si sceglierà una (nel caso monodimensionale dell'esempio del carrello, due se nel piano e tre se nello spazio) variabile di posizione e una (nel caso monodimensionale dell'esempio del carrello, due se nel piano e tre se nello spazio) di velocità. Quindi, nel caso di  $N$  masse, si avranno in tutto  $2N$  variabili di stato nel caso monodimensionale,  $4N$  nel caso bidimensionale e  $6N$  nel caso tridimensionale. Questa scelta corrisponde agli accumuli di energia potenziale e cinetica.
- Nei sistemi termici, come l'edificio visto in precedenza, si assocerà una variabile di stato alla temperatura di ogni ambiente dell'edificio, legata infatti a un accumulo di energia termica.

Da notare che la scelta delle variabili di stato non è univoca: per esempio, nel caso lineare, se  $x$  è il vettore delle variabili di stato di un sistema, anche  $z = Tx$ , dove  $T$  è una matrice di cambiamento di coordinate, è un vettore di variabili adeguate a rappresentare lo stato del

sistema. È possibile verificare, come verrà fatto tra qualche lezione, che le matrici nelle nuove variabili, cioè tali che:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \quad (3.24)$$

$$y = \bar{C}z + \bar{D}u \quad (3.25)$$

sono date da:

$$\bar{A} = TAT^{-1} \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D$$

Da notare infine, che la scelta delle variabili di stato va fatta in modo da ottenere un modello che sia il più possibile un buon compromesso tra attendibilità e complessità. Per esempio, nel caso del carrello, considerare la temperatura di questo come variabile di stato (che influenza il volume e quindi l'attrito del carrello e la sua velocità e che è influenzata a sua volta dalla velocità) è sicuramente una complicazione notevole che, date le velocità tipiche del sistema in considerazione, non introduce alcun miglioramento all'attendibilità del modello stesso.

### 3.7 Esempi di sistemi lineari e non

Valutare quali dei seguenti sistemi sono lineari e quali non lo sono.

1. Si consideri il sistema dinamico con  $x \in \mathbb{R}^3$  descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_3 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2, \\ y = 2x_1. \end{cases}$$

Questo sistema non è lineare perché, a causa del termine  $x_1 \cdot x_3$  che compare nella prima equazione, non è possibile scriverlo nella forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$  per opportune matrici costanti  $A, B, C, D$ .

2. Si consideri il sistema dinamico con  $x \in \mathbb{R}^2$  descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + 2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - u, \\ y = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Anche questo non è lineare perché, a causa del termine costante  $+2$  che compare nella prima equazione, non è possibile scriverlo nella forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$  per opportune matrici costanti  $A, B, C, D$ . Si tratta in effetti di un sistema *affine* (cioè lineare più costante) per il quale è facile verificare per esempio che non vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

3. Si consideri il sistema dinamico con  $x \in \mathbb{R}^3$  descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_2 - u \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3, \\ y = x_1 - x_3. \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare. Esercizio: calcolare le matrici  $A, B, C, D$  della sua rappresentazione I-S-U.



## Capitolo 4

### Risposta esplicita nel tempo

Si è visto in precedenza come la rappresentazione I-S-U sia la più completa per un sistema dinamico in quanto descrive anche il comportamento interno di esso (cioè dello stato), cosa che in generale non vale per la rappresentazione I-U che descrive la dinamica della sola parte raggiungibile e osservabile del sistema. In questo capitolo si introducono alcuni concetti legati a questa rappresentazione più completa, cioè alla I-S-U, i quali concetti permetteranno poi di chiarire ulteriormente i motivi per cui, in alcuni casi, non si ha completa raggiungibilità e osservabilità del sistema. Questo verrà illustrato mostrando come, in alcuni casi, non tutti i *modi* (cioè non tutti gli autovalori della matrice  $A$ ) sono *eccitabili* dall'ingresso (il che corrisponde alla non raggiungibilità degli autospazi connessi con quei modi, ovvero all'esistenza dei blocchetti  $z_c$  e  $z_d$  nella Fig. 3.1) e non tutti i modi sono *osservabili* in uscita, determinando l'esistenza dei blocchetti  $z_b$  e  $z_d$  nella medesima figura. Questo discorso sarà affrontato con qualche dettaglio più avanti.

In questo capitolo, proprio per fornire le premesse a questo discorso, si presenta una soluzione esplicita  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  alle equazioni che caratterizzano la rappresentazione I-S-U, riportata qui di seguito per comodità:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

La soluzione che si introduce in questo capitolo ha principalmente una valenza teorica in quanto, per il calcolo esplicito di tale soluzione, conviene avvalersi della Trasformata di Laplace che verrà introdotta nel prossimo capitolo.

#### 4.1 La matrice esponenziale

Per introdurre l'espressione esplicita della soluzione delle (4.1), occorre premettere la definizione dell'esponenziale di matrice e alcune sue proprietà, forse già note dai corsi di Analisi Matematica. Tale definizione si basa sul ben noto sviluppo in serie della funzione esponenziale  $e^x$ , per  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definizione 1** Sia  $A$  una matrice quadrata  $n \times n$  e  $t \in \mathbb{R}$ . La matrice esponenziale è una matrice anch'essa quadrata  $n \times n$  definita nel seguente modo:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \quad (4.2)$$

dove  $k!$  indica il fattoriale dell'intero  $k$  e per definizione  $0! = 1$ ,  $t^0 = 1$  e  $A^0 = I$ , essendo  $I$  la matrice identità  $n \times n$ .

##### 4.1.1 Alcune proprietà della matrice esponenziale

1. Se  $t = 0$ ,  $e^{At} = e^{A \cdot 0} = I$ , dove  $I$  è la matrice identità  $n \times n$ . Questa proprietà segue banalmente dalla definizione.

2. Qualsiasi siano  $A$  e  $t$ , la serie (4.2) è sempre ben definita e convergente e si ha:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A.$$

Anche questa proprietà segue abbastanza facilmente dalla definizione e mostra oltretutto come  $A$  commuti con il suo esponenziale  $e^{At}$ .

## 4.2 Soluzione esplicita nella rappresentazione di stato

Sotto ipotesi molto generali sulla funzione di ingresso  $u(\cdot)$  e fissate le condizioni iniziali  $x_0$ , la soluzione  $x(t)$  alla prima delle (4.1) esiste, è unica ed è data dalla seguente espressione:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B u(\tau) d\tau. \quad (4.3)$$

È facile verificare, avvalendosi delle proprietà richiamate nella Sezione 4.1.1, che effettivamente  $x(0) = x_0$  e che  $\dot{x} = Ax + Bu$ , cioè che la (4.3) è (l'unica) soluzione alla prima delle (4.1).

### 4.2.1 Causalità

Dalla (4.3) è evidente la causalità del sistema descritto dalle (4.1): il valore dello stato al tempo  $t$  dipende dalle condizioni iniziali e dal valore dell'ingresso  $u$  solo per tempi precedenti a  $t$  (mentre i valori che assumerà l'ingresso dopo  $t$  non hanno effetto su  $x(t)$ ).

### 4.2.2 Principio di sovrapposizione degli effetti

Dalla (4.3) è anche immediato vedere come sia verificato il principio di sovrapposizione degli effetti dovuto alla linearità della trasformazione matriciale  $e^{At}x_0$  (per cui  $e^{At}(\alpha x_{0a} + \beta x_{0b}) = \alpha e^{At}x_{0a} + \beta e^{At}x_{0b}$ ) e a quella dell'operatore integrale (per cui  $\int_0^t e^{A(t-\tau)}B(\alpha u_a(\tau) + \beta u_b(\tau)) d\tau = \alpha \int_0^t e^{A(t-\tau)}B u_a(\tau) d\tau + \beta \int_0^t e^{A(t-\tau)}B u_b(\tau) d\tau$ ).

### 4.2.3 Risposta libera e forzata

Nell'equazione (4.3) è possibile distinguere due componenti  $x_\ell(t)$  e  $x_f(t)$ , dette rispettivamente *risposta libera* e *risposta forzata* nello stato:

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}B u(\tau) d\tau}_{x_f(t)}. \quad (4.4)$$

La risposta libera dipende solo dalle condizioni iniziali  $x_0$  e non dall'ingresso  $u(\cdot)$  ed è detta *libera* perché rappresenta l'evoluzione libera dello stato del sistema, cioè l'evoluzione dello stato in assenza di forzamento esterno (ossia quando  $u(\cdot)$  è identicamente nulla).

La risposta forzata invece dipende solo dall'ingresso  $u(\cdot)$  e non dalle condizioni iniziali  $x_0$  ed è detta *forzata* perché rappresenta l'evoluzione forzata dello stato del sistema, cioè l'evoluzione dello stato conseguente a un certo forzamento esterno  $u(\cdot)$  nell'ipotesi che le condizioni iniziali siano nulle.

#### 4.2.4 Prodotto di matrici esponenziali ed inversa di una matrice esponenziale

Dalla (4.3) discende infine un'ulteriore proprietà della matrice esponenziale. La proprietà è che, se  $t_1$  e  $t_2$  sono due numeri reali, si ha:

$$e^{A \cdot t_1} \cdot e^{A \cdot t_2} = e^{A \cdot (t_1 + t_2)} = e^{A \cdot t_2} \cdot e^{A \cdot t_1},$$

in modo del tutto analogo a quanto accade nel caso scalare.

Questa proprietà si dimostra nel seguente modo. Siano  $t_a$  e  $t_b$  due tempi, con  $0 < t_a < t_b$ . La risposta libera nello stato al tempo  $t_a$  è data da  $x(t_a) = e^{A \cdot t_a} x_0$  mentre al tempo  $t_b$  da  $x(t_b) = e^{A \cdot t_b} x_0$ . Chiaramente si può anche scrivere  $x(t_b) = e^{A \cdot (t_b - t_a)} x(t_a)$ , prendendo cioè come tempo iniziale il tempo  $t_a$ . Quindi:

$$e^{A \cdot t_b} x_0 = e^{A \cdot (t_b - t_a)} e^{A \cdot t_a} x_0.$$

Ciò vale per ogni  $x_0$ . Ne segue che:

$$e^{A \cdot t_b} = e^{A \cdot (t_b - t_a)} e^{A \cdot t_a}.$$

Prendendo  $t_1 = t_b - t_a$  e  $t_2 = t_a$ , la precedente diventa

$$e^{A \cdot (t_1 + t_2)} = e^{A \cdot t_1} e^{A \cdot t_2}.$$

che è quanto volevasi dimostrare<sup>1</sup>. Da notare che conseguenza immediata di questo fatto è che la matrice esponenziale è sempre invertibile (cioè è non singolare) e ha per inversa  $e^{-At}$ , cioè

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

Infatti basta applicare la precedente con  $t_1 = t$  e  $t_2 = -t$  per vedere che  $e^{At} \cdot e^{-At} = e^{A(t-t)} = e^{A \cdot 0} = I$ .

### 4.3 Matrice di transizione dello stato e delle risposte impulsive

Si definiscano le seguenti matrici:

$$\Phi(t) = e^{At} \tag{4.5}$$

$$H(t) = e^{At} B. \tag{4.6}$$

La prima è detta *matrice di transizione dello stato* ed è una matrice  $\bar{n} \times \bar{n}$ , se  $\bar{n}$  è la dimensione del vettore di stato  $x$ . La seconda, per i motivi che saranno evidenti più avanti, viene detta *matrice delle risposte impulsive nello stato* ed è una matrice in generale  $\bar{n} \times p$ , dove  $p$  è il numero di elementi del vettore di ingresso  $u$ . Come anticipato, in questo corso si considera solo il caso scalare  $p = 1$  e pertanto  $H$  è in effetti un vettore colonna  $\bar{n} \times 1$ .

Con queste definizioni, la soluzione esplicita (4.3) può essere scritta nel seguente modo:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau. \tag{4.7}$$

---

<sup>1</sup>Si vuole osservare a questo proposito che, sebbene  $e^{At_1}$  commuti con  $e^{At_2}$ , in generale  $e^A$  non commuta con  $e^B$  (e quindi in generale  $e^{A_1 t}$  non commuta con  $e^{A_2 t}$ ). In generale  $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$  se e solo se  $A$  commuta con  $B$

La colonna  $i$ -esima di  $\Phi$ , come è immediato verificare, rappresenta la risposta libera nello stato a fronte di una condizione iniziale pari a  $e_i$ , che è l'elemento  $i$ -esimo della base canonica di  $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ , cioè il vettore formato da tutti zeri tranne un uno in posizione  $i$ .

Per comprendere il nome attribuito ad  $H$ , è necessario premettere la definizione di *impulso unitario a tempo continuo* (o  $\delta$  di Dirac)  $\delta_0(t)$ . Questo può essere visto come il limite per  $\varepsilon$  che tende a 0 della funzione

$$\delta_{0,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & t \in [0, \varepsilon) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Per ogni  $\varepsilon$ , l'integrale di questa funzione su un intervallo  $(a, b)$ , con  $a < 0$  e  $b > \varepsilon$  è 1. Pertanto,  $\delta_0(t)$  è una funzione che vale 0 ovunque, assume un valore infinito per  $t = 0$  e il suo integrale a cavallo dello zero risulta pari a 1. Di conseguenza, se si moltiplica l'impulso di Dirac per una funzione  $f(t)$ , è facile convincersi che

$$\int_a^b f(t)\delta_0(t)dt = f(0) \quad (4.9)$$

tutte le volte che 0 è compreso nell'intervallo di integrazione  $(a, b)$ , altrimenti il risultato sarà 0.

Mettendo in ingresso al nostro sistema lineare questa funzione impulsiva, si ottiene, per la risposta forzata:

$$x_f(t) = \int_0^t H(t-\tau)\delta_0(\tau)d\tau = H(t).$$

Cioè, la risposta forzata all'impulso unitario è data proprio da  $H(t)$ , che per questo motivo viene detta matrice delle risposte impulsive nello stato (nel caso scalare qui considerato, una matrice  $\bar{n} \times 1$ , cioè un vettore).

Per quanto riguarda la risposta esplicita dell'uscita  $y(\cdot)$ , in base alla seconda delle (4.1) e alla scrittura esplicita della soluzione nello stato (4.3), si ha:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad (4.10)$$

ed è possibile individuare anche qui, in modo del tutto analogo a quanto fatto per lo stato, una risposta libera e forzata (in uscita):

$$y_\ell(t) = Cx_\ell(t) = Ce^{At}x_0 \quad (4.11)$$

$$y_f(t) = Cx_f(t) + Du(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \quad (4.12)$$

Anche per l'uscita si definiscono due funzioni matriciali:

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = Ce^{At} \quad (4.13)$$

$$W(t) = CH(t) + D\delta_0(t) = Ce^{At}B + D\delta_0(t), \quad (4.14)$$

grazie alle quali la (4.10) può essere scritta nel seguente modo:

$$y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.15)$$

La funzione  $W(t)$  viene detta *matrice delle risposte impulsive nell'uscita*, o più semplicemente *matrice delle risposte impulsive*. Nel caso scalare qui considerato in cui  $u$  e  $y$  sono funzioni scalari, la  $W$  è in realtà una funzione scalare e rappresenta proprio la risposta impulsiva del

sistema, cioè l'evoluzione forzata in uscita quando si applichi in ingresso al sistema l'impulso unitario  $\delta_0(t)$ .

### Calcolo di $e^{At}$ per $A$ diagonalizzabile

Quando  $A$  è diagonalizzabile il calcolo di  $e^{At}$  è particolarmente semplice. Una matrice  $A$  è diagonalizzabile quando esiste un cambiamento di coordinate  $z = Tx$  tale che nelle nuove coordinate

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

è una matrice diagonale. Ciò è possibile se e solo se le molteplicità algebriche degli autovalori  $\lambda_i$  di  $A$  (che sono i numeri che compaiono sulla diagonale principale della matrice  $\Lambda$ ) sono uguali alle loro molteplicità geometriche (vedere la Sezione 7.2.1 per qualche richiamo su questi concetti). In tal caso, la matrice di cambiamento di coordinate  $T$  che permette di diagonalizzare  $A$  è data da  $T = P^{-1}$ , con  $P$  la matrice che ha per colonne gli elementi di una base di  $\mathbb{R}^n$  fatta di autovettori di  $A$ . In particolare, se gli autovalori di  $A$  sono tutti distinti tra loro, questo fatto vale sempre, cioè  $A$  è sempre diagonalizzabile.

Ora, se  $A$  è diagonalizzabile, si ha  $A = T^{-1}\Lambda T$ . Pertanto, per ogni intero  $k$ :

$$A^k = (T^{-1}\Lambda T) \cdot (T^{-1}\Lambda T) \cdots (T^{-1}\Lambda T) = T^{-1}\Lambda^k T = T^{-1} \text{diag}\{\lambda_i^k\} T,$$

essendo  $\text{diag}\{\lambda_i^k\}$  la matrice diagonale che ha sulla diagonale principale le potenze  $k$ -sime degli autovalori di  $A$ . Di conseguenza:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} T^{-1} \text{diag}\{\lambda_i^k\} T = T^{-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \text{diag}\{\lambda_i^k\} \right) T = T^{-1} \text{diag}\{e^{\lambda_i t}\} T,$$

essendo  $\text{diag}\{e^{\lambda_i t}\}$  la matrice diagonale che ha sulla diagonale principale i termini esponenziali  $e^{\lambda_i t}$ . Tale matrice non è nient'altro che l'esponenziale  $e^{\Lambda t}$  della matrice diagonale  $\Lambda$ .

**Esempio.** Si consideri il seguente sistema lineare caratterizzato da una matrice  $A$  avente autovalori distinti e quindi diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [-1, 2] \quad D = 1$$

Gli autovalori di  $A$  sono in questo caso  $-1$  e  $1$  con autovettori relativi rispettivamente dati da, per esempio,  $[-1, 1]'$  e  $[1, 1]'$ . Scegliendo quindi la matrice

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha per colonne questi autovettori di  $A$  e prendendo  $T = P^{-1}$  si ha

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \Lambda = \text{diag}\{-1, 1\}.$$

Chiaramente  $A = T^{-1}\Lambda T$ . Pertanto:

$$e^{At} = T^{-1} e^{\Lambda t} T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^t & -e^{-t} + e^t \\ -e^{-t} + e^t & e^{-t} + e^t \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza le varie funzioni definite in questo capitolo sono date da:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^t & -e^{-t} + e^t \\ -e^{-t} + e^t & e^{-t} + e^t \end{bmatrix}, \\ H(t) &= e^{At} B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{-t} + e^t \\ e^{-t} + e^t \end{bmatrix}, \\ \Psi(t) &= C e^{At} = \frac{1}{2} [-3e^{-t} + e^t, 3e^{-t} + e^t] \\ W(t) &= C e^{At} B + D \delta_0(t) = \frac{3e^{-t} + e^t}{2} + \delta_0(t). \end{aligned}$$

□

Nel caso  $A$  non sia diagonalizzabile il calcolo dell'esponenziale è meno semplice e richiede l'uso della forma di Jordan di  $A$ . Tuttavia, questo non è strettamente necessario in quanto, nel prossimo capitolo, vedremo un metodo più efficace per effettuare il calcolo della risposta, basato sulla trasformata di Laplace. Quello che si è introdotto qui verrà utilizzato più che altro per fini teorici tra qualche capitolo quando si introdurrà il concetto di *analisi modale* di un sistema lineare stazionario.



## Capitolo 5

### La trasformata di Laplace

Introduciamo nelle pagine seguenti la trasformata di Laplace, che ci permetterà di risolvere i vari problemi elencati nella prima lezione del corso, obiettivo del corso. In particolare ci permetterà di effettuare:

- il *calcolo della risposta* (cioè di  $x(t)$  e  $y(t)$ ) a fronte di un certo segnale di ingresso assegnato  $u(t)$  e di una certa condizione iniziale  $x_0$ ;
- il passaggio dalla rappresentazione I-S-U di un sistema lineare stazionario alla sua rappresentazione I-U (e viceversa);
- la verifica della stabilità di un sistema lineare stazionario.

La trasformata di Laplace sarà poi uno strumento fondamentale nella seconda parte del corso per risolvere il problema della sintesi, cioè quello di determinare una legge di controllo  $u(t)$  per ottenere stabilità, precisione e transitorio soddisfacente.

Per introdurre la trasformata di Laplace occorre fare qualche richiamo sui numeri complessi (la trasformata di Laplace associa infatti ad un segnale del tempo una funzione della variabile complessa  $s$ ).

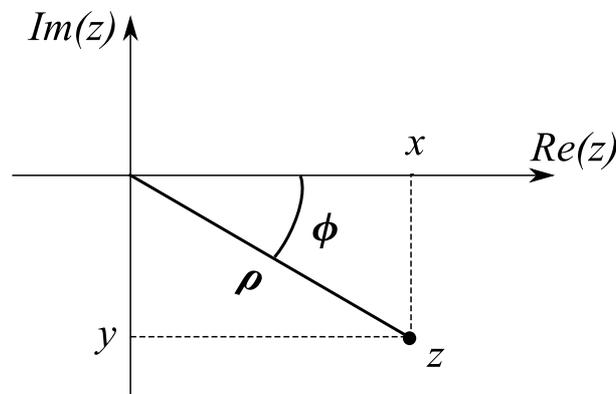
#### 5.1 Richiami sui numeri complessi

Un numero complesso  $z \in \mathbb{C}$  è definito da:

$$z = x + jy,$$

dove  $j$  è l'unità immaginaria ( $j^2 = -1$ ). Le quantità  $x$  e  $y \in \mathbb{R}$  sono dette rispettivamente parte reale e immaginaria di  $z$ :

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$



**Figura 5.1:** Il piano complesso  $\mathbb{C}$ : componenti reale  $x = \operatorname{Re}(z)$ , immaginaria  $y = \operatorname{Im}(z)$ , modulo  $\rho = |z|$  e fase  $\phi = \arg(z)$  di un numero complesso  $z = x + jy = \rho e^{j\phi}$ .

Definiamo modulo e argomento (o fase) di  $z$  nel seguente modo (si veda anche la Fig. 5.1):

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\arg(z) = \operatorname{atan2}(y, x).$$

Nella definizione dell'argomento di  $z$  è stata utilizzata la funzione  $\operatorname{atan2}$ , che è definita per ovviare all'indeterminatezza di  $\pi$  presente nella funzione arcotangente (a causa infatti della periodicità di  $\pi$  della funzione tangente, un angolo  $\theta$  e  $\theta + \pi$  hanno la stessa tangente e la normale funzione arcotangente non è in grado di capire se si tratta di  $\theta$  o di  $\theta + \pi$ ). La funzione  $\operatorname{atan2}$  è definita quindi come l'arcotangente ma permette di discriminare i due casi. A tal fine prende due argomenti:  $\operatorname{atan2}(y, x)$  è l'angolo compreso tra l'asse  $x$  e la semiretta che collega l'origine al punto  $(x, y)$  e può corrispondere ad  $\operatorname{atan}(y/x)$  oppure ad  $\operatorname{atan}(y/x) + \pi$ . Chiaramente, in base a questa definizione,  $\operatorname{atan2}(y, x) \equiv \operatorname{atan2}(c \cdot y, c \cdot x)$  per ogni costante positiva  $c$ .

Spesso modulo e fase di  $z$  vengono indicati con i simboli

$$\rho = |z|, \quad \phi = \arg(z).$$

In tal modo si può scrivere il numero complesso  $z$  secondo la *rappresentazione polare*

$$z = \rho \cdot e^{j\phi}$$

la cui validità segue facilmente dalla relazione di Eulero (si veda ancora la Fig. 5.1):

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi).$$

Utilizzando la rappresentazione polare, è facile dimostrare che:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)},$$

ossia  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  e  $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ . In particolare:

$$z^n = \rho^n e^{jn\phi}.$$

Se  $z_2 \neq 0$ ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)},$$

cioè  $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  e  $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ .

Dato  $z = x + jy \in \mathbb{C}$ , si definisce come *complesso coniugato* di  $z$  il numero complesso

$$\bar{z} = x - jy,$$

che talvolta viene indicato anche con la notazione  $z^*$ . È immediato verificare che

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Dalla relazione di Eulero dianzi richiamata, è possibile ricavare la seguente espressione per seno e coseno di  $y \in \mathbb{R}$ :

$$\sin(y) = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}, \quad (5.1)$$

$$\cos(y) = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}. \quad (5.2)$$

## 5.2 La trasformata di Laplace

Dato un segnale *unilatero* (cioè definito per  $t \geq 0$ ) nel dominio del tempo  $x(t)$ , si definisce *Trasformata di Laplace* di  $x(t)$  la funzione (complessa di variabile complessa  $s \in \mathbb{C}$ )

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt, \quad \forall s : \operatorname{Re}(s) > \beta. \quad (5.3)$$

$\beta \in \mathbb{R}$  è detta *ascissa di convergenza* di  $X(s)$  ed è il più piccolo numero tale che per ogni  $s$  con  $\operatorname{Re}(s) > \beta$  l'integrale nella (5.3) sia ben definito.

Dato un segnale  $X(s)$ , la sua *trasformata inversa di Laplace*, se esiste, è un segnale  $x(t)$  tale che  $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$  e si indica con

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}.$$

Il calcolo della trasformata inversa di Laplace risulta in generale piuttosto complicato: nel presente corso tuttavia questo problema verrà risolto in modo relativamente semplice in quanto risulterà d'interesse saper calcolare tale antitrasformata solo per una classe ristretta di funzioni di  $s$  (le funzioni razionali proprie, che verranno definite più avanti).

### 5.2.1 Proprietà della Trasformata di Laplace

#### 1. Linearità

Utilizzando la linearità dell'operatore integrale, segue banalmente dalla definizione (5.3) che

$$\mathcal{L}\{\alpha_1x_1(t) + \alpha_2x_2(t)\} = \alpha_1X_1(s) + \alpha_2X_2(s),$$

dove  $X_i(s) = \mathcal{L}\{x_i(t)\}$ ,  $i = 1, 2$ .

#### 2. Traslazione complessa

Se  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , allora

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}x(t)\} = X(s - \alpha).$$

**Prova.**

Dalla definizione:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{\alpha t}x(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t}x(t)dt = X(s - \alpha).$$

□

#### 3. Prodotto per il tempo $\Leftrightarrow$ Derivata in $s$

Se  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , allora

$$\mathcal{L}\{t \cdot x(t)\} = -\frac{d}{ds}X(s). \quad (5.4)$$

**Prova.** Dalla definizione si ha:

$$\mathcal{L}\{t \cdot x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}tx(t)dt = \int_0^{\infty} \left[ -\frac{d}{ds}e^{-st}x(t) \right] dt = -\frac{d}{ds} \left[ \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt \right] = -\frac{d}{ds}X(s).$$

Ripetendo la precedente per  $h$  volte, è facile provare che

$$\mathcal{L}\{t^h x(t)\} = (-1)^h \frac{d^h}{ds^h} X(s). \quad (5.5)$$

□

#### 4. Trasformata della derivata

Se  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , allora

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX(s) - x(0).$$

**Prova.** Dalla definizione, integrando per parti, si ha:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \dot{x} dt = x(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = sX(s) - x(0),$$

dove si è usato il fatto che dentro l'ascissa di convergenza (cioè per ogni  $s$  con  $Re(s) > \beta$ ) il limite per  $t$  che tende all'infinito di  $x(t)e^{-st}$  è zero.  $\square$

#### 5. Trasformata dell'integrale

Se  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , allora

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s).$$

**Prova.** Si indichi con  $\bar{x}(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$  e con  $\bar{X}(s)$  la sua trasformata (che è la funzione che si vuole dimostrare pari a  $X(s)/s$ ). Sia  $\hat{x}(t) = \frac{d}{dt}\bar{x}$ . Chiaramente  $\hat{x}(t) = x(t)$ . Usando la proprietà precedente, cioè la trasformata della derivata applicata alla funzione  $\bar{x}(t)$  si ha dunque:

$$\mathcal{L}\{\hat{x}(t)\} = s\bar{X}(s) - \bar{x}(0).$$

Ma  $\bar{x}(0) = \int_0^0 x(\tau) d\tau = 0$ . Inoltre, essendo  $x(t) = \hat{x}(t)$ , saranno uguali anche le loro trasformate (cioè  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\hat{x}(t)\}$ ). Pertanto

$$X(s) = \mathcal{L}\{\hat{x}(t)\} = s\bar{X}(s),$$

da cui

$$\bar{X}(s) = \frac{1}{s}X(s),$$

che è quanto volevasi dimostrare.  $\square$

### 5.2.2 Trasformata di alcune funzioni di uso corrente

Si riporta in questa sezione la trasformata di alcune funzioni  $x(t)$  che sono poi quelle d'interesse ai fini di questo corso.

#### 1. Gradino unitario

Si definisce la funzione *gradino unitario* nel seguente modo:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Applicando la definizione (5.3) si ha:

$$\mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta_{-1}(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s},$$

con ascissa di convergenza  $\beta = 0$  (l'integrale precedente converge per tutti gli  $s$  con parte reale maggiore di 0).

## 2. Impulso unitario

Si consideri la funzione impulso unitario  $\delta_0(t)$ , definita nella sezione 4.3. In base alla definizione della trasformata di Laplace e alla (4.3) applicata a  $f(t) = e^{-st}$ , è facile vedere che

$$\mathcal{L}\{\delta_0(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta_0(t) dt = e^{-s \cdot 0} = 1.$$

L'integrale precedente converge per ogni  $s$  e pertanto in questo caso l'ascissa di convergenza è  $\beta = -\infty$ . Un altro modo per ricavare la precedente sfrutta la trasformata della derivata della funzione  $\delta_{-1}(t)$ , derivata che risulta essere in effetti proprio l'impulso unitario (cioè  $\delta_0(t) = \frac{d}{dt} \delta_{-1}(t)$ ). Si noti in effetti come il gradino unitario possa essere visto come il limite per  $\varepsilon$  che tende a zero della funzione  $\delta_{-1,\varepsilon}$  definita nel seguente modo:

$$\delta_{-1,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{t}{\varepsilon} & t \in [0, \varepsilon) \\ 1 & t \geq \varepsilon. \end{cases}$$

È evidente come per ogni  $\varepsilon$  la derivata di questa funzione sia la funzione  $\delta_{0,\varepsilon}(t)$  definita in (4.8). Qui si sta affermando che questo legame differenziale continua a sussistere anche per  $\varepsilon$  che tende a zero. In tal caso si ha:  $\mathcal{L}\{\delta_0(t)\} = s\mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} - \delta_{-1}(0) = s \frac{1}{s} = 1$ .

## 3. Esponenziale semplice

Si consideri la funzione  $e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Si tratta di un esponenziale definito solo per i  $t$  positivi:

$$e^{\alpha t} \delta_{-1}(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Utilizzando la proprietà della traslazione complessa applicata alla funzione  $x(t) = \delta_{-1}(t)$  è facile ricavare che

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s - \alpha},$$

con ascissa di convergenza  $\beta = \operatorname{Re}(\alpha)$ .

## 4. Termine polinomiale

Si consideri la funzione  $\frac{t^h}{h!} \delta_{-1}(t)$ , con  $h$  intero non negativo. Si ha

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^h}{h!} \delta_{-1}(t)\right\} = \frac{1}{s^{h+1}}. \quad (5.6)$$

La precedente si dimostra per induzione.

Innanzitutto dimostriamo che è vera per  $h = 0$ . Infatti, per  $h = 0$ , si ha  $\frac{t^h}{h!} \delta_{-1}(t) = \delta_{-1}(t)$  (essendo per definizione  $0! = 1$ ). Ma  $\mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} = 1/s$ , che è proprio il valore fornito dalla (5.6) per  $h = 0$ .

Supponiamo quindi vera la (5.6) fino ad  $h$  e mostriamo che vale anche per  $h + 1$ . Si ha

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{h+1}}{(h+1)!} \delta_{-1}(t)\right\} = \frac{1}{h+1} \mathcal{L}\left\{t \cdot \frac{t^h}{h!} \delta_{-1}(t)\right\}.$$

Ma in base alla (5.4), applicata prendendo  $x(t) = \frac{t^h}{h!} \delta_{-1}(t)$ , e tenendo conto dell'ipotesi induttiva:

$$\frac{1}{h+1} \mathcal{L}\left\{t \cdot \frac{t^h}{h!} \delta_{-1}(t)\right\} = -\frac{1}{h+1} \frac{d}{ds} \frac{1}{s^{h+1}} = \frac{1}{h+1} \frac{(h+1)s^h}{s^{2h+2}} = \frac{1}{s^{h+2}},$$

che è in effetti la (5.6) applicata al caso  $h + 1$ . L'ascissa di convergenza in questo caso è  $\beta = 0$ .

### 5. Termine polinomiale esponenziale

Applicando la traslazione complessa alla funzione  $x(t) = \frac{t^h}{h!} \delta_{-1}(t)$  è immediato ricavare che

$$\mathcal{L} \left\{ e^{\alpha t} \frac{t^h}{h!} \delta_{-1}(t) \right\} = \frac{1}{(s - \alpha)^{h+1}}.$$

L'ascissa di convergenza in questo caso è  $\beta = \operatorname{Re}(\alpha)$ .

### 6. Funzioni seno e coseno

Si considerino le funzioni  $\sin(\omega t) \delta_{-1}(t)$  e  $\cos(\omega t) \delta_{-1}(t)$ , con  $\omega \in \mathbb{R}$ . Utilizzando la relazione di Eulero e quindi le (5.1) e (5.2), è immediato ricavare che

$$\mathcal{L} \{ \sin(\omega t) \delta_{-1}(t) \} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

e

$$\mathcal{L} \{ \cos(\omega t) \delta_{-1}(t) \} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

L'ascissa di convergenza è in entrambi i casi  $\beta = 0$ .

Inoltre

$$\mathcal{L} \{ [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)] \delta_{-1}(t) \} = \frac{a s + b \omega}{s^2 + \omega^2},$$

e

$$\mathcal{L} \{ e^{\alpha t} \sin(\omega t) \delta_{-1}(t) \} = \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{L} \{ e^{\alpha t} \cos(\omega t) \delta_{-1}(t) \} = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}. \quad (5.8)$$

Infine

$$\mathcal{L} \{ e^{\alpha t} [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)] \delta_{-1}(t) \} = \frac{a(s - \alpha) + b \omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}.$$

## 5.3 Il Teorema del Valore Finale

Il seguente teorema risulta di grande interesse in diversi contesti, in particolare sarà di grande utilità quando si forniranno gli strumenti per il progetto di un sistema di controllo.

**Teorema 1** *Sia  $F(s)$  la trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$ . Nell'ipotesi che  $f(t)$  e  $f'(t)$  presentino ascisse di convergenza non positive e che il  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  esista, vale la relazione:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s).$$

**Prova.** Si può scrivere

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau) d\tau,$$

per cui

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(0) + \int_0^{\infty} f'(\tau) d\tau.$$

Ma  $\int_0^\infty f'(\tau)d\tau$  è in effetti la trasformata di Laplace di  $f'(t)$  calcolata in  $s = 0$ . Infatti

$$\int_0^\infty f'(\tau)d\tau = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\{f'(t)\}.$$

Dalla proprietà della trasformata della derivata si ha:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

Mettendo insieme le precedenti, in conclusione si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(0) + \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

□

### 5.3.1 Qualche applicazione del Teorema del Valore Finale

- Si consideri  $f(t) = \delta_{-1}(t)$  con  $F(s) = 1/s$ . In effetti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{-1}(t) = 1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s).$$

- Si consideri  $f(t) = t\delta_{-1}(t)$  con  $F(s) = 1/s^2$ . In effetti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t\delta_{-1}(t) = \infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s).$$

- Si consideri  $f(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$  con  $F(s) = 1/(s+1)$ . In effetti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}\delta_{-1}(t) = 0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s+1} = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s).$$

- Si consideri  $f(t) = e^t\delta_{-1}(t)$  con  $F(s) = 1/(s-1)$ . Si ha in questo caso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t\delta_{-1}(t) = \infty \neq 0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s-1} = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s).$$

In questo caso la tesi del teorema non vale in quanto non risulta verificata la condizione del teorema secondo cui  $\beta$  deve essere non positiva (qui  $\beta$  vale 1).



## Capitolo 6

### Calcolo delle risposte mediante la trasformata di Laplace e rappresentazioni I-U ed I-S-U equivalenti

#### 6.1 Calcolo della risposta nel dominio della trasformata a partire da I-S-U

Applichiamo la trasformata di Laplace alla rappresentazione I-S-U di un sistema lineare e stazionario con stato  $x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Si ha:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX(s) - x_0 \quad (6.2)$$

essendo  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  il vettore che ha per elementi le trasformate degli elementi  $x_i(t)$  di  $x(t)$ :

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \dots \\ X_{\bar{n}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{x_1(t)\} \\ \mathcal{L}\{x_2(t)\} \\ \dots \\ \mathcal{L}\{x_{\bar{n}}(t)\} \end{bmatrix}$$

e  $x_0 = x(t)|_{t=0}$  le condizioni iniziali assegnate. Per la linearità della trasformata si ha:

$$\mathcal{L}\{Ax(t) + Bu(t)\} = AX(s) + BU(s) \quad (6.3)$$

$$\mathcal{L}\{Cx(t) + Du(t)\} = CX(s) + DU(s) \quad (6.4)$$

essendo  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  la trasformata della funzione di ingresso. Sostituendo (6.2) e (6.3) in (6.1) si ottiene:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

Indicando con  $I$  la matrice identità di ordine  $\bar{n}$ , la precedente diventa:

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

da cui:

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{risposta libera nello stato}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{\text{risposta forzata nello stato}} \quad (6.5)$$

La parte indicata come risposta libera dipende solo dalle condizioni iniziali, la parte indicata come risposta forzata dipende solo dall'ingresso. La matrice  $(sI - A)^{-1}$  è una matrice  $\bar{n} \times \bar{n}$  i cui elementi sono funzioni *razionali* di  $s$ , cioè costituite dal rapporto di due polinomi. Le funzioni razionali sono dette *strettamente proprie* quando il grado del polinomio a numeratore è minore strettamente del grado del polinomio a denominatore. Sono dette *proprie* quando il grado del polinomio a numeratore è minore o uguale al grado del polinomio a denominatore. Gli elementi di  $(sI - A)^{-1}$  sono, come si vedrà più avanti, funzioni razionali strettamente proprie.

Antitrasformando gli  $\bar{n}$  elementi di  $X(s)$  calcolati con (6.5), si ottiene la risposta  $x(t)$  nel tempo dello stato. **Da notare che  $x(t)$  è un vettore, ossia è composto da  $\bar{n}$  elementi.**

Con riferimento all'uscita, utilizzando (6.4) si ottiene da (6.1):

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

da cui, sostituendo (6.5), si arriva a

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{risposta libera nell'uscita}} + \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)}_{\text{risposta forzata nell'uscita}} \quad (6.6)$$

Anche qui la  $y(t)$  si ottiene antitrasformando la  $Y(s)$  fornita da (6.6), che in questo caso è una funzione razionale strettamente propria. Quindi la procedura sarà la seguente: assegnati  $x_0$  e  $u(t)$ , determinare la trasformata dell'ingresso  $U(s)$ , calcolare  $Y(s)$  con (6.6) e antitrasformare per ottenere  $y(t)$ . La procedura di antitrasformazione verrà affrontata più avanti.

Se si fanno i conti indicati in (6.6), si arriva a un'espressione del seguente tipo:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{v_0 + v_1s + \dots + v_{r-1}s^{r-1}}{d_0 + d_1s + \dots + s^r}}_{\text{risposta libera nell'uscita}} + \underbrace{\frac{p_0 + p_1s + \dots + p_ms^m}{q_0 + q_1s + \dots + s^n}}_{\text{risposta forzata nell'uscita}} U(s) \quad (6.7)$$

dove il polinomio:

$$V(s) = v_0 + v_1s + \dots + v_{r-1}s^{r-1}$$

dipende dalle condizioni iniziali  $x_0$  mentre il polinomio

$$D(s) = d_0 + d_1s + \dots + s^r$$

è un fattore del determinante di  $sI - A$ .

La funzione che lega in  $s$  la trasformata dell'ingresso alla trasformata dell'uscita:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (6.8)$$

è detta *funzione di trasferimento* del sistema. Anche questa è una funzione razionale propria se  $D \neq 0$  e strettamente propria se  $D = 0$ . Anche il polinomio

$$Q(s) = q_0 + q_1s + \dots + s^n$$

è un fattore del determinante di  $sI - A$  perché, a seconda delle matrici  $B$  e  $C$  (e cioè, come vedremo, a seconda della raggiungibilità e osservabilità o meno del sistema), si possono avere semplificazioni tra numeratore e denominatore. Pertanto avremo la seguente relazione:

$$m \leq n \leq \bar{n}$$

con  $n \equiv \bar{n}$  solo nel caso non ci siano semplificazioni (e il sistema, vedremo, è raggiungibile e osservabile).

**Esempio.** Si consideri un sistema lineare e stazionario con rappresentazione I-S-U caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1, 0] \quad D = 0.$$

Si ha:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

e

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}.$$

Se  $x_0 = [a; b]'$ , la (6.7) diventa in questo caso:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) = \frac{as + 4a + b}{s^2 + 4s + 3} + \frac{1}{s^2 + 4s + 3}U(s).$$

Sicché in questo caso i polinomi  $D(s)$  e  $Q(s)$  nella (6.7) coincidono con il polinomio caratteristico di  $A$  (cioè  $r = n = \bar{n} = 2$ ). Esistono tuttavia dei valori delle condizioni iniziali  $a$  e  $b$  per cui si potrebbe avere una semplificazione nel primo termine: per esempio con  $a = 1$  e  $b = -1$  tale termine diverrebbe  $1/(s+1)$ , per cui il polinomio  $D(s)$  sarebbe solo un fattore del polinomio caratteristico e si avrebbe  $r = 1$ .  $\square$

Fare riferimento alla sezione 6.4 per vedere un esempio più completo di applicazione delle formule di questa sezione.

## 6.2 Calcolo della risposta nel dominio della trasformata a partire da I-U

Applichiamo la trasformata di Laplace alla rappresentazione I-U di un sistema lineare e stazionario:

$$\begin{cases} a_0y(t) + a_1\dot{y} + \dots + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + y^{(n)}(t) = b_0u(t) + b_1\dot{u} + \dots + b_mu^{(m)}(t) \\ y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}, i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (6.9)$$

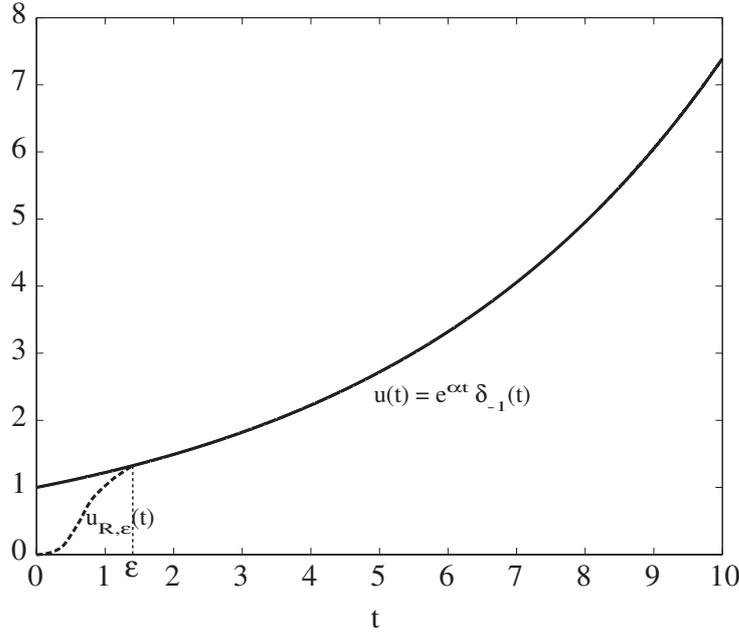
per determinare l'espressione (in  $s$ ) dell'uscita una volta assegnate le condizioni iniziali  $y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  e l'ingresso  $u(t)$ . Sia  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  e  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ . Per quanto riguarda l'uscita, ricordando la trasformata della derivata di una funzione, si ha:

$$\mathcal{L}\{\dot{y}\} = sY(s) - y_0 \quad (6.10)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} = s^2Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 \quad (6.11)$$

$$\dots \quad (6.12)$$

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} = s^nY(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}\dot{y}_0 - \dots - y_0^{(n-1)} \quad (6.13)$$



**Figura 6.1:** Segnale di ingresso ideale  $u(t)$  (tratto continuo) e reale  $u_{R,\epsilon}(t)$  (tratteggiato)

Per quanto riguarda la  $u(t)$ , si ricorda che stiamo considerando ingressi che vengono applicati a partire da  $0^+$ , cioè che valgono zero con tutte le loro derivate fino a  $t = 0^1$ . In base a ciò avremo:

$$\mathcal{L}\{\dot{u}\} = sU(s) \tag{6.14}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{u}\} = s^2U(s) \tag{6.15}$$

$$\dots \tag{6.16}$$

$$\mathcal{L}\{u^{(m)}(t)\} = s^mU(s) \tag{6.17}$$

Sostituendo le (6.10)-(6.13) e (6.14)-(6.17) in (6.9), si ottiene:

$$\begin{aligned} a_0Y(s) + a_1(sY(s) - y_0) + a_2(s^2Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0) + \dots + (s^nY(s) - s^{n-1}y_0 - \dots - y_0^{(n-1)}) &= \\ = b_0U(s) + b_1sU(s) + b_2s^2U(s) + \dots + b_ms^mU(s). \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini in  $U(s)$  e  $Y(s)$  e dividendo per il polinomio che moltiplica  $Y(s)$  si ottiene:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{c_0 + c_1s + \dots + c_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + \dots + s^n}}_{\text{risposta libera nell'uscita}} + \underbrace{\frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^n}U(s)}_{\text{risposta forzata nell'uscita}} \tag{6.18}$$

<sup>1</sup>Questo deriva da un discorso al limite di ciò che accade nella realtà (vedi Fig. 6.1). In pratica la  $u(t)$  ideale considerata corrisponde al  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_{R,\epsilon}(t)$ , dove  $u_{R,\epsilon}(t)$  è un segnale che si potrebbe ottenere in un esperimento reale (vedi Figura). Ora,  $u_{R,\epsilon}(t)$ , qualsiasi sia  $\epsilon$ , è tale che  $u_{R,\epsilon}(0) = 0$  e sono nulle anche tutte le sue derivate in 0. Nel caso ideale, cioè quando si considera  $u(t)$ , l'effetto di passare da una funzione piatta in 0 a una funzione generica per  $0^+$  è ottenuto mediante opportuni impulsi. In questo modo, anche per  $u(t)$ , vale che  $u(0) = 0$  e tutte le sue derivate in 0 sono nulle. Esempio:  $u(t) = e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$ . Si ha:  $\dot{u} = \delta_0(t) + \alpha e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$ . Trasformando si ottiene:  $\mathcal{L}\{\dot{u}\} = 1 + \frac{\alpha}{s-\alpha} = \frac{s}{s-\alpha} \equiv sU(s)$ .

Il polinomio

$$C(s) = c_0 + c_1s + \dots + c_{n-1}s^{n-1}$$

dipende dalle condizioni iniziali  $y_0^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . In questo caso non ci può essere semplificazione tra i polinomi

$$p_A(s) = a_0 + a_1s + \dots + s^n$$

e

$$p_B(s) = b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m$$

avendo assunto questo precedentemente per tutte le rappresentazioni I-U che consideriamo. La funzione

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^n} \quad (6.19)$$

rappresenta la funzione di trasferimento del sistema espressa in termini della rappresentazione IU qui considerata.

**Esempio.** Si consideri un sistema lineare e stazionario con rappresentazione I-U data da:

$$\ddot{y} - \dot{y} + 2y = u - \dot{u}$$

e si considerino le seguenti condizioni iniziali:  $y_0 = 1$  e  $y'(0) = 0$ . Le (6.10)-(6.13) insieme alle (6.14)-(6.17) permettono di arrivare alla seguente espressione:

$$(s^2Y(s) - s) - (sY(s) - 1) + 2Y(s) = U(s) - sU(s),$$

da cui:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s+2} + \frac{1-s}{s^2-s+2}U(s),$$

che corrisponde alla (6.18) scritta per questo caso particolare.

### 6.3 Equivalenza di rappresentazioni I-S-U e I-U

Come osservato in precedenza, la rappresentazione I-U descrive solo la parte raggiungibile e osservabile di un sistema. Pertanto, se il sistema è raggiungibile e osservabile (ossia è composto dal solo blocchetto raggiungibile e osservabile e gli altri blocchetti non ci sono), le due rappresentazioni saranno del tutto equivalenti. In questo caso, partendo da una rappresentazione, per ricavare l'altra basta fare in modo che le due rappresentazioni abbiano la stessa funzione di trasferimento  $W(s)$ . Infatti, se hanno stessa funzione di trasferimento, si può dimostrare che automaticamente anche le possibili risposte libere sono le stesse per le due rappresentazioni, nel senso che per ogni  $x_0$  esiste un insieme di valori  $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  per cui le due risposte libere coincidono, e viceversa. Quindi in questo caso l'equivalenza è completa e basta assicurare che le due rappresentazioni abbiano stessa funzione di trasferimento.

Se invece il sistema non è raggiungibile e osservabile, può accadere che l'insieme delle risposte libere ottenibili dalla sua rappresentazione I-U è solo una parte di tutte le risposte libere del sistema, ossia delle risposte libere ottenibili con la sua rappresentazione I-S-U<sup>2</sup>. Se ciò capita, le due rappresentazioni sono equivalenti nel senso che la rappresentazione I-U è equivalente alla sola parte raggiungibile e osservabile del sistema. Anche qui quindi, garantire che le funzioni

<sup>2</sup>Questo di fatto capita se c'è una parte osservabile non raggiungibile

di trasferimento coincidono, implica automaticamente che anche l'insieme delle risposte libere ottenibili dalla rappresentazione I-U e l'insieme delle risposte libere della parte raggiungibile e osservabile del sistema coincidono.

Per quanto detto, quindi, l'equivalenza tra le due rappresentazioni si ottiene limitandosi a considerare la sola funzione di trasferimento, cioè il solo legame tra  $U(s)$  e  $Y(s)$ , cioè ancora la sola risposta forzata nelle due rappresentazioni. Diremo quindi che una rappresentazione I-U è equivalente a una rappresentazione I-S-U quando hanno *la stessa funzione di trasferimento*. Per questo motivo, quando calcoleremo le rappresentazioni equivalenti, potremo dimenticarci delle condizioni iniziali e assumerle tutte nulle.

### 6.3.1 Da I-S-U a I-U

In questa sezione, assegnata una rappresentazione I-S-U del tipo (6.1), vogliamo ricavare l'*unica* rappresentazione I-U (cioè del tipo (6.9)) equivalente. È questo un problema piuttosto semplice che però può produrre una rappresentazione I-U con derivata  $n$  massima dell'uscita minore dell'ordine  $\bar{n}$  dello stato del sistema nella sua rappresentazione I-S-U. Questo vedremo tra un attimo capita quando, calcolando la funzione di trasferimento  $W(s)$ , si ha una semplificazione tra numeratore e denominatore. Ciò accade quando il sistema non è raggiungibile e osservabile. Se invece il sistema è raggiungibile e osservabile, tale semplificazione non c'è, e in tal caso si otterrà una I-U con  $n \equiv \bar{n}$ . La procedura per ricavare dalla I-S-U la I-U equivalente è la seguente:

1. Calcolare la funzione di trasferimento della rappresentazione I-S-U:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Facendo i conti si ottiene una funzione razionale (rapporto di due polinomi) in  $s$  del tipo:

$$W(s) = \frac{p_0 + p_1s + \dots + p_ms^m}{q_0 + q_1s + \dots + s^n}$$

dove  $m \leq n \leq \bar{n}$ . Si ha  $m \equiv n$  se e solo se  $D \neq 0$  e  $n \equiv \bar{n}$  se e solo se il sistema è raggiungibile e osservabile.

2. Dalla relazione  $Y(s) = W(s)U(s)$  si ricava:

$$(q_0 + q_1s + \dots + s^n)Y(s) = (p_0 + p_1s + \dots + p_ms^m)U(s)$$

3. Dalla relazione precedente in  $s$ , ricordando che in questa equivalenza di rappresentazioni stiamo considerando condizioni iniziali nulle, si ricava la corrispondente relazione nel tempo, che è la rappresentazione I-U cercata:

$$q_0y(t) + q_1\dot{y} + q_2y^{(2)}(t) + \dots + q_{n-1}y^{(n-1)}(t) + y^{(n)}(t) = p_0u(t) + p_1\dot{u} + p_2u^{(2)}(t) + \dots + p_mu^{(m)}(t)$$

### 6.3.2 Da I-U a I-S-U

Il problema di ricavare una rappresentazione I-S-U a partire da una rappresentazione I-U è più complesso ed è noto in ambito sistemistico come *Teoria della realizzazione*. Infatti, il problema consiste nel trovare una realizzazione in variabili di stato che fornisca la stessa funzione di trasferimento (cioè lo stesso legame ingresso-uscita) della rappresentazione I-U assegnata. L'interesse di questo problema è notevole anche in termini pratici: avere la rappresentazione I-S-U di un sistema consente di applicare molti risultati analitici per queste rappresentazioni e di simulare

(con un PC ma anche con un circuito elettrico) il comportamento di un sistema, cosa che non sarebbe fattibile con la stessa efficacia utilizzando la rappresentazione I-U.

Il problema è complesso anche perché sono infinite le rappresentazioni I-S-U equivalenti a una rappresentazione I-U assegnata. Noi in questo corso ne daremo una sola, e una di dimensione minima, cioè con dimensione dello stato pari a  $n$ , l'ordine massimo della derivata dell'uscita in (6.9). Si può dimostrare che tutte le rappresentazioni I-S-U raggiungibili e osservabili di una data I-U hanno stessa dimensione e che questa dimensione è la minima possibile<sup>3</sup>. Pertanto in questo corso daremo una particolare realizzazione raggiungibile e osservabile<sup>4</sup>. Si procede nel seguente modo: data una rappresentazione I-U del tipo (6.9), con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^n}, \quad (6.20)$$

la seguente rappresentazione I-S-U con stato di dimensione  $n$  ha la stessa funzione di trasferimento  $W(s)$ :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.21)$$

$$y = Cx + Du \quad (6.22)$$

dove le matrici  $A$ ,  $B$  sono date da:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se  $m < n$ ,  $C$  e  $D$  sono date da:

$$C = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-m-1 \text{ zeri}}] \quad D = 0.$$

Se  $m = n$ ,  $C$  e  $D$  sono date da:

$$C = [b_0 - a_0b_n, b_1 - a_1b_n, b_2 - a_2b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1}b_n] \quad D = b_n.$$

Se andassi a calcolare  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  dovrebbe venire la  $W(s)$  in (6.20). Lo dimostriamo nel seguente modo. Dalla scelta di matrici indicata si ha:

$$\dot{x}_1 = x_2(t) \quad (6.23)$$

$$\dot{x}_2 = x_3(t) \quad (6.24)$$

$$\dots \quad \dots \quad (6.25)$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n(t) \quad (6.26)$$

$$\dot{x}_n = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \dots - a_{n-1}x_n(t) + u(t). \quad (6.27)$$

<sup>3</sup>Vale anche che tutte le rappresentazioni raggiungibili e osservabili (cioè di dimensione minima) I-S-U di una data I-U sono coincidenti a meno di un cambiamento di base dello spazio di stato.

<sup>4</sup>Tale rappresentazione è nota come *forma canonica di controllo*. Essa è sempre raggiungibile. È anche osservabile se, come assunto in precedenza nel corso, i polinomi  $p_A(s)$  e  $p_B(s)$  (associati alla rappresentazione I-U del sistema considerato) sono primi fra loro.

In  $s$  le prime  $n - 1$  equazioni diventano<sup>5</sup>:

$$sX_1(s) = X_2(s) \quad (6.28)$$

$$sX_2(s) = X_3(s) \quad (6.29)$$

$$\dots \quad (6.30)$$

$$sX_{n-1}(s) = X_n(s), \quad (6.31)$$

da cui si ricava:

$$X_i(s) = s^{i-1}X_1(s) \quad (6.32)$$

per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ . L'equazione (6.27) diventa allora:

$$s^n X_1(s) = -a_0 X_1(s) - a_1 s X_1(s) - \dots - a_{n-1} s^{n-1} X_1(s) + U(s)$$

da cui raccogliendo e dividendo per il polinomio che moltiplica  $X_1(s)$ :

$$X_1(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} U(s). \quad (6.33)$$

Consideriamo  $m < n$ . Allora, in  $s$ , l'uscita è data da:

$$Y(s) = b_0 X_1(s) + b_1 X_2(s) + \dots + b_m X_{m+1}(s)$$

da cui, utilizzando (6.32), e raccogliendo:

$$Y(s) = (b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m) X_1(s)$$

che, sostituendo (6.33), fornisce

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} U(s)$$

da cui si vede che la  $W(s)$  è quella desiderata (cfr. con (6.20)). Nel caso fosse  $m = n$ , basta osservare che, facendo la divisione tra polinomi,

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n} \\ &= b_n + \frac{b_0 - a_0 b_n + (b_1 - a_1 b_n)s + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n)s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n}. \end{aligned}$$

Si consideri ora solo il termine frazionario a destra in cui  $m = n - 1 < n$  e si applichi l'analisi del caso  $m < n$ . È chiaro che la scelta delle matrici  $A$ ,  $B$  e  $C$  indicata nel caso  $m = n$  fornisce

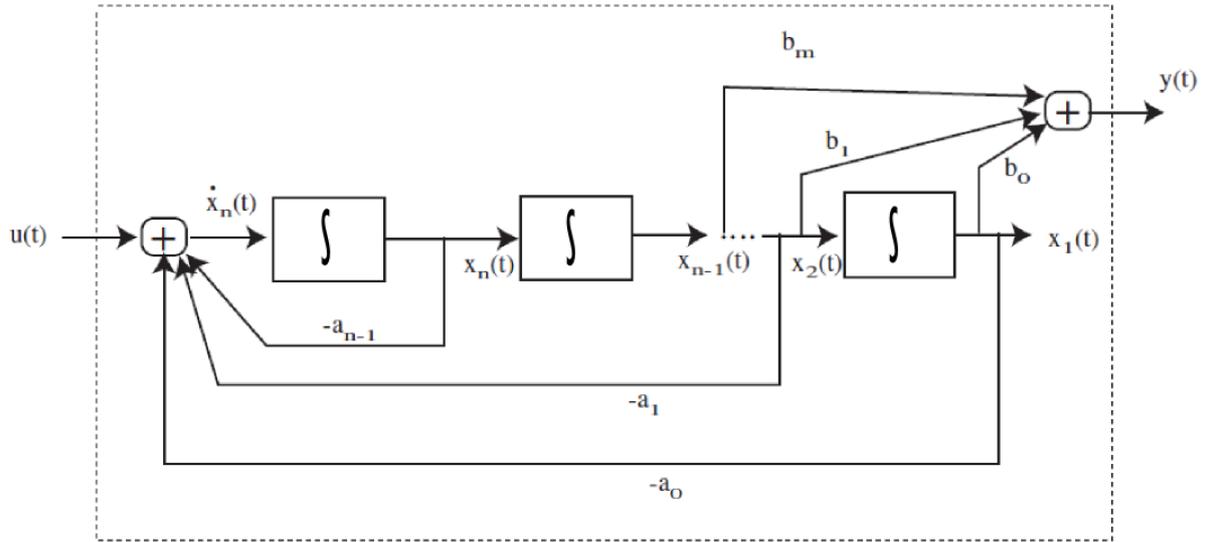
$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{b_0 - a_0 b_n + (b_1 - a_1 b_n)s + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n)s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n}$$

È evidente allora che con  $D = b_n$  (che è la scelta indicata nel caso  $m = n$ ) si ottiene

$$C(sI - A)^{-1}B + D = b_n + \frac{b_0 - a_0 b_n + (b_1 - a_1 b_n)s + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n)s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n}$$

che è la funzione di trasferimento desiderata. In Fig. 6.2, si riporta un possibile schema circuitale (costituito solo da moduli integratori e sommatore) che permette di simulare la rappresentazione I-S-U indicata in questa sezione nel caso  $m < n$ . Lo schema del caso  $m = n$  si ricava immediatamente.

<sup>5</sup>Si ricorda ancora una volta che in questa equivalenza di rappresentazioni stiamo assumendo condizioni iniziali nulle, per cui la trasformata di  $\dot{x}_i$  è semplicemente  $sX_i(s)$ .



**Figura 6.2:** Lo schema che riproduce il comportamento della rappresentazione I-S-U indicata nella sezione 6.3.2. I blocchi effettuano un'operazione di integrazione

## 6.4 Esempio

Sia data una rappresentazione I-S-U con  $x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  e  $\bar{n} = 3$ , con matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1, 0, 1] \quad D = 1$$

con condizioni iniziali

$$x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Facendo i calcoli si trova:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2(s-1)} \begin{bmatrix} s(s+1) & s+1 & 0 \\ s+1 & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(s-1) \end{bmatrix}$$

essendo  $(s+1)^2(s-1) = \det(sI - A)$  il polinomio caratteristico di  $A$  (i suoi zeri sono gli autovalori di  $A$ ). Applicando la formula (6.6) si ottiene:

$$Y(s) = \frac{(a+c)s^2 + (a+b)s + b - c}{(s+1)^2(s-1)} + \frac{s^2 + 2s - 2}{(s+1)(s-1)} U(s).$$

Si nota come il numeratore del primo termine si annulla per  $s = -1$ , qualsiasi siano i valori di  $a$ ,  $b$  e  $c$  (del resto il fattore  $s + 1$  compare a numeratore su tutti gli elementi di  $(sI - A)^{-1}$  e può quindi essere semplificato già nell'espressione finale di questa matrice). Pertanto un fattore  $s + 1$  è presente sia a numeratore sia a denominatore del primo termine. Se lo si semplifica, si arriva alla seguente espressione finale:

$$Y(s) = \frac{(a+c)s + b - c}{(s+1)(s-1)} + \frac{s^2 + 2s - 2}{(s+1)(s-1)}U(s).$$

Questa espressione è in effetti, come ci aspettavamo, del tipo indicato in (6.7), cioè è il rapporto di polinomi in cui nella risposta libera in generale ho a denominatore una parte del (o tutto il) determinante di  $sI - A$ , a numeratore un polinomio che dipende dalle condizioni iniziali e, nella risposta forzata, una funzione di trasferimento in cui il denominatore può non coincidere col determinante di  $sI - A$  se, come in questo caso, ci sono state semplificazioni col numeratore. In questo caso, con riferimento alla (6.7), nella funzione di trasferimento ho  $m = n = 2 < 3 = \bar{n}$ . La funzione di trasferimento è data da:

$$W(s) = \frac{s^2 + 2s - 2}{(s+1)(s-1)}$$

Applicando la procedura descritta nella sezione 6.3.1, ottengo la seguente rappresentazione I-U:

$$\ddot{y} - y(t) = \ddot{u} + 2\dot{u} - 2u(t)$$

Osserviamo che la rappresentazione I-U ha ordine massimo di derivazione della  $y$  pari a 2, minore di  $\bar{n} = 3$ . Questo è accaduto perché ci sono state semplificazioni nel calcolo della  $W(s)$ . Ciò significa che il sistema di partenza non era raggiungibile e osservabile e la rappresentazione I-U descrive solo la parte raggiungibile e osservabile.

In effetti, se considero il cambiamento di coordinate<sup>6</sup>  $z = Tx$ , con

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

si arriva a un sistema (nelle variabili di stato modificate  $z$ ) descritto dalle seguenti matrici:

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = CT^{-1} = [2/3, -1/3, 0] \quad \bar{D} = D = 1.$$

In tali coordinate si intuisce (e in effetti è proprio così) come la coppia di variabili  $z_1$  e  $z_2$  sia raggiungibile e osservabile (si noti infatti come le due variabili interagiscono tra di loro, entrambe influenzano l'uscita e  $z_1$  è influenzata dal controllo) e hanno una dinamica descritta dal minore  $2 \times 2$  in alto a sinistra di  $A$ , caratterizzato dagli autovalori  $-1$  e  $1$  (che sono proprio gli zeri del denominatore della funzione di trasferimento  $W(s)$ ). La variabile  $z_3$ , che evolve con un autovalore pari a  $-1$ , è invece completamente isolata, cioè non è né raggiungibile né osservabile. Con riferimento alla Fig. 3.1, in questo caso il sistema presenta un blocchetto  $z_a$  che comprende  $z_1$  e  $z_2$  e un blocchetto  $z_d$  che comprende solo  $z_3$  e si ha quindi  $n = n_a = 2$ ,  $n_b = n_c = 0$  e  $n_d = 1$ .

Se partissi dalla rappresentazione I-U ottenuta sopra, con condizioni iniziali  $y_0$  e  $\dot{y}_0$ , otterrei la seguente espressione per l'uscita:

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \dot{y}_0}{s^2 - 1} + \frac{s^2 + 2s - 2}{s^2 - 1}U(s)$$

<sup>6</sup>Si ricorda ancora una volta che il modo con cui si determina questo cambiamento di coordinate, che serve per mettere in luce le parti raggiungibili ed osservabili di un sistema, non rientra tra gli scopi di questo corso.

che è del tipo indicato in (6.18). Come atteso, la funzione di trasferimento è ancora

$$W(s) = \frac{s^2 + 2s - 2}{(s + 1)(s - 1)}.$$

Applichiamo ora la procedura della sezione 6.3.2 e determiniamo una rappresentazione I-S-U equivalente alla I-U assegnata, cioè con funzione di trasferimento la  $W(s)$  indicata, che possiamo riscrivere come:

$$W(s) = \frac{s^2 + 2s - 2}{s^2 - 1}$$

Confrontando tale  $W(s)$  con (6.20) si ottiene  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $b_0 = -2$ ,  $b_1 = 2$  e  $b_2 = 1$ . Pertanto, le matrici della rappresentazione I-S-U sono (caso  $m = n = 2$ ):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = [-1, 2] \quad D = 1$$

*Esercizio: verificare che*

$$C(sI - A)^{-1}B + D \equiv \frac{s^2 + 2s - 2}{s^2 - 1}$$

□

Si nota che la dimensione dello stato è 2 mentre la dimensione dello stato della rappresentazione I-S-U da cui eravamo partiti era 3. Questo è accaduto perché siamo partiti da un sistema non raggiungibile e osservabile per cui l'ultima rappresentazione I-S-U ottenuta descrive solo la parte raggiungibile e osservabile del sistema di partenza.

## 6.5 Calcolo della risposta nel dominio del tempo: la trasformata inversa di Laplace di funzioni razionali strettamente proprie.

Si è visto che (cfr. (6.5)):

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{risposta libera nello stato}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{\text{risposta forzata nello stato}} \quad (6.34)$$

Ora, tutti gli elementi di  $(sI - A)^{-1}$  sono rapporti di polinomi in  $s$ : a numeratore dell'elemento  $(i, j)$  di tale matrice c'è infatti il determinante della matrice che si ottiene da  $sI - A$  cancellando la riga  $j$ -esima e la colonna  $i$ -esima (moltiplicato per  $(-1)^{i+j}$ ). Si tratta di un polinomio di grado al più  $\bar{n} - 1$  (dove  $\bar{n}$  è la dimensione di  $A$ ). A denominatore dell'elemento  $(i, j)$  c'è il determinante di  $(sI - A)$  che ha grado  $\bar{n}$ . In definitiva, ogni elemento di  $(sI - A)^{-1}$  è il rapporto di due polinomi in  $s$  con il grado del polinomio a numeratore minore strettamente di quello a denominatore.

**Definizione 2** Una funzione  $F(s)$  di variabile  $s$  è detta razionale se è il rapporto di due polinomi in  $s$ . Viene detta razionale propria se il grado del denominatore è maggiore o uguale a quello del numeratore. Viene detta razionale strettamente propria se il grado del denominatore è maggiore di quello del numeratore.

Secondo la definizione e in base a quanto detto pocanzi, gli elementi di  $(sI - A)^{-1}$  sono funzioni razionali strettamente proprie. È evidente che la risposta libera nello stato (si veda la (6.34)) è una combinazione lineare di questi elementi e sarà quindi ancora un vettore di funzioni razionali strettamente proprie. Per quanto riguarda la risposta forzata, la funzione  $(sI - A)^{-1}B$  è per gli stessi motivi della risposta libera una funzione razionale strettamente propria. Per quanto riguarda  $U(s)$ , poiché nel seguito si considereranno solo funzioni  $u(t)$  di tipo polinomiale, esponenziale, sinusoidale, anche  $U(s)$  risulta una funzione razionale strettamente propria. Poiché il prodotto di funzioni razionali (strettamente) proprie è ancora una funzione razionale (strettamente) propria (e lo stesso vale per la somma), ne segue che tutto lo stato  $X(s)$  ha elementi che sono funzioni razionali strettamente proprie. La seguente espressione sintetizza quanto si è appena detto:

$$\begin{aligned}
 X(s) = & \underbrace{(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{Raz. strett. prop.}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}B}_{\text{Raz. strett. prop.}} \underbrace{U(s)}_{\text{Funz. raz. strett. prop.}} \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Raz. strett. prop.}} \\
 & \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Vettore di funzioni razionali strettamente proprie}}
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

Quindi

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$$

è un vettore i cui elementi  $X_i(s)$  sono tutti funzioni razionali strettamente proprie.

Un discorso analogo si può ripetere per la risposta in uscita  $Y(s)$ :

$$\begin{aligned}
 Y(s) = & \underbrace{C(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{Raz. strett. prop.}} + \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{\text{Raz. prop.}} \underbrace{U(s)}_{\text{Funz. raz. strett. prop.}} \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Raz. strett. prop.}} \\
 & \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Funzione (scalare) razionale strettamente propria}}
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Da tutto questo discorso risulta evidente che per calcolare  $x(t)$  e  $y(t)$  (cioè la risposta in uscita e nello stato, libera forzata e completa) è sufficiente saper calcolare la trasformata inversa di Laplace delle sole funzioni razionali strettamente proprie, cioè di funzioni del tipo:

$$F(s) = \frac{c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}, \tag{6.37}$$

con  $m < n$ . Si noti che il coefficiente del termine di grado massimo a denominatore è stato supposto pari a uno: questo è sempre possibile ottenerlo senza perdita di generalità in quanto se così non fosse basta dividere denominatore e numeratore per  $a_n$  per ricondursi alla forma (6.37).

### 6.5.1 Procedura per il calcolo della trasformata inversa di Laplace di funzioni razionali strettamente proprie

Per calcolare  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  si procede nel seguente modo.

1. Si calcolano le radici del polinomio a denominatore di  $F(s)$ , dette *poli* di  $F(s)$ . La  $F(s)$  può quindi essere scritta nel seguente modo che mette in luce i poli  $p_i$  della funzione con le loro molteplicità  $m_i$ :

$$F(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_m s^m}{(s - p_1)^{m_1} (s - p_2)^{m_2} \dots (s - p_\ell)^{m_\ell}},$$

con  $m_1 + m_2 + \dots + m_\ell = n$ .

2. Si scompone  $F(s)$  in fratti semplici:

$$\begin{aligned} F(s) = & \frac{\alpha_{1,1}}{(s - p_1)} + \frac{\alpha_{1,2}}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{1,m_1}}{(s - p_1)^{m_1}} + \\ & + \frac{\alpha_{2,1}}{(s - p_2)} + \frac{\alpha_{2,2}}{(s - p_2)^2} + \dots + \frac{\alpha_{2,m_2}}{(s - p_2)^{m_2}} + \\ & \vdots \\ & + \frac{\alpha_{\ell,1}}{(s - p_\ell)} + \frac{\alpha_{\ell,2}}{(s - p_\ell)^2} + \dots + \frac{\alpha_{\ell,m_\ell}}{(s - p_\ell)^{m_\ell}}, \end{aligned}$$

o, in forma compatta:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(s - p_i)^j}.$$

Le costanti  $\alpha_{i,j}$  vanno calcolate in modo tale che, raccogliendo la precedente a fattor comune, a numeratore torni il polinomio  $c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_m s^m$ . È abbastanza semplice (ma oneroso) verificare che la seguente formula fornisce i valori di  $\alpha_{i,j}$  cercati.

$$\alpha_{i,j} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(m_i - j)!} \frac{d^{m_i - j}}{ds^{m_i - j}} [(s - p_i)^{m_i} F(s)], \quad j = 1, 2, \dots, m_i. \quad (6.38)$$

Nel caso di  $m_i = 1$ , tenendo conto che  $0! = 1$ , la formula precedente di fatto si riduce a

$$\alpha_{i,1} = \alpha_i = \lim_{s \rightarrow p_i} [(s - p_i) F(s)]. \quad (6.39)$$

Si noti che nel caso  $m_i > 1$  conviene procedere al calcolo degli  $\alpha_{ij}$  a partire da  $j = m_i$  fino a  $j = 1$  in quanto al diminuire di  $j$  cresce l'ordine della derivata da calcolare.

3. Si antitrasformano i singoli fratti semplici:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - p_i)^j} \right\} = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_i t} \delta_{-1}(t),$$

ottenendo quindi

$$\begin{aligned} f(t) = & \left[ \alpha_{1,1} e^{p_1 t} + \alpha_{1,2} t e^{p_1 t} + \dots + \alpha_{1,m_1} \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!} e^{p_1 t} + \right. \\ & + \alpha_{2,1} e^{p_2 t} + \alpha_{2,2} t e^{p_2 t} + \dots + \alpha_{2,m_2} \frac{t^{m_2-1}}{(m_2-1)!} e^{p_2 t} + \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$+ \alpha_{\ell,1} e^{p_\ell t} + \alpha_{\ell,2} t e^{p_\ell t} + \dots + \alpha_{\ell,m_\ell} \frac{t^{m_\ell-1}}{(m_\ell-1)!} e^{p_\ell t} \Big] \delta_{-1}(t)$$

o, in forma compatta,

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_i t} \delta_{-1}(t). \quad (6.40)$$

Se i poli  $p_i$  sono tutti reali, la (6.40) è la soluzione finale cercata. Se invece qualche  $p_i$  non è reale, occorre manipolare un pochino la (6.40) al fine di ottenere una funzione  $f(t)$  tutta reale, in cui cioè non compaiano elementi complessi. Ciò, se si parte da una funzione razionale strettamente propria  $F(s)$  a coefficienti reali, è sempre possibile. Prima di mostrare come procedere nel caso di qualche  $p_i$  complesso, si riporta un esempio.

## 6.6 Esempio di calcolo della risposta a partire da IU e passaggio IU $\rightarrow$ ISU

Si consideri un sistema lineare stazionario descritto dalla seguente equazione Ingresso-Uscita:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = u. \quad (6.41)$$

### 6.6.1 Calcolo della risposta a partire da condizioni iniziali nulle

Si calcoli la risposta nell'uscita  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ , a partire da condizioni iniziali nulle (cioè  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$ ) quando si applichi in ingresso il segnale  $u(t) = t^2 \delta_{-1}(t)$ .

**Soluzione.** Poiché le condizioni iniziali sono nulle, la risposta completa coincide in questo caso con la risposta forzata e si può calcolare seguendo i passi della seguente procedura generale:

1. Si calcoli la funzione di trasferimento  $W(s)$ ;
2. Si calcoli  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ ;
3. Si calcoli  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$  dove  $Y(s) = W(s) \cdot U(s)$ .

Per quanto riguarda la funzione di trasferimento  $W(s)$ , si può seguire quanto fatto nella sezione 6.2 notando che in questo caso  $n = 2$ ,  $m = 1$  e i coefficienti sono dati da  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 4$  e  $b_0 = 1$ . In base a (6.19), la funzione di trasferimento è data da:

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}. \quad (6.42)$$

Per quanto riguarda  $U(s)$  si ha:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{t^2 \delta_{-1}(t)\} = \frac{2}{s^3}.$$

Pertanto

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{2}{s^3(s^2 + 4s + 3)} = \frac{2}{s^3(s+1)(s+3)}.$$

I poli di  $Y(s)$  sono in questo caso:  $p_1 = 0$  con molteplicità  $m_1 = 3$ ,  $p_2 = -1$  e  $p_3 = -3$  con molteplicità  $m_2 = m_3 = 1$ . Sviluppando in fratti semplici si ottiene:

$$Y(s) = \alpha_{1,1} \frac{1}{s} + \alpha_{1,2} \frac{1}{s^2} + \alpha_{1,3} \frac{1}{s^3} + \alpha_{2,1} \frac{1}{s+1} + \alpha_{3,1} \frac{1}{s+3}.$$

Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo, utilizzando la (6.38):

$$\begin{aligned}\alpha_{1,3} &= \frac{1}{(3-3)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{3-3}}{ds^{3-3}} [s^3 Y(s)] = \frac{2}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=0} = \frac{2}{3} \\ \alpha_{1,2} &= \frac{1}{(3-2)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{3-2}}{ds^{3-2}} [s^3 Y(s)] = \frac{d}{ds} \frac{2}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=0} = \frac{-2(2s+4)}{(s^2+4s+3)^2} \Big|_{s=0} = -\frac{8}{9} \\ \alpha_{1,1} &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}} [s^3 Y(s)] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \frac{2}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \frac{-4(s+2)}{(s^2+4s+3)^2} \Big|_{s=0} \\ &= -2 \frac{d}{ds} \frac{(s^2+4s+3)^2 - 2(s+2)(2s+4)(s^2+4s+3)}{(s^2+4s+3)^4} \Big|_{s=0} = \frac{26}{27} \\ \alpha_{2,1} &= \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)Y(s)] = \frac{2}{s^3(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{2}{-1 \cdot 2} = -1 \\ \alpha_{3,1} &= \lim_{s \rightarrow -3} [(s+3)Y(s)] = \frac{2}{s^3(s+1)} \Big|_{s=-3} = \frac{2}{-27 \cdot (-2)} = \frac{1}{27}.\end{aligned}$$

Quindi,

$$y(t) = \left[ \frac{26}{27} - \frac{8}{9}t + \frac{2}{3} \frac{t^2}{2} - e^{-t} + \frac{1}{27}e^{-3t} \right] \delta_{-1}(t) = \left[ \frac{26}{27} - \frac{8}{9}t + \frac{t^2}{3} - e^{-t} + \frac{1}{27}e^{-3t} \right] \delta_{-1}(t). \quad (6.43)$$

### 6.6.2 Calcolo della risposta a partire da condizioni iniziali non nulle

Si consideri ancora il sistema descritto dalla (6.41) e si calcoli la risposta nell'uscita  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ , a partire da condizioni iniziali generiche  $y(0) = y_0$  e  $y'(0) = y'_0$  quando si applichi in ingresso il segnale  $u(t) = t^2 \delta_{-1}(t)$ .

**Soluzione.** La risposta completa in questo caso comprende sia una risposta forzata (identica a quella della sezione precedente perché si sta applicando lo stesso ingresso  $u(t)$ ) sia una risposta libera che si può calcolare ancora seguendo quanto fatto nella sezione 6.2. In particolare la procedura è la seguente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(s) \\ \mathcal{L}\{\dot{y}\} &= sY(s) - y_0 \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}\} &= s\mathcal{L}\{\dot{y}\} - y'_0 = s^2Y(s) - sy_0 - y'_0.\end{aligned}$$

L'equazione (6.41) diventa in  $s$ :

$$(s^2Y(s) - sy_0 - y'_0) + 4(sY(s) - y_0) + 3Y(s) = U(s).$$

Raccogliendo i vari termini, come fatto nella Sezione 6.2, si può scrivere in analogia con la (6.18):

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s+4)y_0 + y'_0}{s^2 + 4s + 3}}_{\text{risposta libera nell'uscita } Y_\ell(s)} + \underbrace{\frac{1}{s^2 + 4s + 3}U(s)}_{\text{risposta forzata nell'uscita } Y_f(s)}$$

Si noti ancora una volta che  $Y_f(s)$  coincide con quella calcolata nella sezione precedente. Per quanto riguarda  $Y_\ell(s)$  si ha:

$$Y_\ell(s) = \frac{(s+4)y_0 + y'_0}{s^2 + 4s + 3} = \frac{(s+4)y_0 + y'_0}{(s+1)(s+3)} = \alpha_{1,1} \frac{1}{s+1} + \alpha_{2,1} \frac{1}{s+3},$$

con

$$\begin{aligned}\alpha_{1,1} &= \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)Y_\ell(s)] = \frac{(s+4)y_0 + y'_0}{(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{3y_0 + y'_0}{2} \\ \alpha_{2,1} &= \lim_{s \rightarrow -3} [(s+3)Y_\ell(s)] = \frac{(s+4)y_0 + y'_0}{(s+1)} \Big|_{s=-3} = \frac{y_0 + y'_0}{-2}.\end{aligned}$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = [\alpha_{1,1}e^{-t} + \alpha_{2,1}e^{-3t}] \delta_{-1}(t) = \frac{1}{2} [(3y_0 + y'_0)e^{-t} - (y_0 + y'_0)e^{-3t}] \delta_{-1}(t),$$

e la risposta completa, tenendo conto che  $y_f(t)$  è la funzione riportata nella (6.43), sarà data da:

$$\begin{aligned}y(t) &= y_\ell(t) + y_f(t) \\ &= \frac{1}{2} [(3y_0 + y'_0)e^{-t} - (y_0 + y'_0)e^{-3t}] \delta_{-1}(t) + \left[ \frac{26}{27} - \frac{8}{9}t + \frac{t^2}{3} - e^{-t} + \frac{1}{27}e^{-3t} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= \left[ \frac{26}{27} - \frac{8}{9}t + \frac{t^2}{3} + \frac{3y_0 + y'_0 - 2}{2}e^{-t} + \frac{2 - 27(y_0 + y'_0)}{54}e^{-3t} \right] \delta_{-1}(t).\end{aligned}$$

### 6.6.3 Passaggio alla rappresentazione ISU

Si consideri sempre il sistema descritto dalla (6.41). Si vuole determinare una rappresentazione ISU equivalente nel senso specificato nella Sezione 6.3.

Poiché  $n = 2$ , la rappresentazione descritta nella Sezione 6.3.2 in questo caso ha dimensione 2 (cioè  $x \in \mathbb{R}^2$ ) ed è descritta dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad D = 0.$$

Il calcolo della  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  restituisce la stessa espressione trovata a partire dalla rappresentazione IU (cioè la stessa  $W(s)$  riportata nella (6.42)). Infatti si ha:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix},$$

con

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

e

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{s^2 + 4s + 3},$$

che è a tutti gli effetti l'espressione riportata nella (6.42).

## 6.7 Trasformata inversa di Laplace di funzioni razionali strettamente proprie: il caso di poli complessi

Consideriamo ancora una funzione razionale strettamente propria del tipo riportato nella (6.37) e qui ripetuta per comodità:

$$F(s) = \frac{c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}. \quad (6.44)$$

Supponiamo che questa funzione abbia almeno un polo complesso, cioè almeno una radice  $p_i$  del polinomio a denominatore che non sia reale:

$$p_A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n = (s - p_1)^{m_1}(s - p_2)^{m_2} \dots (s - p_\ell)^{m_\ell}$$

con  $p_i \notin \mathbb{R}$ . Scriviamo  $p_i \in \mathbb{C}$  nella sua forma cartesiana  $p_i = \alpha + j\omega$ , essendo  $\alpha = \text{Re}(p_i)$  e  $\omega = \text{Im}(p_i)$ . Poiché il polinomio a denominatore  $p_A(s)$  ha tutti i coefficienti reali, è ben noto che se ammette una radice complessa con molteplicità  $m_i$ , ammetterà anche la sua complessa coniugata  $p_h = p_i^* = \alpha - j\omega$  con la stessa molteplicità  $m_h = m_i$ . Analizzando l'espressione (6.38) per il calcolo dei coefficienti  $\alpha_{ij}$  dello sviluppo in fratti semplici (che vale indipendentemente dal fatto che  $p_i$  sia complesso o reale), è possibile constatare che

$$\alpha_{hj} = \alpha_{ij}^*, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m_i = m_h,$$

ossia che i coefficienti dello sviluppo in fratti semplici di poli complessi e coniugati sono a loro volta complessi e coniugati.

Consideriamo inizialmente il caso di poli complessi coniugati con molteplicità uno. Siano  $\alpha_i = a + jb$  e  $\alpha_h = \alpha_i^* = a - jb$  i coefficienti relativi rispettivamente ai termini  $\frac{1}{s-p_i}$  e  $\frac{1}{s-p_h}$ , con  $p_h = p_i^*$ , essendo  $p_i = \alpha + j\omega$ . Nello sviluppo in fratti semplici della  $F(s)$  comparirà quindi una coppia di termini del tipo:

$$F_{i,h}(s) = \frac{a + jb}{s - (\alpha + j\omega)} + \frac{a - jb}{s - (\alpha - j\omega)}.$$

Allora, antitrasformando:

$$\begin{aligned} f_{i,h}(t) &= \left[ (a + jb)e^{(\alpha + j\omega)t} + (a - jb)e^{(\alpha - j\omega)t} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= e^{\alpha t} \left[ (a + jb)e^{j\omega t} + (a - jb)e^{-j\omega t} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= e^{\alpha t} \left[ a(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) + jb(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \right] \delta_{-1}(t) \\ &= e^{\alpha t} \left[ a \cdot 2 \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + jb \cdot 2j \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= 2e^{\alpha t} [a \cdot \cos(\omega t) - b \cdot \sin(\omega t)] \delta_{-1}(t). \end{aligned} \tag{6.45}$$

Oppure, scrivendo il numero complesso  $a + jb$  in forma polare:

$$a + jb = M \cdot e^{j\phi}$$

per cui  $a - jb = M \cdot e^{-j\phi}$ , si ha:

$$\begin{aligned} f_{i,h}(t) &= \left[ M \cdot e^{j\phi} e^{(\alpha + j\omega)t} + M \cdot e^{-j\phi} e^{(\alpha - j\omega)t} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= M \cdot e^{\alpha t} \left[ e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= M \cdot e^{\alpha t} \cdot 2 \frac{e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}}{2} \delta_{-1}(t) \\ &= 2M e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi) \delta_{-1}(t). \end{aligned} \tag{6.46}$$

Nel caso di poli complessi con molteplicità maggiore di 1, cioè nel caso in cui il polo complesso  $p_i$  abbia molteplicità  $m_i > 1$ , i coefficienti  $\alpha_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, m_i$ ) si calcolano sempre con le formule indicate in precedenza e anche in questo caso è facile verificare che i coefficienti  $\alpha_{hj}$  del

polo complesso coniugato  $p_h = p_i^*$  sono tali che  $\alpha_{hj} = \alpha_{ij}^*$  ( $j = 1, 2, \dots, m_i$ ). Detto questo, è abbastanza semplice verificare che l'antitrasformata di termini del tipo

$$F_{ih,j}(s) = \frac{\alpha_{ij}}{(s - p_i)^j} + \frac{\alpha_{hj}}{(s - p_h)^j},$$

$j = 1, 2, \dots, m_i$ , che sono quelli che compaiono nello sviluppo in fratti semplici relativamente ai due poli complessi coniugati  $p_i$  e  $p_h$ , è data da:

$$f_{ih,j}(t) = 2e^{\alpha t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} [a_{ij} \cdot \cos(\omega t) - b_{ij} \cdot \sin(\omega t)] \delta_{-1}(t)$$

avendo scritto  $\alpha_{ij} = a_{ij} + j b_{ij}$ , oppure da:

$$f_{ih,j}(t) = 2M_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi_{ij}) \delta_{-1}(t)$$

nel caso si sia usata la notazione polare  $\alpha_{ij} = M_{ij} \cdot e^{j\phi_{ij}}$

### Esempio di antitrasformata di funzione propria ma non strettamente propria

Sia

$$F_3(s) = \frac{s^2 + 3}{(s+2)(s+1)}$$

Lo sviluppo in fratti semplici visto in precedenza va effettuato solo nel caso di funzioni razionali strettamente proprie. Nel caso la funzione sia propria ma non strettamente è sempre possibile scriverla come una costante più una funzione strettamente propria:

$$F_3(s) = c + \tilde{F}_3(s)$$

dove

$$c = \lim_{s \rightarrow \infty} F_3(s) = 1$$

e

$$\tilde{F}_3(s) = F_3(s) - 1 = \frac{-3s + 1}{(s+2)(s+1)}$$

è strettamente propria e sappiamo antitrasformarla essendo scomponibile in fratti semplici. In particolare si ottiene:

$$\tilde{f}_3(t) = (4e^{-t} - 7e^{-2t})\delta_{-1}(t).$$

Poiché la trasformata dell'impulso  $\delta_0(t)$  è 1, complessivamente si ha:

$$f_3(t) = \delta_0(t) + (4e^{-t} - 7e^{-2t})\delta_{-1}(t).$$

Si ricorda che le risposte libere e forzate dei sistemi lineari sono sempre funzioni razionali strettamente proprie e quindi la funzione considerata in questo esercizio non può essere la risposta di un sistema lineare.

## 6.8 Esercizio

Si consideri una rappresentazione ISU caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [a \ b] \quad D = 0.$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  due costanti.

1. Calcolare la funzione di trasferimento  $W(s)$ ;
2. Dire per quali valori di  $a$  e  $b$  la  $W(s)$  non rappresenta tutto il sistema (per quali valori di  $a$  e  $b$  esistono cioè parti non raggiungibili e/o non osservabili).

**Soluzione.**

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = [a \ b] \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{as + b}{s^2 + s - 2} = \frac{as + b}{(s+2)(s-1)}. \end{aligned}$$

La  $W(s)$  non rappresenta completamente il sistema se si hanno cancellazioni tra numeratore e denominatore, pertanto se  $b = 2a$  oppure se  $b = -a$ .

In effetti, se considero il cambiamento di coordinate  $z = Tx$ , con

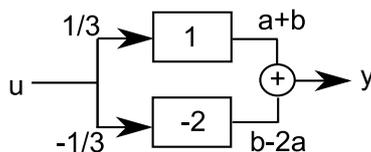
$$T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

si arriva a un sistema (nelle variabili di stato modificate  $z$ ) descritto dalle seguenti matrici:

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = CT^{-1} = [a + b, \ b - 2a] \quad \bar{D} = D = 0.$$

In tali coordinate si intuisce (e in effetti è proprio così) come la coppia di variabili  $z_1$  e  $z_2$  sia raggiungibile per qualsiasi valore di  $a$  e  $b$ . Infatti le due variabili evolvono indipendentemente l'una dall'altra ma ciascuna è raggiunta dall'ingresso, avendo  $B$  entrambi gli elementi non nulli per qualsiasi valore di  $a$  e  $b$ . Si noti a tal proposito che in questo caso, a differenza del sistema termico considerato nella Sez. 3.5.2, il controllo permette di raggiungere qualunque valore per la coppia  $(z_1, z_2)$  perché le dinamiche delle due variabili di stato sono differenti: la prima,  $z_1$ , è caratterizzata da un autovalore pari a 1; la seconda,  $z_2$ , da un autovalore pari a  $-2$ . Inoltre anche gli elementi di  $B$  sono diversi tra loro. Questo permette al controllo di raggiungere valori diversi di  $z_1$  e  $z_2$  a differenza di quanto accadeva nella Sez. 3.5.2 in cui tutto era simmetrico e le temperature delle due stanze rimanevano sempre coincidenti tra loro.



**Figura 6.3:** Rappresentazione grafica nelle coordinate  $z$  del sistema considerato nella sezione 6.8. I numeri 1 e  $-2$  nei due rettangoli sono gli autovalori che caratterizzano le dinamiche di  $z_1$  e  $z_2$

Per quanto riguarda l'osservabilità, le due variabili sono anche osservabili solo se, come visto pocanzi,  $b \neq 2a$  e  $b \neq -a$ . Se  $b = -a$ , la variabile di stato  $z_1$  non influenza più l'uscita e diviene pertanto inosservabile (non essendoci neanche un collegamento con  $z_2$ ). Di conseguenza, nella funzione di trasferimento in questo caso compare solo, come polo, l'autovalore

della variabile osservabile, cioè  $-2$ . Se invece  $b = 2a$ , è  $z_2$  che diviene inosservabile e, di conseguenza, la funzione di trasferimento avrà come polo solo l'autovalore pari a 1. Chiaramente, se  $a = b = 0$  il sistema diventa completamente inosservabile.

Con riferimento alla Fig. 3.1, se  $b \neq 2a$  e se  $b \neq -a$ , il sistema presenta solo il blocchetto  $z_a$  (sistema tutto raggiungibile e osservabile). Se invece  $b = 2a$  o  $b = -a$  siamo in presenza dei soli blocchetti  $z_a$  e  $z_b$ . In particolare, se  $b = 2a$ , il blocchetto  $z_a$  comprende solo  $z_1$  e  $z_b$  comprende solo  $z_2$ . Viceversa, se  $b = -a$ , si ha che  $z_a$  comprende  $z_2$  e  $z_b$  comprende  $z_1$ . Infine, se  $a = b = 0$ , avremo solo il blocchetto  $z_b$  (sistema tutto raggiungibile ma completamente inosservabile).

La Fig. 6.3 illustra graficamente le equazioni del sistema nelle nuove coordinate.

□

## Capitolo 7

# Cambiamenti di coordinate nello spazio di stato e analisi modale

### 7.1 Cambiamenti di coordinate

Come già spiegato alla fine della Sezione 3.6, e come anche effettuato nella Sezione 3.5.2, la rappresentazione ISU di un sistema lineare può essere scritta utilizzando diverse basi per lo spazio di stato. Anche nella Sezione 6.3.2 si è già fatto cenno a questo concetto del cambiamento di base, quando in una nota di quella sezione si è osservato che tutte le rappresentazioni minime (cioè a dimensione minima) di un sistema lineare sono equivalenti a meno di un cambiamento di coordinate.

Si consideri quindi un cambiamento di coordinate:

$$z = Tx,$$

dove  $T$  è una matrice non singolare (cioè invertibile, cioè tale che  $\det(T) \neq 0$ ). La matrice  $T$  può essere calcolata a partire dagli elementi della nuova base, quella rispetto a cui si vuole scrivere la rappresentazione ISU. Si ha infatti che se gli elementi di questa base sono  $u_1, u_2, \dots, u_{\bar{n}}$ , la matrice  $T^{-1}$  ha per colonne proprio gli elementi  $u_i$  della nuova base rispetto alla vecchia (cioè generalmente rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ ). Come diventa la rappresentazione ISU nella nuova base? Siano  $A, B, C$  e  $D$  le matrici della rappresentazione ISU nella base precedente, cioè le matrici tali che

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du.\end{aligned}$$

Si vuole dunque determinare l'espressione delle matrici  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  e  $\bar{D}$  che caratterizzano la descrizione rispetto alla nuova base, cioè le matrici tali che

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}z + \bar{D}u.\end{aligned}$$

Per ricavarle è sufficiente applicare il cambiamento di coordinate, tenendo presente che se  $z = Tx$  allora  $x = T^{-1}z$ . Si ha:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= T\dot{x} = T(Ax + Bu) = TAT^{-1}z + TBu = \bar{A}z + \bar{B}u \\ y &= Cx + Du = CT^{-1}z + Du = \bar{C}z + \bar{D}u.\end{aligned}$$

Dalle precedenti è immediato ricavare le seguenti relazioni:

$$\bar{A} = TAT^{-1} \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D.$$

### 7.1.1 Effetti del cambiamento di coordinate sulle matrici di transizione dello stato e sulle matrici (o funzioni) delle risposte impulsive nello stato e nell'uscita

Si considerino le matrici di transizione dello stato e delle risposte impulsive nello stato definite nella Sez. 4.3 (si vedano le (4.5)-(4.6)) e qui riportate per comodità:

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (7.1)$$

$$H(t) = e^{At}B. \quad (7.2)$$

Nella nuova base si ha:

$$\bar{\Phi}(t) = T\Phi(t)T^{-1}, \quad (7.3)$$

$$\bar{H}(t) = TH(t). \quad (7.4)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t) &= e^{\bar{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (TAT^{-1})^k \frac{t^k}{k!} = \\ &T \left( \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} \right) T^{-1} = Te^{At}T^{-1} = T\Phi(t)T^{-1}; \end{aligned}$$

e

$$\bar{H}(t) = e^{\bar{A}t}\bar{B} = Te^{At}T^{-1}TB = Te^{At}B = TH(t).$$

Per quanto riguarda l'uscita, le due funzioni  $\Psi$  e  $W$  definite rispettivamente in (4.13) e (4.14) e qui riportate per comodità

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = Ce^{At} \quad (7.5)$$

$$W(t) = CH(t) + D\delta_0(t) = Ce^{At}B + D\delta_0(t), \quad (7.6)$$

diventano nella nuova base

$$\bar{\Psi}(t) = \Psi(t)T^{-1} \quad (7.7)$$

$$\bar{W}(t) = W(t). \quad (7.8)$$

Infatti

$$\bar{\Psi}(t) = \bar{C}e^{\bar{A}t} = CT^{-1}Te^{At}T^{-1} = Ce^{At}T^{-1} = \Psi(t)T^{-1},$$

$$\bar{W}(t) = \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{B} + \bar{D}\delta_0(t) = CT^{-1}Te^{At}T^{-1}TB + D\delta_0(t) = Ce^{At}B + D\delta_0(t) = W(t).$$

### 7.1.2 Effetti del cambiamento di coordinate sulle trasformate di Laplace delle matrici di transizione dello stato e sulle matrici (o funzioni) delle risposte impulsive nello stato e nell'uscita

Effetti analoghi a quelli visti nella sezione precedente valgono per le trasformate di Laplace delle stesse funzioni matriciali. Per calcolare tali trasformate occorre conoscere la trasformata di  $e^{At}$ , cioè della funzione esponenziale di matrice.

Si considerino l'espressione della risposta libera nel tempo che si legge nella (4.4) e quella nel dominio della trasformata riportata nella (6.5), espressioni che si riportano qui per comodità:

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0 \quad (7.9)$$

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}x_0. \quad (7.10)$$

Poiché il vettore  $x_0$  delle condizioni iniziali è costante, si ha:

$$X_\ell(s) = \mathcal{L}\{x_\ell(t)\} = \mathcal{L}\{e^{At}x_0\} = \mathcal{L}\{e^{At}\}x_0.$$

Confrontando la precedente con la (7.10) e poiché queste due equazioni valgono per ogni  $x_0$ , si può concludere che

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}, \quad (7.11)$$

relazione che fornisce anche un metodo pratico per il calcolo della matrice esponenziale (basta calcolare  $(sI - A)^{-1}$  e procedere con la trasformata inversa di Laplace degli elementi di tale matrice).

Nota la trasformata di Laplace della matrice esponenziale  $e^{At}$ , è immediato ricavare la trasformata delle funzioni matriciali d'anzì richiamate:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \mathcal{L}\{\Phi(t)\} = (sI - A)^{-1}, \\ H(s) &= \mathcal{L}\{H(t)\} = (sI - A)^{-1}B, \\ \Psi(s) &= \mathcal{L}\{\Psi(t)\} = C(sI - A)^{-1}, \\ W(s) &= \mathcal{L}\{W(t)\} = C(sI - A)^{-1}B + D. \end{aligned}$$

In base all'espressione della risposta forzata nello stato che si legge in (6.5) e qui riportata per comodità:

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s),$$

è possibile scrivere, in base a quanto appena detto sulla trasformata di  $H(t)$

$$X_f(s) = H(s)U(s).$$

Confrontando la precedente con la (4.7) secondo cui

$$x_f(t) = \int_0^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau,$$

si può ricavare la seguente ulteriore importante proprietà della trasformata di Laplace (che si può dimostrare anche direttamente partendo dalla (5.3)).

**Proprietà 1** *Siano  $f(t)$  e  $g(t)$  due funzioni con trasformata di Laplace rispettivamente  $F(s)$  e  $G(s)$ . Allora, la trasformata di Laplace del loro integrale di convoluzione*

$$I_c(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

*è il prodotto delle loro trasformate, cioè*

$$\mathcal{L}\{I_c(t)\} = F(s)G(s).$$

Ovviamente lo stesso discorso si applica sulla risposta forzata in uscita, ovvero sulla funzione  $W(t)$ , confrontando la (6.6) con la (4.15):

$$y_f(t) = \int_0^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad \Leftrightarrow \quad Y_f(s) = W(s)U(s).$$

Tenendo conto delle (7.3), (7.4), (7.7) e (7.8) e del fatto che  $T$  è una matrice costante, è anche immediato ricavare l'espressione in  $s$  delle funzioni  $\Phi$ ,  $H$ ,  $\Psi$  e  $W$  nella nuova base:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(s) &= \mathcal{L}\{\bar{\Phi}(t)\} = \mathcal{L}\{T\Phi(t)T^{-1}\} = T\mathcal{L}\{\Phi(t)\}T^{-1} = T\Phi(s)T^{-1}, \\ \bar{H}(s) &= \mathcal{L}\{\bar{H}(t)\} = \mathcal{L}\{TH(t)\} = T\mathcal{L}\{H(t)\} = TH(s), \\ \bar{\Psi}(s) &= \mathcal{L}\{\bar{\Psi}(t)\} = \mathcal{L}\{\Psi(t)T^{-1}\} = \mathcal{L}\{\Psi(t)\}T^{-1} = \Psi(s)T^{-1}, \\ \bar{W}(s) &= \mathcal{L}\{\bar{W}(t)\} = \mathcal{L}\{W(t)\} = W(s).\end{aligned}$$

Si noti che la rappresentazione  $ISU$  nella nuova base è del tutto equivalente a quella nella base precedente. In particolare i due sistemi presentano stessa funzione di trasferimento (infatti  $\bar{W} \equiv W$ ) e quindi lo stesso legame ingresso-uscita. Inoltre lo stato, anche se descritto in due basi diverse, si muove nello stesso spazio ed è caratterizzato dagli stessi autovalori, detti *modi* del sistema, come verrà più dettagliatamente riportato nel seguito, e presenta quindi le stesse risposte libere. Infatti, il polinomio caratteristico di  $A$  è lo stesso di quello di  $\bar{A}$ :

$$\begin{aligned}p_{\bar{A}}(\lambda) &= \det(\lambda I - \bar{A}) = \det(\lambda T T^{-1} - T A T^{-1}) = \det[T(\lambda I - A)T^{-1}] = \\ &= \det(T)\det(\lambda I - A)\det(T^{-1}) = \det(T)\det(\lambda I - A)\frac{1}{\det(T)} = \det(\lambda I - A) = p_A(\lambda),\end{aligned}$$

dove si è usata la proprietà secondo cui il determinante del prodotto di due matrici è il prodotto dei loro determinanti e quindi che il determinante dell'inversa di una matrice  $M$  è il reciproco del determinante di  $M$ .

Come ultima osservazione, proprio alla luce di quanto visto in questa sezione, si vuole ribadire ancora una volta come la rappresentazione  $ISU$  descritta nella Sez. 6.3.2 non sia chiaramente l'unica equivalente ad una data rappresentazione  $IU$ , anche tra quelle di dimensione minima: qualsiasi cambiamento di coordinate produce infatti una rappresentazione  $ISU$  del tutto equivalente al legame  $IU$  considerato, e quindi valida a tutti gli effetti, essendo caratterizzata dalla stessa funzione di trasferimento  $W$ .

## 7.2 Analisi modale

Si presenta l'argomento nel caso semplificato in cui la matrice dinamica  $A$  sia diagonalizzabile, cioè esiste un cambiamento di coordinate

$$z = Tx$$

tale che la matrice  $\bar{A} = T A T^{-1}$  è diagonale.

La matrice  $A$  è diagonalizzabile se e solo se la *molteplicità algebrica* degli autovalori di  $A$  coincide con la loro *molteplicità geometrica*, come richiamato nella sezione seguente.

### 7.2.1 Qualche richiamo di algebra lineare

Sia  $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_\ell)^{m_\ell}$  il polinomio caratteristico di  $A$ . Le sue radici  $\lambda_i$  sono gli autovalori di  $A$  e gli esponenti  $m_i$  sono le loro molteplicità algebriche. Un autovalore di  $A$  è un numero  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che esiste un vettore non nullo  $w$ , detto autovettore (destro) di  $A$ , per cui  $Aw = \lambda w$ . Si parla anche di autovettori sinistri  $v$  riferiti a  $\lambda$ : questi sono vettori non nulli tali che  $v'A = \lambda v'$ , dove l'apice indica l'operazione di trasposizione. Autovettori (destri o sinistri) relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti, come è facile dimostrare.

La molteplicità geometrica  $\mu_i$  di  $\lambda_i$  è la dimensione dell'autospazio relativo a  $\lambda_i$ , cioè il numero di autovettori linearmente indipendenti di  $A$  relativi a  $\lambda_i$ , o ancora la dimensione dello spazio soluzione (detto appunto autospazio di  $\lambda_i$ ) del sistema di equazioni  $(A - \lambda_i I)x = 0$ . Operativamente si calcola con:

$$\mu_i = \bar{n} - r_i$$

essendo  $\bar{n}$  la dimensione di  $A$  e  $r_i := \text{rango}(\lambda_i I - A)$ . Per definizione  $\mu_i \geq 1$ . Si può dimostrare che vale anche  $\mu_i \leq m_i$  e quindi complessivamente  $1 \leq \mu_i \leq m_i$ .

Si noti che la condizione di diagonalizzabilità di  $A$ , cioè che  $m_i = \mu_i$  per ogni autovalore  $\lambda_i$  di  $A$  è banalmente verificata se  $A$  ha tutti autovalori distinti, cioè se  $m_i = 1$  per ogni  $i$ , in quanto in tal caso  $1 \leq \mu_i \leq m_i = 1$  implica  $\mu_i = 1 = m_i$  per ogni  $i$ .

Operativamente, la diagonalizzazione di  $A$  si effettua calcolandone autovalori e autovettori (destri) ad essi relativi (con la necessità quindi, per ogni autovalore  $\lambda_i$  avente molteplicità  $m_i > 1$  di calcolare  $m_i$  autovettori linearmente indipendenti relativi a  $\lambda_i$ ) e prendendo come  $T^{-1}$  quella matrice quadrata che ha per colonne tali autovettori. Chiaramente tale matrice  $T$  non è unica, sia perché l'ordine degli autovalori prescelto non è unico, sia perché, soprattutto nel caso di  $m_i > 1$  la scelta dei singoli autovettori può essere fatta in modo non univoco.

Si ha in tal caso:

$$AT^{-1} = T^{-1}\Lambda, \quad (7.12)$$

dove  $\Lambda$  è una matrice diagonale che ha sulla diagonale principale gli autovalori di  $A$ , nell'ordine stabilito dagli autovettori che formano  $T^{-1}$ . Infatti, come detto, ogni colonna  $w$  di  $T^{-1}$  è un autovettore destro di  $A$ , per cui  $Aw = \lambda w$  (essendo  $\lambda$  l'autovalore corrispondente a  $w$ ).

Si noti che  $T^{-1}$  è invertibile in quanto gli autovettori che formano le sue colonne sono tutti linearmente indipendenti. Premoltiplicando la (7.12) per  $T$  (inversa di  $T^{-1}$ ) si ha:

$$TAT^{-1} = \Lambda, \quad (7.13)$$

che è proprio la diagonalizzazione cercata.

Moltiplicando la precedente per  $T$  si ottiene:

$$TA = \Lambda T, \quad (7.14)$$

cioè le righe di  $T$  sono autovettori sinistri di  $A$ .

### 7.2.2 Decomposizione spettrale

Sia  $A$  una matrice quadrata diagonalizzabile, e supponiamo per semplicità d'ora in avanti che gli autovalori di  $A$  siano tutti distinti (cioè  $m_i = 1$  per ogni  $i$ ).

Esiste una matrice invertibile  $T$  tale che

$$TAT^{-1} = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\bar{n}}\}. \quad (7.15)$$

In base alla (7.14), se  $v'_i$  è la  $i$ -esima riga di  $T$ ,  $i = 1, 2, \dots, \bar{n}$ , si ha  $v'_i A = \lambda_i v'_i$ , cioè  $v_i$  è autovettore sinistro di  $A$  relativo a  $\lambda_i$ . Analogamente, in base alla (7.12), se  $w_j$  è la  $j$ -esima colonna di  $T^{-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, \bar{n}$ , si ha  $Aw_j = \lambda_j w_j$ , cioè  $w_j$  è autovettore destro di  $A$  relativo a  $\lambda_j$ .

Si noti che, poiché  $TT^{-1} = I$ ,  $v'_i \cdot w_j = \delta_{ij}$ , dove  $\delta_{ij} = 0$  per  $i \neq j$  e  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  ( $\delta_{ij}$  viene detto *delta di Kronecker*). Invertendo la (7.15), e utilizzando la proprietà appena dimostrata

che  $v'_i \cdot w_j = \delta_{ij}$ , si ottiene:

$$A = T^{-1} \Lambda T = [\lambda_1 w_1 \ \lambda_2 w_2 \ \dots \ \lambda_{\bar{n}} w_{\bar{n}}] \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_{\bar{n}} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i w_i v'_i. \quad (7.16)$$

La scrittura precedente, che esprime la matrice  $A$  in funzione dei suoi autovalori e autovettori (destri e sinistri), è detta *decomposizione spettrale* di  $A$ . Essa mette infatti in luce lo *spettro* di  $A$ , dove per spettro di una matrice si indica l'insieme dei suoi autovalori.

La decomposizione spettrale di  $A$  ha conseguenze molto interessanti. Si provi infatti a calcolare una potenza qualsiasi di  $A$ , per esempio  $A^2$ . Si ha:

$$A^2 = \left( \sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i w_i v'_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{\bar{n}} \lambda_j w_j v'_j \right) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i^2 w_i v'_i.$$

Infatti, sviluppando il prodotto e tenendo conto ancora una volta della proprietà dianzi richiamata secondo cui  $v'_i \cdot w_j = \delta_{ij}$ , è immediato constatare che i termini misti ( $i \neq j$ ) del prodotto scompaiono e sopravvivono solo quelli omologhi. Lo stesso procedimento permette di mostrare che per qualsiasi intero  $k$

$$A^k = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i^k w_i v'_i,$$

cioè che qualsiasi potenza di  $A$  ha una decomposizione spettrale identica a quella di  $A$  a patto di sostituire agli autovalori di  $A$  le loro potenze  $k$ -esime (mentre autovettori destri e sinistri rimangono gli stessi).

Ricordando la definizione di esponenziale di matrice:  $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$ , è immediato ottenere la seguente espressione

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} w_i v'_i, \quad (7.17)$$

che mostra come anche  $e^{At}$  presenta una decomposizione spettrale identica a quella di  $A$  a patto di sostituire agli autovalori di  $A$  i loro esponenziali, cioè  $e^{\lambda_i t}$ . Autovettori destri e sinistri rimangono ancora gli stessi.

L'importanza della decomposizione spettrale della matrice esponenziale riportata in (7.17), che comunque costituisce anche un possibile metodo per il calcolo della matrice esponenziale stessa, è quello di fornire un interessantissimo strumento di analisi dell'evoluzione libera di un sistema lineare. Si ricordi infatti che la risposta libera di un sistema lineare è data da:

$$x_\ell(t) = e^{At} x_0.$$

Sfruttando la decomposizione spettrale (7.17) la precedente diventa:

$$x_\ell(t) = e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} w_i v'_i x_0 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} w_i c_i, \quad (7.18)$$

dove  $c_i = v'_i x_0 \in \mathbb{R}$ . Questi coefficienti scalari  $c_i$  sono a ben vedere le componenti del vettore di condizioni iniziali  $x_0$  rispetto alla base di autovettori destri  $w_i$ , cioè le componenti di  $x_0$  lungo

gli autospazi di  $A$ . Infatti, considerando la (7.18) per  $t = 0$  si ha:

$$x_\ell(0) = x_0 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} c_i w_i.$$

La cosa più interessante della (7.18) è che, note le componenti di  $x_0$  lungo gli autospazi di  $A$ , queste componenti evolvono indipendentemente l'una dall'altra, ciascuna secondo il modo descritto dall'autovalore dell'autospazio corrispondente. Questi modi sono detti *modi naturali* del sistema: il modo naturale relativo a  $\lambda_i$ , caratterizzato da una legge di moto  $e^{\lambda_i t}$ , risulta effettivamente presente nella risposta libera se le condizioni iniziali  $x_0$  hanno una componente non nulla lungo l'autospazio relativo a  $\lambda_i$ , cioè lungo  $w_i$  (ossia se  $c_i \neq 0$ ).

Nel caso complesso, poiché il polinomio caratteristico di  $A$  ha coefficienti reali, se  $\lambda = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$  è autovalore di  $A$ , allora anche il complesso coniugato di  $\lambda$ , cioè  $\lambda^* = \sigma - j\omega$  è autovalore di  $A$ . Inoltre, se  $w = w_a + jw_b$  è autovettore relativo a  $\lambda$ , allora il complesso coniugato di  $w$ , cioè  $w^* = w_a - jw_b$  è autovettore relativo a  $\lambda^*$ . Si consideri quindi una coppia di questi autovalori,  $\lambda_1 = \sigma + j\omega$  e  $\lambda_2 = \lambda_1^* = \sigma - j\omega$ , con autovettori rispettivamente  $w_1 = w_a + jw_b$  e  $w_2 = w_1^* = w_a - jw_b$ . In base alla (7.18), la parte di risposta libera nello stato relativa a questi due autovalori evolve secondo la seguente legge

$$x_{\ell,12}(t) = e^{\lambda_1 t} w_1 c_1 + e^{\lambda_2 t} w_2 c_2, \quad (7.19)$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono, come detto in precedenza, le componenti di  $x_0$  rispetto a  $w_1$  e  $w_2$  e sono in questo caso due numeri complessi. Si noti che  $c_2 = c_1^*$ : infatti  $c_1 = v_1' x_0$  e  $c_2 = v_2' x_0$ , con  $v_2 = v_1^*$  (e  $x_0$  reale). Si indichi quindi con  $m$  il modulo di  $c_1$  e con  $\phi$  la sua fase:  $c_1 = m e^{j\phi}$  e  $c_2 = m e^{-j\phi}$ . Si ha:

$$\begin{aligned} x_{\ell,12}(t) &= e^{\lambda_1 t} w_1 c_1 + e^{\lambda_2 t} w_2 c_2 = \\ &= e^{(\sigma+j\omega)t} m e^{j\phi} (w_a + jw_b) + e^{(\sigma-j\omega)t} m e^{-j\phi} (w_a - jw_b) \\ &= e^{\sigma t} m e^{j(\omega t + \phi)} (w_a + jw_b) + e^{\sigma t} m e^{-j(\omega t + \phi)} (w_a - jw_b) \\ &= m e^{\sigma t} \left[ e^{j(\omega t + \phi)} (w_a + jw_b) + e^{-j(\omega t + \phi)} (w_a - jw_b) \right] \\ &= m e^{\sigma t} 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t + \phi)} (w_a + jw_b) \right\} \\ &= 2m e^{\sigma t} [w_a \cos(\omega t + \phi) - w_b \sin(\omega t + \phi)]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Si nota come, con  $\sigma = 0$ ,  $x_{\ell,12}(t)$  è una funzione periodica, con periodo  $2\pi/\omega$ . Se invece  $\sigma > 0$ , le traiettorie tendono all'infinito mentre tendono a finire nell'origine del sistema quando  $\sigma < 0$ .

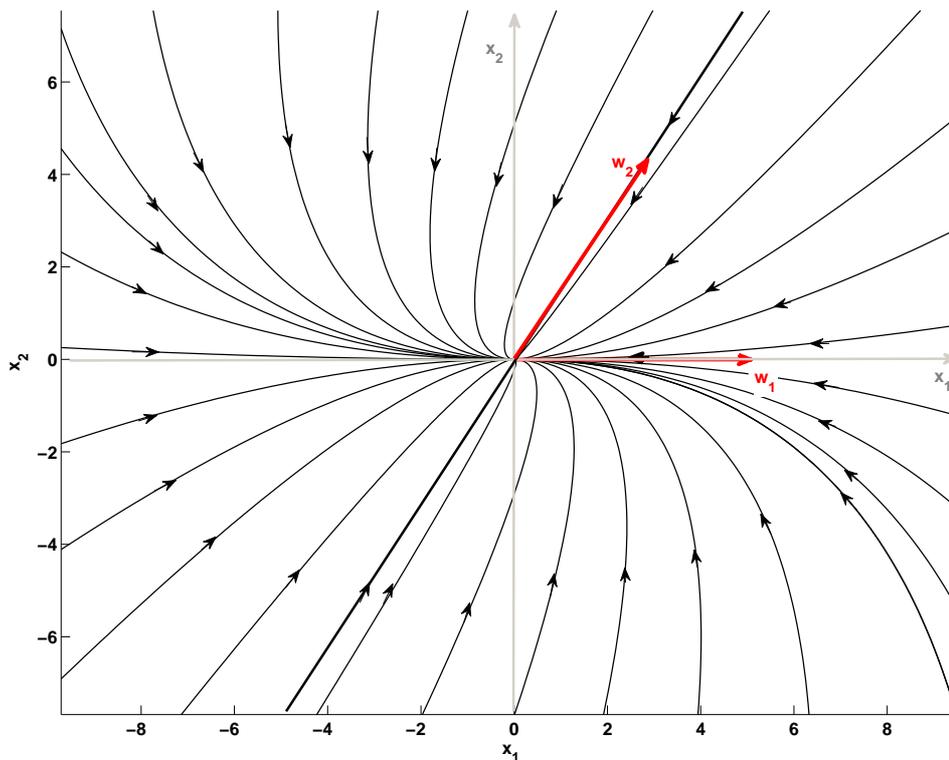
### 7.2.3 Il caso planare

Si illustrano in questa sezione, con riferimento al caso planare, cioè se  $x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  con  $\bar{n} = 2$ , le possibili evoluzioni libere del sistema a seconda del valore che assumono i suoi due autovalori, che supporremo ancora una volta distinti. Nel caso planare la (7.18) diventa:

$$x_\ell(t) = e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} w_1 c_1 + e^{\lambda_2 t} w_2 c_2, \quad (7.21)$$

essendo  $c_1$  e  $c_2$  le componenti di  $x_0$  rispetto alla base di autovettori  $w_1$  e  $w_2$ .

Vediamo prima il caso di autovalori reali, cioè  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . In questo caso le risposte libere del sistema sono di tipo esponenziale, decrescenti a 0 nel caso in cui gli autovalori di  $A$  siano negativi e divergenti esponenzialmente nel caso siano positivi. Nel caso di un autovalore positivo



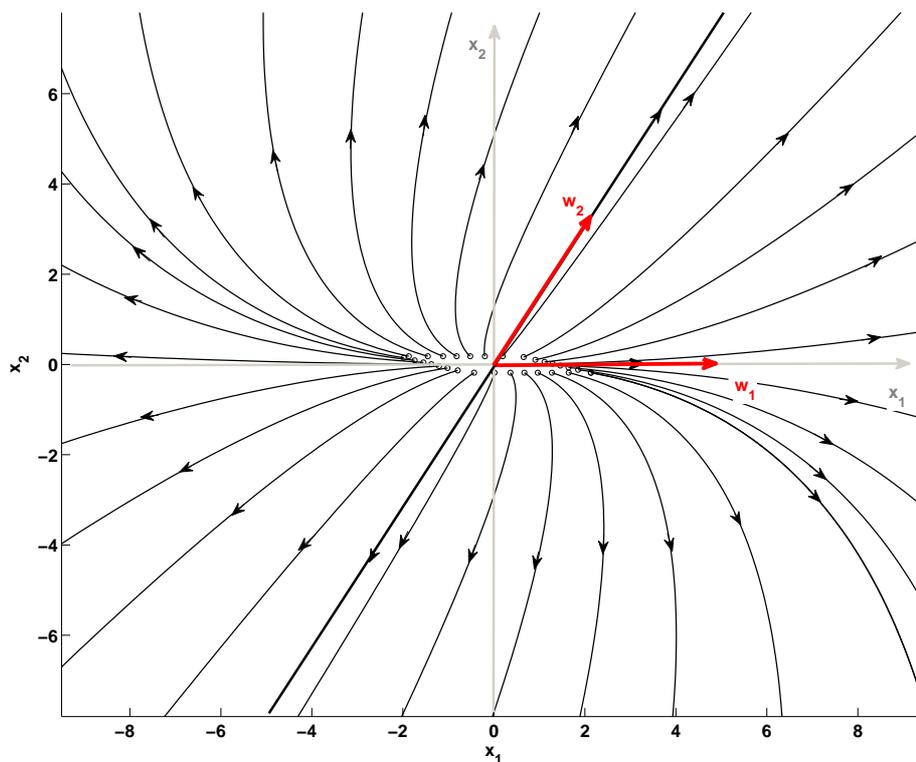
**Figura 7.1:** Nodo stabile (matrice  $A = [-1, -2/3; 0, -2]$ )

e uno negativo, la risposta libera potrà essere convergente a 0 (se il coefficiente  $c_i$  relativo all'autovalore positivo è nullo) o in generale divergente secondo l'esponenziale relativo all'autovalore positivo. Nelle Figg. 7.1-7.4 si riportano le traiettorie libere del sistema nello spazio di stato (il piano  $(x_1, x_2)$  in questo caso) al variare del segno dei due autovalori. In tutte queste figure si è considerata come coppia di autovettori  $w_1 = [1, 0]'$  e  $w_2 = [0.4, 0.6]'$ . Le varie figure corrispondono a una diversa scelta degli autovalori relativi a questi due autovettori, rispettivamente  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

Nella Fig. 7.1 si è considerato il caso di autovalori entrambi negativi:  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$ . Le componenti lungo i due autospazi (cioè lungo  $w_1$  e  $w_2$ ) vanno entrambe a zero, sicché tutte le traiettorie tendono all'origine dello spazio di stato.

Nella Fig. 7.2 invece si è considerato il caso di autovalori entrambi positivi:  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$ . Si noti come tale figura sia identica alla precedente salvo il verso di percorrenza delle traiettorie. In questa figura si è voluto mostrare anche la condizione iniziale di ogni traiettoria per far capire come, partendo comunque vicino all'origine, poiché le componenti lungo i due autospazi (cioè lungo  $w_1$  e  $w_2$ ) sono entrambe divergenti, tutte le traiettorie tendono all'infinito.

La Fig. 7.3 si riferisce al caso di un autovalore positivo ( $\lambda_1 = 1$ ) e uno negativo ( $\lambda_2 = -2$ ). La componente dello stato lungo  $w_1$  diverge mentre l'altra tende a zero. Questo dà luogo a traiettorie del tipo mostrato in figura, che divergono lungo  $w_1$  ma convergono lungo  $w_2$ . In particolare, se uno stato ha componente nulla rispetto a  $w_1$ , la traiettoria converge all'origine dello spazio di stato.



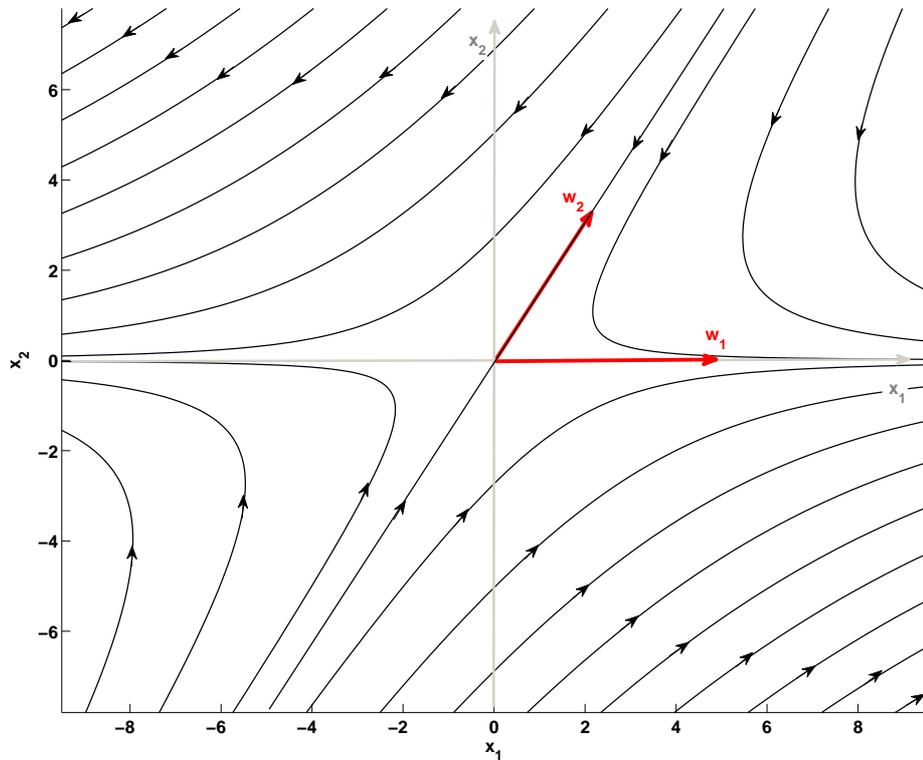
**Figura 7.2:** Nodo instabile (matrice  $A = [1, 2/3; 0, 2]$ )

Infine, se uno dei due autovalori ( $\lambda_1$ ) è nullo, e l'altro è negativo ( $\lambda_2 = -2$ ), la componente dello stato lungo  $w_1$  rimane costante nel tempo ( $e^{\lambda t} = 1$  se  $\lambda = 0$ ), mentre l'altra tende a zero. Questo dà luogo a traiettorie del tipo mostrato in Fig. 7.4, che convergono lungo  $w_2$  ma la cui componente rispetto a  $w_1$  rimane costante. Anche qui, se uno stato ha componente nulla rispetto a  $w_1$ , la traiettoria converge all'origine dello spazio di stato.

Le Figg. 7.1-7.4 (ma anche le Figg. 7.5-7.7) raffigurano traiettorie ottenute simulando la dinamica  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , a partire da diverse condizioni iniziali (a volte riportate in figura come piccoli cerchietti). La matrice  $A$  è data da  $A = P\Lambda P^{-1}$  dove  $\Lambda$  è la matrice diagonale con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sulla diagonale principale e  $P$  è la matrice che ha per colonne i due autovettori, cioè  $P = [w_1 \ w_2]$ . Le matrici  $A$  utilizzate nelle varie simulazioni sono indicate in modo esplicito nella didascalia delle figure.

Nel caso di una coppia di autovalori complessi coniugati, si è visto che la risposta libera evolve secondo la (7.20) e si è già osservato come, con  $\sigma = 0$ ,  $x_\ell(t)$  sia una funzione periodica, con periodo  $2\pi/\omega$ . Se invece  $\sigma > 0$ , le traiettorie tendono all'infinito mentre tendono a finire nell'origine del sistema quando  $\sigma < 0$ .

Questo comportamento viene illustrato nelle Figg. 7.5-7.7, dove si riporta l'andamento nello spazio di stato delle risposte libere, a partire da diverse condizioni iniziali (indicate con dei piccoli cerchietti in alcune figure). La Fig. 7.5 è il caso di  $\sigma = 0$ . In tale figura si è considerato  $\omega = 1$ ,  $w_a = [1, 0]'$  e  $w_b = [0.4, 0.6]'$ . Si noti come le traiettorie seguano un moto periodico di



**Figura 7.3:** Sella (matrice  $A = [1, -2; 0, -2]$ )

tipo ellittico<sup>1</sup>.

Nel caso in cui  $\sigma = 0.1$  le traiettorie sono delle spirali divergenti, come mostrato in Fig. 7.6, realizzata con gli stessi valori di  $\omega$ ,  $w_a$  e  $w_b$ .

Si hanno spirali convergenti nel caso di  $\sigma$  negativo riportato in Fig. 7.7. In tale figura si è scelto  $\sigma = -0.1$  e si sono considerati gli stessi valori delle figure precedenti per quanto riguarda  $\omega$ ,  $w_a$  e  $w_b$ .

#### 7.2.4 Osservabilità ed eccitabilità dei modi

Sempre nell'ipotesi fin qui considerata che  $A$  sia una matrice con autovalori tutti distinti tra di loro (e quindi diagonalizzabile), si vuole vedere quali di questi autovalori risultano presenti nella risposta libera in uscita e nella risposta forzata in uscita e nello stato.

Per quanto riguarda la risposta libera in uscita, sostituendo la (7.17) nella (7.5), si ha:

$$\Psi(t) = C e^{At} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} C w_i v_i', \quad (7.22)$$

<sup>1</sup>Se si calcolano gli autovalori della matrice  $A$  indicata nella didascalia della Fig. 7.5, è facile verificare che  $A$  ha come autovalori proprio  $\lambda_1 = j$  e  $\lambda_2 = -j$  e che  $A \cdot w_1 = \lambda_1 w_1$ , dove  $w_1 = w_a + j w_b$  è quindi un autovettore di  $A$  relativo a  $\lambda_1 = j$ .

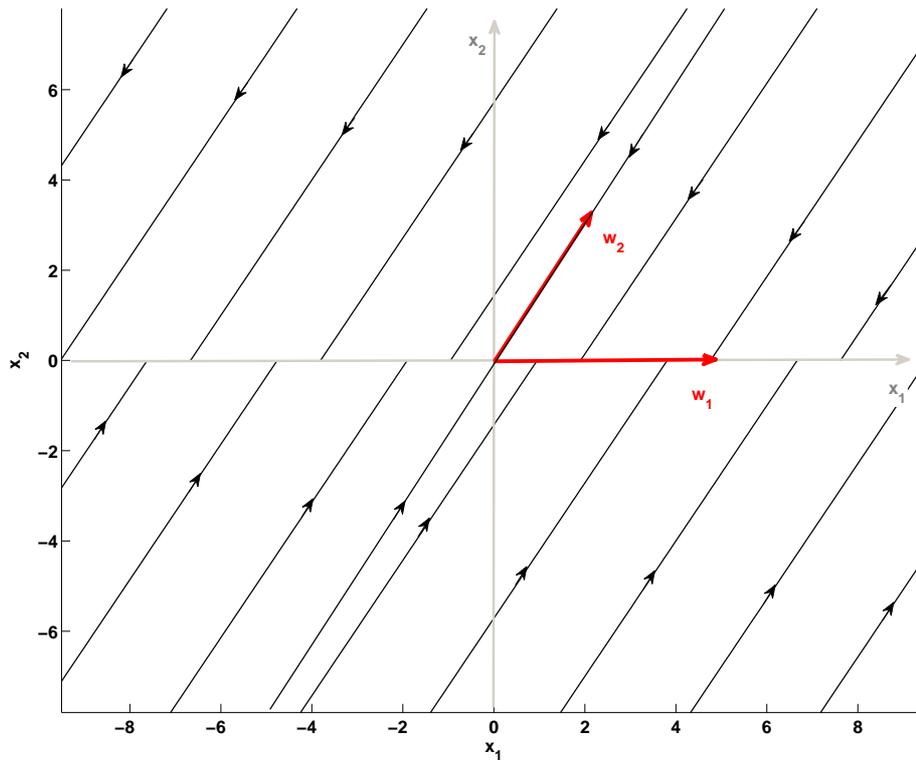


Figura 7.4: Il caso di un autovalore nullo (e l'altro negativo) (matrice  $A = [0, -4/3; 0, -2]$ )

e pertanto

$$y_\ell(t) = C e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} C w_i c_i,$$

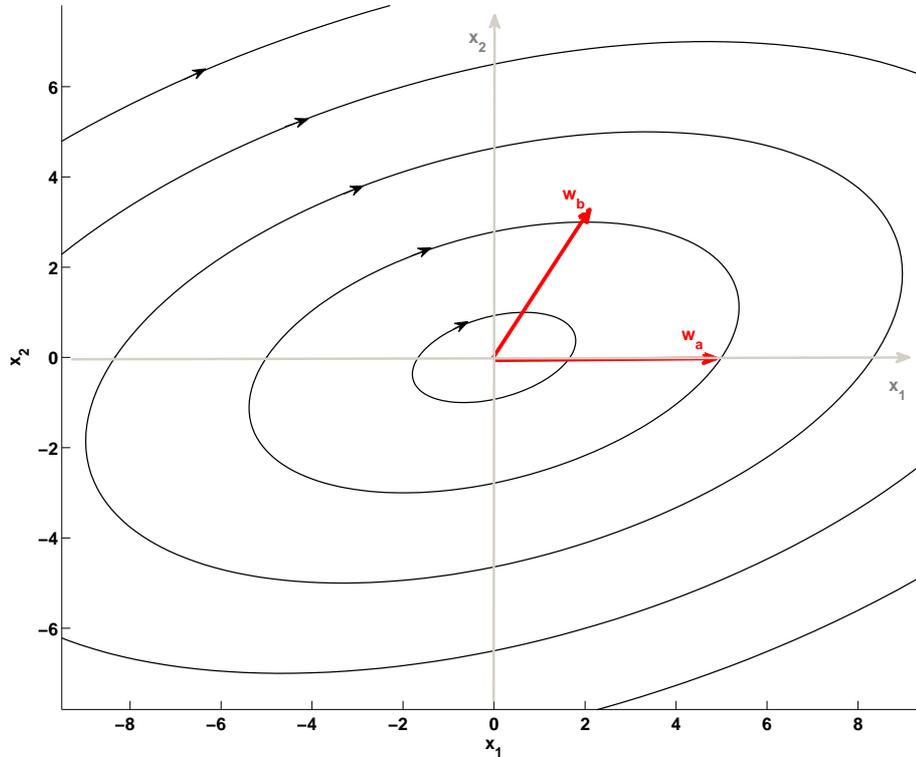
dove  $c_i = v_i' x_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, \bar{n}$ , rappresentano ancora una volta le componenti di  $x_0$  lungo gli autovettori (destri) di  $A$ .

Dalla precedente è immediato vedere che, se  $C w_i = 0$ , il modo naturale descritto da  $\lambda_i$  non apparirà mai nella risposta libera, qualsiasi siano le condizioni iniziali. Si noti che se  $\lambda_i$  è complesso, con autovettore relativo  $w_i = w_a + j w_b$ , il fatto che  $C w_i = 0$  implica che anche  $C w_i^* = 0$  (cioè  $C w_a = 0$  e  $C w_b = 0$ ). Pertanto è tutta la coppia complessa di autovalori  $\lambda_i$  e  $\lambda_i^*$  che non apparirà in uscita.

Viceversa, se  $C w_i \neq 0$ ,  $\lambda_i$  può apparire in uscita sotto opportune condizioni iniziali e si dice che il modo naturale relativo a  $\lambda_i$  è **osservabile** in uscita. Si noti che, se un modo  $\lambda_i$  non è osservabile in uscita, esso non comparirà come polo della trasformata di Laplace  $\Psi(s)$  di  $\Psi(t)$ .

Si consideri ora la risposta forzata nello stato. Sostituendo la (7.17) nella (7.2), si ha:

$$H(t) = e^{At} B = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} w_i v_i' B. \quad (7.23)$$



**Figura 7.5:** Centro (matrice  $A = [-0.4, 1.9333; -0.6, 0.4]$ )

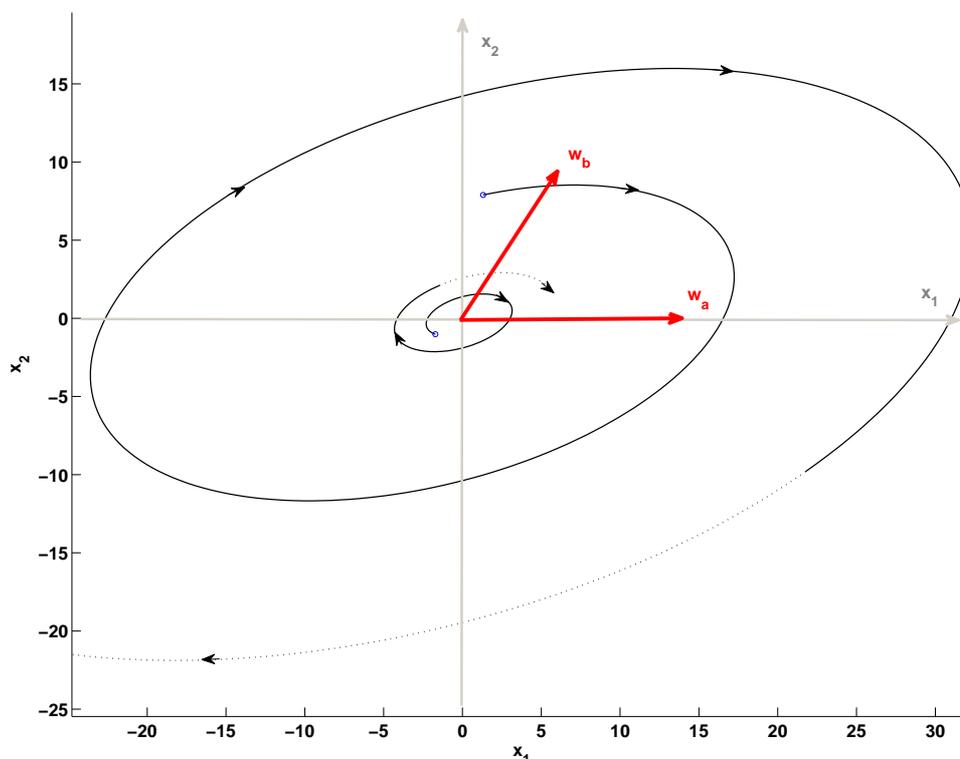
Si ricorda che la matrice  $H$  (che nel caso qui considerato di un ingresso scalare è in effetti un vettore colonna) è la matrice delle risposte impulsive nello stato (cioè  $x(t) = H(t)u$  se, a partire da condizioni iniziali nulle, in ingresso si immette un impulso unitario  $u(t) = \delta_0(t)$ ).

È evidente dalla precedente che se  $v_i' B = 0$ , il modo naturale  $\lambda_i$  non apparirà in nessuna delle componenti dello stato. Per questo motivo, in analogia con quanto fatto per la risposta libera in uscita, il modo  $\lambda_i$  si dice **eccitabile con impulsi in ingresso** se  $v_i' B \neq 0$ . In tal caso  $\lambda_i$  apparirà in almeno una delle componenti di  $H(t)$ . Si noti che anche in questo caso  $v_i' B$  rappresenta la componente del vettore colonna  $B$  lungo l'autospazio di  $\lambda_i$ . Nel caso di  $\lambda_i$  complesso si applica lo stesso identico discorso fatto sopra per lo studio dell'osservabilità dei modi in uscita. Anche in questo caso, un modo  $\lambda_i$  non eccitabile con impulsi in ingresso non comparirà come polo della trasformata di Laplace  $H(s)$  di  $H(t)$ .

Per finire, con riferimento alla risposta forzata in uscita, sostituendo la (7.17) nella (7.6), si ha:

$$W(t) = C e^{At} B + D \delta_0(t) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} C w_i v_i' B + D \delta_0(t). \quad (7.24)$$

Sulla base di quanto detto in precedenza, si può facilmente concludere che la risposta in uscita a un ingresso impulsivo contiene il modo relativo a  $\lambda_i$  (o quello relativo alla coppia complessa  $(\lambda_i, \lambda_i^*)$ ) se e solo se il modo  $\lambda_i$  è sia osservabile ( $C w_i \neq 0$ ) sia eccitabile con impulsi dall'in-



**Figura 7.6:** Fuoco instabile (matrice  $A = [-0.3, 1.9333; -0.6, 0.5]$ )

gresso ( $v_i' B \neq 0$ ). Solo in questo caso il modo relativo a  $\lambda_i$  compare quindi nella funzione di trasferimento  $W(s)$  (trasformata di  $W(t)$ ).

**Osservazione 1** *Si noti che, nel dominio della trasformata, la risposta forzata nello stato è data da:*

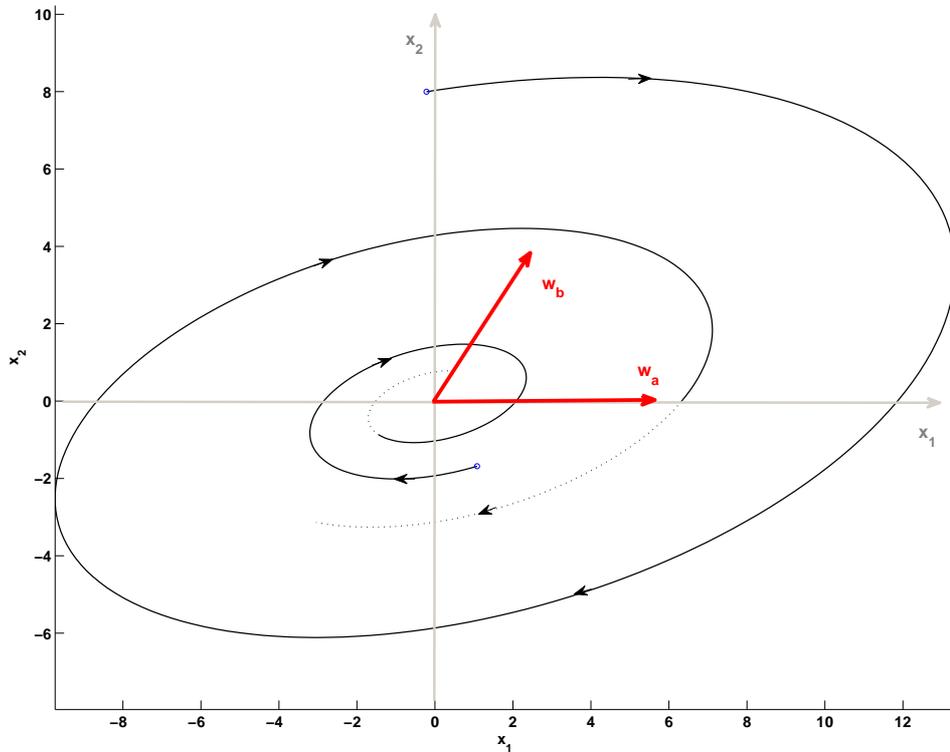
$$X_f(s) = H(s)U(s).$$

*Se  $U(s)$  è una funzione razionale strettamente propria, antitrasformando la precedente (mediante la scomposizione in fratti semplici), si vede facilmente come l'eccitabilità di un modo  $\lambda_i$ , che equivale alla sua presenza come polo di  $H(s)$ , implica che almeno per qualche ingresso  $u(t)$ , almeno una componente del vettore di risposta forzata nello stato  $x_f(t)$  contenga il modo  $e^{\lambda_i t}$ . Analogamente, antitrasformando l'espressione in  $s$  della risposta forzata in uscita*

$$Y_f(s) = W(s)U(s),$$

*si vede facilmente come l'osservabilità e l'eccitabilità di un modo  $\lambda_i$ , che equivale alla sua presenza come polo di  $W(s)$ , implica che almeno per qualche ingresso  $u(t)$ , la risposta forzata  $y_f(t)$  contenga il modo  $e^{\lambda_i t}$ .*

**Osservazione 2** *Con riferimento alla Fig. 3.1 riportata nel Cap. 3, nel caso particolare di una matrice dinamica  $A$  diagonalizzabile con autovalori distinti (cioè nel caso considerato in questa*



**Figura 7.7:** Fuoco stabile (matrice  $A = [-0.5, 1.9333; -0.6, 0.3]$ )

sezione), si ha che il blocchetto raggiungibile e osservabile descritto da  $z_a$  sarà caratterizzato da modi naturali (cioè autovalori) che sono sia eccitabili con impulsi dall'ingresso e sia osservabili in uscita. Il blocchetto solo raggiungibile descritto da  $z_b$  avrà modi che sono solo eccitabili ma non osservabili. Il blocchetto  $z_c$  presenterà solo modi osservabili ma non eccitabili mentre  $z_d$  evolverà secondo modi che non sono né eccitabili dall'ingresso né osservabili in uscita.

### 7.3 Esempio sull'Analisi Modale

Si consideri un sistema a tempo continuo la cui rappresentazione ISU è caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = [1, 2, 1] \quad D = 0. \quad (7.25)$$

- Calcolare la matrice di transizione dello stato  $\Phi(t)$  attraverso la decomposizione spettrale.
- Verificare l'eccitabilità e l'osservabilità dei singoli modi.
- Verificare che un modo appare nella risposta impulsiva in uscita  $W(t)$  se e solo se è eccitabile mediante impulsi in ingresso e osservabile in uscita.

**Soluzione.** I modi del sistema sono gli autovalori di  $A$  e si calcolano determinando le radici del polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 6 \end{bmatrix} = \\ &= (\lambda - 2) \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -1 \\ -2 & \lambda - 6 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 11\lambda + 28) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 7). \end{aligned}$$

La matrice  $A$  ha tre autovalori distinti ( $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 4$  e  $\lambda_3 = 7$ ) e quindi siamo nel caso particolare considerato nella teoria (si veda il Cap. 7). In particolare, per ricavare la decomposizione spettrale di  $A$  necessaria per rispondere al primo quesito, occorre determinare gli autovettori destri relativi a ciascun autovalore. Poiché gli autovalori hanno tutti molteplicità algebrica uno, anche la loro molteplicità geometrica sarà uno e pertanto ci sarà un solo autovettore destro indipendente per ognuno dei tre autovalori.

**Autovettore destro relativo a  $\lambda_1 = 2$ .** È il vettore non nullo  $w \in \mathbb{R}^3$  soluzione del sistema di equazioni  $(A - 2I)w = 0$ . Si ha:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Come atteso,  $A - 2I$  ha rango 2 (gli autovalori sono quei numeri  $\lambda$  per cui  $A - \lambda I$  non ha rango pieno, che è 3 in questo caso, e quindi sono tali che  $(A - \lambda I)w = 0$  ammette soluzioni  $w$  non nulle). In questo caso, se  $w = [w(1), w(2), w(3)]'$ , le equazioni indipendenti sono:

$$\begin{aligned} 3w(1) + w(2) + w(3) &= 0 \\ 2w(1) + 4w(3) &= 0. \end{aligned}$$

Scegliendo  $w(3) = 1$  (una componente di  $w$  è libera, avendo 2 equazioni in 3 incognite), si ottiene come soluzione  $w_1 = [-2, 5, 1]'$ .

**Autovettore destro relativo a  $\lambda_2 = 4$ .** È il vettore non nullo  $w \in \mathbb{R}^3$  soluzione del sistema di equazioni  $(A - 4I)w = 0$ . Si ha:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso,  $A - 4I$  ha solo due righe linearmente indipendenti (per esempio la terza riga può essere ottenuta sommando la seconda alla prima moltiplicata per due). Prendendo dunque le equazioni corrispondenti alle ultime due righe:

$$\begin{aligned} -2w(2) &= 0 \\ 2w(1) + 2w(3) &= 0. \end{aligned}$$

Queste implicano  $w(2) = 0$  e, scegliendo  $w(3) = -1$ , si ottiene come soluzione  $w_2 = [1, 0, -1]'$ .

**Autovettore destro relativo a  $\lambda_3 = 7$ .** È il vettore non nullo  $w \in \mathbb{R}^3$  soluzione del sistema di equazioni  $(A - 7I)w = 0$ . Si ha:

$$A - 7I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prendendo anche qui le equazioni corrispondenti alle ultime due righe:

$$\begin{aligned} -5w(2) &= 0 \\ 2w(1) - w(3) &= 0. \end{aligned}$$

Queste implicano  $w(2) = 0$  e, scegliendo  $w(3) = 2$ , si ottiene come soluzione  $w_3 = [1, 0, 2]'$ .

La matrice di cambiamento di coordinate  $T$  si ottiene come inversa di  $T^{-1}$ , che ha per colonne gli autovettori destri appena calcolati:

$$T = [w_1, w_2, w_3]^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/15 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Le righe di  $T$  sono gli autovettori sinistri di  $A$  relativi ai tre autovalori, cioè

$$T = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix}.$$

A questo punto si può scrivere  $A$  secondo la sua decomposizione spettrale (vedere l'equazione (7.16)):

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i w_i v'_i = \lambda_1 w_1 v'_1 + \lambda_2 w_2 v'_2 + \lambda_3 w_3 v'_3 \\ &= 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} [0, 1/5, 0] + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [2/3, 1/3, -1/3] + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [1/3, 1/15, 1/3] \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/15 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/15 & 2/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice  $\Phi(t)$  di transizione dello stato, in accordo con la (7.1) e la (7.17), può essere scritta, in **risposta al primo quesito** di questo esercizio, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} w_i v'_i = e^{\lambda_1 t} w_1 v'_1 + e^{\lambda_2 t} w_2 v'_2 + e^{\lambda_3 t} w_3 v'_3 \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix} + e^{4t} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} + e^{7t} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/15 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/15 & 2/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{7t} & -\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{15}e^{7t} & -\frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{7t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ -\frac{2}{3}e^{4t} + \frac{2}{3}e^{7t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{2}{15}e^{7t} & \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{2}{3}e^{7t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Eccitabilità e osservabilità dei singoli modi (risposta al secondo quesito).** In accordo con quanto riportato nella Sez. 7.2.4, un modo  $\lambda_i$  è eccitabile con impulsi in ingresso se  $v'_i B \neq 0$ , essendo  $v_i$  l'autovettore sinistro di  $A$  relativo a  $\lambda_i$ . Si ha dunque:

- $\lambda_1 = 2$

$$v'_1 B = [0, 1/5, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{NON eccitabile.}$$

- $\lambda_2 = 4$

$$v'_2 B = [2/3, 1/3, -1/3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = -1/3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{eccitabile.}$$

- $\lambda_3 = 7$

$$v'_3 B = [1/3, 1/15, 1/3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 4/3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{eccitabile.}$$

Un modo  $\lambda_i$  è osservabile in uscita se  $C w_i \neq 0$ , essendo  $w_i$  l'autovettore destro di  $A$  relativo a  $\lambda_i$ . Si ha dunque:

- $\lambda_1 = 2$

$$C w_1 = [1, 2, 1] \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{osservabile.}$$

- $\lambda_2 = 4$

$$C w_2 = [1, 2, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{NON osservabile.}$$

- $\lambda_3 = 7$

$$C w_3 = [1, 2, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{osservabile.}$$

Per quanto riguarda il **terzo quesito**, determiniamo innanzitutto l'espressione della funzione di risposta impulsiva  $W(t)$  che è data da:

$$\begin{aligned} W(t) &= C e^{At} B + D \delta_0(t) \\ &= [1, 2, 1] \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{7t} & -\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{15}e^{7t} & -\frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{7t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ -\frac{2}{3}e^{4t} + \frac{2}{3}e^{7t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{2}{15}e^{7t} & \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{2}{3}e^{7t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \\ &= [1, 2, 1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{4t} + \frac{4}{3}e^{7t} \\ 0 \\ \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{8}{3}e^{7t} \end{bmatrix} \\ &= 4e^{7t}. \end{aligned}$$

Come è facile verificare, l'unico modo che compare nella  $W(t)$  è  $\lambda_3 = 7$ , che infatti è l'unico autovalore sia eccitabile sia osservabile. La funzione di trasferimento  $W(s)$  (trasformata di  $W(t)$ ), data in questo caso da  $\frac{4}{s-7}$ , avrà quindi solo 7 come polo (che è in effetti l'autovalore del blocchetto raggiungibile e osservabile  $z_a$  della Fig. 3.1). Gli altri due autovalori, 2 e 4, sono rispettivamente relativi ai blocchetti  $z_c$  (osservabile ma non raggiungibile) e  $z_b$  (raggiungibile ma non osservabile) e non compaiono quindi tra i poli di  $W(s)$ .



## Capitolo 8

### Sistemi a tempo discreto

#### 8.1 Introduzione

In questa sezione si introducono i sistemi dinamici a tempo discreto. Anche in questo caso si farà riferimento a sistemi lineari e stazionari. Essi presentano una dinamica formalmente molto simile a quella dei sistemi a tempo continuo ma definita su valori discreti del tempo. La rappresentazione I-S-U di un sistema a tempo discreto lineare e stazionario è definita dalle seguenti equazioni, in cui  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 0$ :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (8.1)$$

Il significato delle quantità che compaiono nelle precedenti è lo stesso del caso a tempo continuo:  $x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  è lo stato del sistema,  $y \in \mathbb{R}$  l'uscita (ovvero una grandezza che interessa controllare e quindi generalmente misurata),  $u \in \mathbb{R}$  l'ingresso (ossia il controllo) e  $A \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{n}}$  e  $D \in \mathbb{R}$  rispettivamente la matrice dinamica, la matrice di ingresso, la matrice di uscita e il legame diretto ingresso-uscita.

L'interesse per questo tipo di sistemi è dovuto a molteplici ragioni. Innanzitutto un sistema a tempo discreto può nascere dal campionamento di un sistema a tempo continuo: nella maggior parte dei casi, infatti, il controllo di un processo fisico descritto da un sistema a tempo continuo viene realizzato su calcolatore. Questo comporta che le varie misure  $y$  siano prelevate dal sistema solo in certi tempi discreti  $t_k$ . Spesso questi tempi sono equispaziati, cioè  $t_k = kT_c$ , dove  $T_c$  è il tempo di campionamento. Anche il valore del controllo  $u$ , risultato dell'algoritmo di controllo, viene modificato solo ogni  $T_c$  unità di tempo. Di conseguenza, può essere ragionevole in questi casi descrivere tutta la dinamica del sistema come una dinamica a tempo discreto del tipo riportato in (8.1). Va detto che un sistema a tempo discreto che nasce dal campionamento di un sistema a tempo continuo presenta proprietà specifiche che non valgono in generale per tutti i sistemi a tempo discreto (come verrà accennato nella Sez. 8.3.6). Lo studio approfondito di queste proprietà così come anche delle tecniche di controllo (che viene detto *numerico*, o *digitale*) per sistemi di questo tipo esula però dagli scopi di questa trattazione.

Una dinamica a tempo discreto può tuttavia descrivere anche fenomeni che non riguardano il campionamento di dinamiche a tempo continuo. Esempi di questo tipo sono alcuni sistemi artificiali, dove l'evoluzione del sistema è scandita da un segnale di clock. Altri esempi che ricadono in questa categoria sono quelli relativi a sistemi economici dove l'indice  $k$  potrebbe essere associato al giorno o all'anno. Più in dettaglio, si assuma per esempio che  $y(k)$  rappresenti il capitale investito in un certo titolo che dà un rendimento percentuale annuale  $\alpha$ . Nell'anno  $k+1$  il capitale sarà  $y(k+1) = (1 + \alpha)y(k)$ .

Anche una successione come quella di Fibonacci potrebbe essere descritta mediante una dinamica di tipo (8.1). Si consideri infatti la successione

$$y(k+1) = y(k) + y(k-1),$$

con  $y(k) = 0$  per ogni  $k < 0$  e  $y(0) = 1$ . La successione, come è ben noto, prodotta dalla ricorsione precedente è:  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ . Per descriverla mediante una dinamica del tipo (8.1), si introduca lo stato  $x(k) = [y(k-1), y(k)]'$ . L'evoluzione di  $x(k)$  è in effetti del tipo

riportato nella prima equazione della (8.1) con  $A = [0, 1; 1, 1]$  e  $B$  non specificata in quanto si può assumere un'evoluzione di tipo libero (cioè  $u = 0$ ). L'uscita  $y(k) = Cx(k)$  con  $C = [0, 1]$ . La condizione iniziale è  $x_0 = [0 \ 1]'$ .

### 8.1.1 Obiettivi

Data una dinamica del tipo discreto (8.1), scopo del presente capitolo è quello di fornire gli strumenti per il calcolo della risposta nello stato  $x$  e nell'uscita  $y$  a fronte di un certo ingresso  $u$  e di certe condizioni iniziali  $x_0$ . Si utilizzerà a tal fine un approccio molto simile a quello dei sistemi a tempo continuo: in particolare si introdurrà la trasformata Zeta, che presenta invero molti parallelismi con la trasformata di Laplace.

Sebbene la maggior parte delle considerazioni svolte nei capitoli precedenti (e successivi) sui sistemi a tempo continuo possano essere applicate in modo quasi invariato ai sistemi a tempo discreto (o comunque con modifiche minori), ciò non verrà fatto in questo corso.

Quindi, in particolare, non si parlerà in questo corso della rappresentazione I-U di un sistema a tempo discreto né del modo per passare da una rappresentazione I-S-U a una I-U (e viceversa). Non si ripeterà neanche, per il caso a tempo discreto, l'analisi modale affrontata qualche pagina fa nel caso di sistemi a tempo continuo. Anche il problema del controllo, così come le tecniche di analisi della stabilità, verranno sviluppate nel seguito di questo corso solo per sistemi a tempo continuo, lasciando la trattazione del caso a tempo discreto a corsi più avanzati.

## 8.2 Calcolo della risposta: soluzione esplicita della risposta libera e forzata nello stato e nell'uscita

Mediante calcolo diretto (ed eventualmente verificandolo per induzione), non è difficile convincersi che la soluzione alla prima equazione delle (8.1) è data da:

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B u(j). \quad (8.2)$$

La precedente rappresenta la scrittura esplicita della risposta completa nello stato (a partire dalle condizioni iniziali  $x_0$  e conseguente all'applicazione dell'ingresso  $u(\cdot)$ ). In essa si riconosce facilmente per analogia al caso continuo la risposta libera nello stato (il termine a sinistra della somma, che dipende solo dalle condizioni iniziali) e quella forzata (il termine a destra, dipendente solo dall'ingresso).

Come fatto nel caso a tempo continuo, si possono definire una matrice di transizione dello stato  $\Phi(k) = A^k$ ,  $k \geq 0$ , che permette di scrivere la risposta libera nello stato come  $x_\ell(k) = \Phi(k)x_0$  e una matrice delle risposte impulsive nello stato<sup>1</sup>  $H(k) = A^{k-1}B$ ,  $k \geq 1$  (con  $H(0) = 0$ ), che permette di scrivere la risposta forzata nello stato come  $x_f(k) = \sum_{j=0}^{k-1} H(k-j)u(j)$ . Il nome di tale matrice è evidente: se l'ingresso è l'impulso unitario,  $H(k)$  rappresenta proprio lo stato al tempo  $k$ . La colonna  $i$ -esima di  $\Phi(k)$  rappresenta invece la risposta libera nello stato  $x_\ell(k)$  relativa ad una condizione iniziale fatta di tutti 0 tranne un 1 in posizione  $i$ .

Per quanto riguarda la risposta completa in uscita si ha:

$$y(k) = CA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j} B u(j) + Du(k). \quad (8.3)$$

<sup>1</sup>L'impulso  $\delta_0(k)$ , nel caso a tempo discreto, è definito, come si vedrà nella sezione sulla trasformata Zeta, come quella funzione che vale 0 per tutti i  $k$  tranne che per  $k = 0$  dove vale 1

Anche qui si riconoscono i termini libero e forzato e anche qui si possono definire una matrice  $\Psi(k) = CA^k$  (relativa alla parte di risposta libera:  $y_\ell(k) = \Psi(k)x_0$ ) e una matrice delle risposte impulsive  $W(k) = CA^{k-1}B$  per  $k \geq 1$  e  $W(0) = D$  (legata alla risposta forzata in uscita:  $y_f(k) = \sum_{j=0}^k W(k-j)u(j)$ ). L'elemento  $i$ -esimo di  $\Psi(k)$  rappresenta la risposta libera  $y_\ell(k)$  relativa ad una condizione iniziale fatta di tutti 0 tranne un 1 in posizione  $i$ . La funzione scalare  $W(k)$  rappresenta invece la risposta forzata conseguente all'applicazione di un impulso unitario.

## 8.3 Calcolo della risposta nello stato e in uscita: la trasformata Zeta

Si consideri un segnale a tempo discreto  $x(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 0$ . Si definisce trasformata Zeta  $X(z)$  di  $x(k)$  la seguente funzione di variabile complessa  $z \in \mathbb{C}$ :

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}, \quad (8.4)$$

la quale converge per ogni  $|z| > \rho$ , con  $\rho$  il raggio di convergenza di  $X(z)$ , raggio che dipende chiaramente da come è fatta  $x(k)$ .

### 8.3.1 Trasformata di alcune funzioni di uso corrente

Si riporta in questa sezione la trasformata di alcune funzioni  $x(k)$  che sono poi quelle d'interesse ai fini di questo corso.

#### 1. Gradino unitario

Si definisce la funzione *gradino unitario* a tempo discreto nel seguente modo:

$$\delta_{-1}(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0. \end{cases}$$

Applicando la definizione (8.4) si ha:

$$\mathcal{Z}\{\delta_{-1}(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \delta_{-1}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1},$$

con raggio di convergenza  $\rho = 1$ . Si ricordi infatti che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$  converge per  $|a| < 1$  a  $\frac{1}{1-a}$ . La precedente si ottiene pertanto da questa formula considerando  $a = 1/z$ .

#### 2. Impulso unitario

Si consideri la funzione impulso unitario  $\delta_0(k)$ , definita nel seguente modo:

$$\delta_0(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

In base alla definizione della trasformata Zeta, è immediato vedere che

$$\mathcal{Z}\{\delta_0(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \delta_0(k) = 1.$$

La serie precedente converge per ogni  $z$  e pertanto in questo caso il raggio di convergenza è  $\rho = 0$ .

### 3. Funzione potenza

Si consideri la funzione  $a^k \delta_{-1}(k)$ , con  $a \in \mathbb{C}$  ( $a \neq 0$ ). Utilizzando sempre la proprietà della serie di potenze è immediato ricavare che

$$\mathcal{Z}\{a^k \delta_{-1}(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a},$$

con raggio di convergenza  $\rho = |a|$ .

### 8.3.2 Alcune proprietà della trasformata Zeta

La trasformata Zeta gode di proprietà analoghe a quella di Laplace.

#### 1. Linearità

Segue banalmente dalla definizione (8.4) che

$$\mathcal{Z}\{\alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k)\} = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z),$$

dove  $X_i(z) = \mathcal{Z}\{x_i(k)\}$ ,  $i = 1, 2$ .

#### 2. Prodotto per $a^k$ ( $\mathcal{Z}\{a^k x(k)\}$ )

Sia  $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$  e  $a \in \mathbb{C}$  un numero complesso. Allora

$$\mathcal{Z}\{a^k x(k)\} = X(z/a). \quad (8.5)$$

**Prova.**

Dalla definizione:

$$\mathcal{Z}\{a^k x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = X(z/a).$$

□

#### 3. Prodotto per il tempo

Se  $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$ , allora

$$\mathcal{Z}\{k \cdot x(k)\} = -z \frac{d}{dz} X(z). \quad (8.6)$$

**Prova.** Dalla definizione si ha:

$$\frac{d}{dz} X(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} x(k) = - \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k-1} x(k) = -\frac{1}{z} \mathcal{Z}\{kx(k)\}.$$

□

#### 4. Trasformata della funzione ritardata

Se  $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$ , allora

$$\mathcal{Z}\{x(k-1)\delta_{-1}(k-1)\} = \frac{X(z)}{z}.$$

**Prova.** Dalla definizione si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x(k-1)\delta_{-1}(k-1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}x(k-1)\delta_{-1}(k-1) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}x(k-1) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{-(\ell+1)}x(\ell) = \frac{1}{z} \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{-\ell}x(\ell) = \frac{X(z)}{z}.\end{aligned}$$

□

### 5. Trasformata della funzione anticipata

Se  $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$ , allora

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = z(X(z) - x_0). \quad (8.7)$$

**Prova.** Dalla definizione si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x(k+1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}x(k+1) = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{-(\ell-1)}x(\ell) \\ &= z \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{-\ell}x(\ell) = z \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{-\ell}x(\ell) - x_0 \right) = z(X(z) - x_0).\end{aligned}$$

□

### 8.3.3 Ulteriori trasformate Zeta

#### 1. Funzione rampa

Si consideri la funzione  $x(k) = k\delta_{-1}(k)$ . Si ha

$$\mathcal{Z}\{k\delta_{-1}(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

con raggio di convergenza  $\rho = 1$ . La dimostrazione della precedente si basa sulla (8.6) applicata alla funzione gradino  $x(k) = \delta_{-1}(k)$ .

#### 2. Funzione rampa quadratica

Si consideri la funzione  $x(k) = k^2\delta_{-1}(k)$ . Si ha

$$\mathcal{Z}\{k^2\delta_{-1}(k)\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

con raggio di convergenza  $\rho = 1$ . La dimostrazione della precedente si basa ancora sulla (8.6) applicata alla funzione rampa  $x(k) = k\delta_{-1}(k)$ .

#### 3. Funzione $x(k) = ka^{k-1}\delta_{-1}(k)$ , $a \neq 0$

$$\mathcal{Z}\{ka^{k-1}\delta_{-1}(k)\} = \frac{z}{(z-a)^2}$$

con raggio di convergenza  $\rho = |a|$ . La dimostrazione della precedente si basa ancora una volta sulla (8.6) applicata alla funzione  $x(k) = a^k$ .

#### 4. Coefficiente binomiale

Si consideri il coefficiente binomiale  $x(k) = \binom{k}{h}$  dove, se  $h \in \mathbb{Z}$  e  $h \geq 0$ , il coefficiente binomiale è definito nel seguente modo:

$$\binom{k}{h} = \begin{cases} 0 & k < h \\ \frac{k!}{h!(k-h)!} & k \geq h. \end{cases}$$

Si ha:

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{k}{h} \right\} = \frac{z}{(z-1)^{h+1}}$$

con raggio di convergenza  $\rho = 1$ . La precedente si dimostra per induzione su  $h$  notando che è valida per  $h = 0$  in quanto, se  $h = 0$ , è  $x(k) = \delta_{-1}(k)$ . Anche per  $h = 1$  la dimostrazione è stata già effettuata in quanto  $\binom{k}{1} = k\delta_{-1}(k)$ . Supponendola vera fino ad  $h$ , si può dimostrare che vale anche per  $h + 1$  sfruttando la proprietà (8.6). Si ha infatti:

$$\binom{k}{h+1} = \binom{k}{h} \frac{k-h}{h+1}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left\{ \binom{k}{h+1} \right\} &= \frac{1}{h+1} \mathcal{Z} \left\{ k \binom{k}{h} \right\} - \frac{h}{h+1} \mathcal{Z} \left\{ \binom{k}{h} \right\} \\ &= -\frac{z}{h+1} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^{h+1}} - \frac{h}{h+1} \frac{z}{(z-1)^{h+1}} = \frac{z}{(z-1)^{h+2}}. \end{aligned}$$

#### 5. Coefficiente binomiale moltiplicato per $a^{k-h}$

Si consideri la funzione  $x(k) = \binom{k}{h} a^{k-h}$ . Utilizzando la proprietà (8.5) applicata a

$x(k) = \binom{k}{h}$ , si ha

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{k}{h} a^{k-h} \right\} = \frac{z}{(z-a)^{h+1}}$$

con raggio di convergenza  $\rho = |a|$ .

#### 6. Seno e coseno

Si consideri la funzione  $x(k) = \sin(\theta k)$ . Utilizzando la formula di Eulero (si veda in particolare la (5.1)), e la trasformata della potenza di un numero  $a$ , è facile dimostrare che

$$\mathcal{Z}\{\sin(\theta k)\} = \frac{\sin(\theta)z}{z^2 - 2\cos(\theta)z + 1},$$

con raggio di convergenza  $\rho = 1$ . Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\sin(\theta k)\} &= \mathcal{Z}\left\{ \frac{e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}}{2j} \right\} \\ &= \frac{1}{2j} \left( \mathcal{Z}\{e^{j\theta k}\} - \mathcal{Z}\{e^{-j\theta k}\} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{j\theta}} - \frac{z}{z - e^{-j\theta}} \right) \\ &= \frac{\sin(\theta)z}{z^2 - 2\cos(\theta)z + 1}. \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che:

$$\mathcal{Z}\{\cos(\theta k)\} = \frac{z^2 - \cos(\theta)z}{z^2 - 2\cos(\theta)z + 1},$$

e

$$\mathcal{Z}\{\cos(\theta k + \phi)\} = \frac{\cos(\phi)z^2 - \cos(\theta - \phi)z}{z^2 - 2z\cos(\theta) + 1},$$

con raggio di convergenza  $\rho = 1$ .

### 8.3.4 Trasformata Zeta inversa

Come si vedrà tra breve, ai fini del presente corso, è di interesse saper antitrasformare solo funzioni razionali proprie. Si supponga quindi di dover calcolare  $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ , con  $X(z)$  razionale propria. Si procede nel seguente modo:

- Si consideri la funzione  $\bar{X}(z) = \frac{X(z)}{z}$ .
- Si decomponga in fratti semplici la funzione (strettamente propria!)  $\bar{X}(z)$  con il metodo visto per la trasformata di Laplace. Si ottiene quindi un'espressione del tipo:

$$\bar{X}(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(z - p_i)^j}.$$

La precedente equivale a

$$X(z) = z\bar{X}(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j} \frac{z}{(z - p_i)^j}.$$

- Si nota a questo punto che ciascun termine della somma è una trasformata nota. In particolare, se  $p_i \neq 0$ :

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z - p_i)^j}\right\} = \binom{k}{j-1} p_i^{k-j+1}.$$

Se invece  $p_i = 0$ ,

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z - p_i)^j}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z^{j-1}}\right\} = \delta_0(k - j + 1),$$

che è un impulso unitario collocato al tempo  $j - 1$ .

### 8.3.5 Uso della trasformata Zeta per il calcolo della risposta

Analogamente a quanto fatto a tempo continuo, applicando la trasformata Zeta alle equazioni riportate nella (8.1) si ottiene:

$$\begin{cases} X(z) &= (zI - A)^{-1}zx_0 + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z). \end{cases} \quad (8.8)$$

La prima equazione è stata ottenuta sfruttando la proprietà (8.7) (oltre alla proprietà di linearità della trasformata). In essa si riconosce la componente libera della risposta e quella

forzata (nello stato). Dalle precedenti è possibile ottenere l'espressione della trasformata delle varie matrici che caratterizzano le risposte:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \mathcal{Z}\{\Phi(k)\} = z(zI - A)^{-1} \\ H(z) &= \mathcal{Z}\{H(k)\} = (zI - A)^{-1}B \\ \Psi(z) &= \mathcal{Z}\{\Psi(k)\} = zC(zI - A)^{-1} \\ W(z) &= \mathcal{Z}\{W(k)\} = C(zI - A)^{-1}B + D.\end{aligned}$$

Se anche la trasformata  $U(z)$  è una funzione razionale propria, dalle (8.8) è immediato dedurre che le uniche funzioni da antitrasformare per il calcolo della risposta sono, come anticipato nella sezione precedente, di tipo razionale proprio.

### 8.3.6 Cenni all'analisi modale e ai sistemi a segnali campionati

L'analisi modale per i sistemi a tempo discreto risulta del tutto simile al caso a tempo continuo. A partire dalla stessa decomposizione spettrale della matrice dinamica  $A$  riportata in (7.16), si ottiene per la matrice di transizione dello stato  $\Phi(k) = A^k$  una scrittura del tutto simile a quella del caso a tempo continuo indicata in (7.17):

$$A^k = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i^k w_i v_i'. \quad (8.9)$$

Si noti come il ruolo degli esponenziali degli autovalori di  $A$  sia rimpiazzato nel caso a tempo discreto dalle potenze dei suddetti autovalori: la convergenza o meno a zero dei modi naturali del sistema è quindi legata nel caso a tempo discreto al modulo di questi autovalori e non, come avveniva nel caso continuo, alla loro parte reale. In particolare, nel caso a tempo discreto, i modi naturali del sistema saranno convergenti a zero se il modulo degli autovalori di  $A$  è minore di uno (occorreva una parte reale negativa nel caso a tempo continuo).

Si noti che, mentre nel caso continuo un modo oscillante era associato necessariamente a un autovalore complesso, nel caso a tempo discreto anche autovalori reali, se negativi, producono modi oscillatori.

Un'altra differenza notevole rispetto al caso a tempo continuo si ha quando la matrice  $A$  presenta un autovalore nullo. In questo caso, nella risposta libera in  $z$ , compaiono termini del tipo  $\frac{1}{z^h}$  che, come si è visto, corrispondono nel tempo a un impulso collocato al tempo  $h$ , e quindi a un modo che si esaurisce in un tempo finito. Nel caso in cui  $A$  abbia solo autovalori nulli, qualsiasi risposta libera del sistema si esaurisce in tempo finito (cosa che non accade mai per un sistema a tempo continuo).

Se però il sistema a tempo discreto risulta dal campionamento di un sistema a tempo continuo, questo fatto non si può verificare e si hanno proprietà particolari.

Si consideri infatti un sistema a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t) \end{cases} \quad (8.10)$$

che venga campionato uniformemente ogni  $T_c$  unità di tempo e si introduca la notazione  $x(k) = x(k \cdot T_c)$ . Assumiamo che, così come l'uscita venga misurata solo nei tempi  $k \cdot T_c$ , così il segnale  $u$  dato in ingresso al sistema continuo venga modificato solo ogni  $T_c$  unità di tempo e rimanga quindi costante in tutto l'intervallo  $[k \cdot T_c, (k+1) \cdot T_c)$ . Il sistema campionato diventa quindi un sistema a tempo discreto del tipo descritto dalle (8.1) con

$$A = e^{A_c T_c} \quad B = \int_0^{T_c} e^{A_c \xi} d\xi B_c, \quad C = C_c, \quad D = D_c. \quad (8.11)$$

Infatti, considerando come condizione iniziale per il sistema (8.10) il valore dello stato al tempo  $t_0 = kT_c$ , la (4.3) fornisce:

$$x(t) = e^{A_c(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_c(t-\tau)}B_c u(\tau) d\tau.$$

Al tempo  $t = (k+1)T_c$  si ha dunque  $t - t_0 = (k+1)T_c - kT_c = T_c$  e la precedente diventa:

$$x(k+1) = e^{A_c T_c}x(k) + \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A_c((k+1)T_c-\tau)}B_c u(\tau) d\tau.$$

Tenendo conto che  $u(\tau) = u(k)$  è costante per ogni  $\tau \in [kT_c, (k+1)T_c)$  e introducendo un cambiamento di variabile  $\sigma = \tau - kT_c$ , si ha:

$$x(k+1) = e^{A_c T_c}x(k) + \int_0^{T_c} e^{A_c(T_c-\sigma)}B_c d\sigma u(k).$$

Facendo l'ulteriore cambiamento di coordinate  $\xi = T_c - \sigma$ , si ottiene alla fine:

$$x(k+1) = e^{A_c T_c}x(k) + \int_0^{T_c} e^{A_c \xi}B_c d\xi u(k), \quad (8.12)$$

cioè

$$x(k+1) = \left(e^{A_c T_c}\right)x(k) + \left(\int_0^{T_c} e^{A_c \xi}d\xi B_c\right)u(k),$$

in cui si riconosce facilmente la prima delle (8.1) con le matrici  $A$  e  $B$  indicate in (8.11). Chiaramente, il legame istantaneo espresso dalla seconda delle (8.10) si traduce banalmente nella seconda delle (8.1) con  $C = C_c$  e  $D = D_c$ .

Si noti che, dal fatto che  $A = e^{A_c T_c}$ , la matrice dinamica di un sistema a tempo discreto che scaturisca dal campionamento di uno a tempo continuo è sempre invertibile ed ha autovalori del tipo  $e^{\lambda_i T_c}$ , essendo  $\lambda_i$  gli autovalori di  $A_c$ , cioè del sistema a tempo continuo. Si noti quindi che il sistema campionato non potrà mai avere 0 come autovalore e quindi mai un tempo di risposta finito (infatti campionando un segnale che non va a zero in tempo finito non potremo mai ottenerne uno a tempo discreto convergente a zero in tempo finito). Si può però ottenere a tempo discreto un segnale identicamente nullo anche se a tempo continuo abbiamo una funzione non nulla quando per esempio  $\lambda_i = j\omega$  è immaginario puro (modo sinusoidale per il sistema a tempo continuo con periodo  $T = 2\pi/\omega$ ) e si sceglie  $T_c$  come multiplo esatto del semiperiodo  $T/2$ .

### 8.3.7 Esempio completo di calcolo della risposta

Calcolare la risposta libera e forzata nello stato e nell'uscita del sistema a tempo discreto (8.1) caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1], \quad D = 1,$$

a partire da  $x_0 = [1, 0]'$  e se si applica un ingresso  $u(k) = 3^k$ .

**Soluzione.** Dalla prima delle (8.8) si ha che la risposta completa nello stato, nel dominio della trasformata, è data da:

$$X(z) = (zI - A)^{-1}zx_0 + (zI - A)^{-1}BU(z),$$

dove si distinguono la risposta libera

$$X_\ell(z) = (zI - A)^{-1}zx_0,$$

e quella forzata:

$$X_f(z) = (zI - A)^{-1}BU(z).$$

Ora

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z^2 + z - 2} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 2 & z \end{bmatrix},$$

dove il denominatore si annulla per  $z = 1$  e  $z = -2$ , che sono dunque gli autovalori di  $A$ .

Per quanto riguarda la risposta libera si ha quindi:

$$X_\ell(z) = (zI - A)^{-1}zx_0 = \frac{z}{z^2 + z - 2} \begin{bmatrix} z + 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z(z+1)}{(z-1)(z+2)} \\ \frac{2z}{(z-1)(z+2)} \end{bmatrix}.$$

Si procede quindi con la scomposizione in fratti semplici (applicando la stessa identica procedura utilizzata per la trasformata inversa di Laplace) di  $\bar{X}_\ell(z) = X_\ell(z)/z$ :

$$\bar{X}_\ell(z) = \frac{X_\ell(z)}{z} = \begin{bmatrix} \frac{z+1}{(z-1)(z+2)} \\ \frac{2}{(z-1)(z+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{z+2} \\ \frac{2}{3} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{z+2} \end{bmatrix}.$$

Pertanto:

$$X_\ell(z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{3} \frac{z}{z+2} \\ \frac{2}{3} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{3} \frac{z}{z+2} \end{bmatrix},$$

la cui antitrasformata è:

$$x_\ell(k) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^k \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-2)^k \end{bmatrix}.$$

La risposta libera in uscita, in accordo con la seconda delle (8.1), è data da:

$$y_\ell = Cx_\ell(k) = (-2)^k.$$

Per quanto riguarda la risposta forzata nello stato, si ha:

$$X_f(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2} \begin{bmatrix} 2 \\ 2z \end{bmatrix} U(z).$$

Ora,

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\} = \mathcal{Z}\{3^k\} = \frac{z}{z-3}.$$

Pertanto si ottiene:

$$X_f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)(z-3)} \begin{bmatrix} 2 \\ 2z \end{bmatrix}.$$

Si procede anche qui con la scomposizione in fratti semplici di  $\bar{X}_f(z) = X_f(z)/z$ :

$$\bar{X}_f(z) = \frac{X_f(z)}{z} = \begin{bmatrix} \frac{2}{(z-1)(z+2)(z-3)} \\ \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z-3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \frac{1}{z-1} + \frac{2}{15} \frac{1}{z+2} + \frac{1}{5} \frac{1}{z-3} \\ -\frac{1}{3} \frac{1}{z-1} - \frac{4}{15} \frac{1}{z+2} + \frac{3}{5} \frac{1}{z-3} \end{bmatrix}.$$

Pertanto:

$$X_f(z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \frac{z}{z-1} + \frac{2}{15} \frac{z}{z+2} + \frac{1}{5} \frac{z}{z-3} \\ -\frac{1}{3} \frac{z}{z-1} - \frac{4}{15} \frac{z}{z+2} + \frac{3}{5} \frac{z}{z-3} \end{bmatrix},$$

la cui antitrasformata è:

$$x_f(k) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{2}{15}(-2)^k + \frac{1}{5}3^k \\ -\frac{1}{3} - \frac{4}{15}(-2)^k + \frac{3}{5}3^k \end{bmatrix}.$$

La risposta forzata in uscita, ancora in accordo con la seconda delle (8.1), è data da:

$$y_f(k) = Cx_f(k) + Du(k) = \frac{6}{15}(-2)^k + \frac{3}{5}3^k.$$

### 8.3.8 Antitrasformazione con poli complessi

Nel caso di poli complessi si procede in un modo molto simile a quello utilizzato per Laplace (si veda in particolare la Sez. 6.7), con la differenza che qui conviene esprimere i poli complessi utilizzando la notazione polare. Si consideri quindi una funzione razionale propria  $X(z)$  con un polo  $p_i$  non reale. Siano  $\rho$  e  $\theta$  rispettivamente il modulo e la fase di questo polo complesso, cioè  $p_i = \rho \cdot e^{j\theta}$ . Essendo  $X(z)$  una funzione razionale di  $z$  con coefficienti reali, se  $p_i \notin \mathbb{R}$  è un polo di  $X(z)$  con molteplicità  $m_i$ , anche il complesso coniugato  $p_h = p_i^* = \rho \cdot e^{-j\theta}$  sarà polo di  $X(z)$  con la stessa molteplicità  $m_h = m_i$ .

Si noti innanzitutto che  $p_i$  e  $p_h$  sono poli anche della funzione  $\bar{X}(z) = X(z)/z$ . Consideriamo inizialmente il caso di poli complessi coniugati con molteplicità uno, cioè  $m_i = m_h = 1$ . Siano  $\alpha_{i1} = m \cdot e^{j\phi}$  e  $\alpha_{h1} = \alpha_{i1}^* = m \cdot e^{-j\phi}$  i coefficienti dei termini nello sviluppo in fratti semplici di  $\bar{X}(z)$  relativi a questi due poli complessi coniugati. Nello sviluppo in fratti semplici della  $X(z)$  comparirà quindi una coppia di termini del tipo:

$$\bar{X}_{i,h}(z) = \frac{me^{j\phi}}{z - \rho e^{j\theta}} + \frac{me^{-j\phi}}{z - \rho e^{-j\theta}}.$$

Rimoltiplicando per  $z$  si ha:

$$X_{i,h}(z) = z \cdot \bar{X}_{i,h}(z) = me^{j\phi} \frac{z}{z - \rho e^{j\theta}} + me^{-j\phi} \frac{z}{z - \rho e^{-j\theta}}.$$

Antitrasformando la precedente si ottiene (utilizzando al solito la formula di Eulero che permette di scrivere il coseno come combinazione di esponenziali complessi):

$$\begin{aligned} x_{i,h}(k) &= \left[ me^{j\phi} (\rho e^{j\theta})^k + me^{-j\phi} (\rho e^{-j\theta})^k \right] \delta_{-1}(k) \\ &= m\rho^k \left( e^{j(\theta k + \phi)} + e^{-j(\theta k + \phi)} \right) \delta_{-1}(k) \\ &= 2m\rho^k \cos(\theta k + \phi) \delta_{-1}(k). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Nel caso di poli complessi con molteplicità maggiore di 1, cioè nel caso in cui il polo complesso  $p_i = \rho \cdot e^{j\theta}$  abbia molteplicità  $m_i > 1$ , i coefficienti  $\alpha_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, m_i$ ) si calcolano sempre con le formule indicate in precedenza e anche in questo caso è facile verificare che i coefficienti  $\alpha_{hj}$  del polo complesso coniugato  $p_h = p_i^*$  sono tali che  $\alpha_{hj} = \alpha_{ij}^*$  ( $j = 1, 2, \dots, m_i$ ). Utilizzando la rappresentazione polare per questi coefficienti e cioè definendo  $\alpha_{ij} = m_{ij} \cdot e^{j\phi_{ij}}$  e  $\alpha_{hj} = \alpha_{ij}^* = m_{ij} \cdot e^{-j\phi_{ij}}$ , nello sviluppo in fratti semplici di  $\bar{X}(z)$  compariranno termini del tipo

$$\bar{X}_{ih,j}(z) = \frac{m_{ij} e^{j\phi_{ij}}}{(z - \rho e^{j\theta})^j} + \frac{m_{ij} e^{-j\phi_{ij}}}{(z - \rho e^{-j\theta})^j},$$

$j = 1, 2, \dots, m_i$  (attenzione a non confondere in queste formule l'indice  $j$  con l'unità immaginaria  $j$ ). Rimoltiplicando per  $z$  si ha:

$$X_{ih,j}(z) = z \bar{X}_{ih,j}(z) = m_{ij} e^{j\phi_{ij}} \frac{z}{(z - \rho e^{j\theta})^j} + m_{ij} e^{-j\phi_{ij}} \frac{z}{(z - \rho e^{-j\theta})^j},$$

la cui trasformata inversa produce termini del tipo:

$$\begin{aligned} x_{ih,j}(k) &= \left[ m_{ij} e^{j\phi_{ij}} \binom{k}{j-1} (\rho e^{j\theta})^{k-j+1} + m_{ij} e^{-j\phi_{ij}} \binom{k}{j-1} (\rho e^{-j\theta})^{k-j+1} \right] \delta_{-1}(k) \\ &= m_{ij} \rho^{k-j+1} \binom{k}{j-1} \left( e^{j[\theta(k-j+1) + \phi_{ij}]} + e^{-j[\theta(k-j+1) + \phi_{ij}]} \right) \delta_{-1}(k) \\ &= 2m_{ij} \binom{k}{j-1} \rho^{k-j+1} \cos[\theta(k-j+1) + \phi_{ij}] \delta_{-1}(k). \end{aligned}$$

### Esempio di antitrasformata Zeta con poli complessi.

Si consideri la funzione:

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 4},$$

che ha due poli complessi  $p_1 = -1 + j\sqrt{3}$  e  $p_2 = p_1^* = -1 - j\sqrt{3}$ . Si vuole determinare la trasformata Zeta inversa  $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ . Per prima cosa ricaviamo lo sviluppo in fratti semplici di  $\bar{X}(z) = X(z)/z$ :

$$\bar{X}(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z^2 + 2z + 4} = \frac{\alpha_{11}}{z - p_1} + \frac{\alpha_{21}}{z - p_2},$$

essendo

$$\alpha_{11} = \lim_{z \rightarrow p_1} (z - p_1) \bar{X}(z) = \lim_{z \rightarrow p_1} (z - p_1) \frac{1}{(z - p_1)(z - p_2)} = \frac{1}{(p_1 - p_2)} = \frac{1}{2j\sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}j,$$

e  $\alpha_{21} = \alpha_{11}^* = \frac{1}{2\sqrt{3}}j$ .

Scriviamo quindi sia il polo  $p_1$  sia il coefficiente  $\alpha_{11}$  in notazione polare:  $p_1 = \rho e^{j\theta}$  e  $\alpha_{11} = m e^{j\phi}$ , dove  $\rho = |p_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ ,  $\theta = \text{atan2}(\sqrt{3}, -1) = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi \text{ rad}$ ,  $m = \frac{1}{2\sqrt{3}}$  e  $\phi = \text{atan2}(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0) = -90^\circ = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

Applichiamo quindi la (8.13) per ottenere:

$$x(k) = 2m\rho^k \cos(\theta k + \phi) \delta_{-1}(k) = 2 \frac{1}{2\sqrt{3}} 2^k \cos\left(\frac{2}{3}\pi k - \frac{\pi}{2}\right) \delta_{-1}(k) = \frac{2^k}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\pi k\right) \delta_{-1}(k).$$

## Capitolo 9

### Risoluzione di alcuni esercizi su: calcolo della trasformata diretta e inversa di Laplace, funzioni di trasferimento, calcolo della risposta

#### 9.1 Trasformata diretta di Laplace

Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni del tempo.

**9.1.1**  $y_8(t) = t e^{-t} \sin(3t) \delta_{-1}(t)$

Si ha:

$$\mathcal{L}\{\sin(3t)\delta_{-1}(t)\} = \frac{3}{s^2 + 9},$$

perché, in base a quanto riportato nella Sez. 5.2.2,  $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\delta_{-1}(t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ . Quindi:

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\sin(3t)\delta_{-1}(t)\} = \frac{3}{(s+1)^2 + 9},$$

perché, in base a quanto riportato nella Sez. 5.2.1,  $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}x(t)\} = X(s - \alpha)$  (traslazione complessa). Infine:

$$Y_8(s) = \mathcal{L}\{t e^{-t}\sin(3t)\delta_{-1}(t)\} = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{3}{(s+1)^2 + 9} \right]$$

perché, in base a quanto riportato nella Sez. 5.2.1,  $\mathcal{L}\{t x(t)\} = -\frac{d}{ds} X(s)$ . Pertanto:

$$Y_8(s) = \frac{3 \cdot 2(s+1)}{[(s+1)^2 + 9]^2} = \frac{6(s+1)}{(s^2 + 2s + 10)^2}.$$

**9.1.2**  $y_4(t) = (t - 2)^3 \delta_{-1}(t)$

Convieni sviluppare il cubo e poi trasformare:

$$y_4(t) = (t - 2)^3 \delta_{-1}(t) = (t^3 - 6t^2 + 12t - 8)\delta_{-1}(t).$$

Da qui, applicando la trasformata del termine polinomiale  $\mathcal{L}\{t^n \delta_{-1}(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$  (si veda sempre la Sez. 5.2.2), segue facilmente che:

$$Y_4(s) = \frac{6}{s^4} - \frac{12}{s^3} + \frac{12}{s^2} - \frac{8}{s}.$$

**9.1.3**  $y_{10}(t) = e^{3t} \delta_{-1}(t - 1)$

Qui la peculiarità sta nel fatto che la funzione gradino è ritardata di uno. Convieni calcolare la trasformata applicando direttamente la definizione (5.3). Si ha dunque:

$$\begin{aligned} Y_{10}(s) &= \int_0^\infty e^{3t} \delta_{-1}(t - 1) e^{-st} dt = \int_1^\infty e^{3t} e^{-st} dt = \int_1^\infty e^{(3-s)t} dt = \\ &= \left. \frac{e^{(3-s)t}}{3-s} \right|_1^\infty = \frac{e^{3-s}}{s-3}. \end{aligned}$$

$$9.1.4 \quad y_6(t) = \sin(10t + 5) \delta_{-1}(t)$$

Applicando la formula del seno della somma di angoli:

$$y_6(t) = [\sin(10t)\cos(5) + \cos(10t)\sin(5)] \delta_{-1}(t),$$

dove  $\cos(5) = 0.28$  e  $\sin(5) = -0.96$  sono a questo punto due costanti note. Per la linearità della trasformata e utilizzando la formula della trasformata di seno e coseno:

$$Y_6(s) = \frac{10}{s^2 + 100}\cos(5) + \frac{s}{s^2 + 100}\sin(5) = \frac{\sin(5)s + 10\cos(5)}{s^2 + 100} = \frac{-0.96s + 2.8}{s^2 + 100}.$$

$$9.1.5 \quad y_7(t) = t \cos(2\pi t) \delta_{-1}(t)$$

In base alla formula della trasformata del coseno, si ha:

$$\mathcal{L}\{\cos(2\pi t)\delta_{-1}(t)\} = \frac{s}{s^2 + 4\pi^2}.$$

Applicando sempre la proprietà  $\mathcal{L}\{t x(t)\} = -\frac{d}{ds}X(s)$ , si ha:

$$Y_7(s) = -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + 4\pi^2} = -\frac{s^2 + 4\pi^2 - s \cdot 2s}{(s^2 + 4\pi^2)^2} = \frac{s^2 - 4\pi^2}{(s^2 + 4\pi^2)^2}.$$

## 9.2 Trasformata inversa di Laplace

Calcolare la trasformata inversa di Laplace delle seguenti funzioni razionali in  $s$ .

$$9.2.1 \quad F_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2}$$

Si ha, scomponendo il polinomio a denominatore:

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2} = \frac{1}{(s - \sqrt{2}j)(s + \sqrt{2}j)}.$$

Dunque  $F_1(s)$  ha due poli complessi e coniugati:  $p_1 = \sqrt{2}j$  e  $p_2 = p_1^* = -\sqrt{2}j$ . Abbiamo pertanto  $p_1 = \alpha + j\omega$  con  $\alpha = 0$  e  $\omega = \sqrt{2}$ . Si può quindi procedere alla scomposizione in fratti semplici:

$$F_1(s) = \frac{\alpha_{11}}{s - p_1} + \frac{\alpha_{21}}{s - p_2}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \lim_{s \rightarrow p_1} (s - p_1)F_1(s) = \lim_{s \rightarrow p_1} (s - p_1) \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} = \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{1}{s - p_2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \sqrt{2}j} \frac{1}{s + \sqrt{2}j} = \frac{1}{2\sqrt{2}j} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}j. \end{aligned}$$

Utilizzando la notazione della Sez. 6.7, si può quindi scrivere  $\alpha_{11} = a + jb$ , con  $a = 0$  e  $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ , oppure  $\alpha_{11} = M e^{j\phi}$  con  $M = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  e  $\phi = -\pi/2$ . Se si utilizza la (6.45) si ottiene quindi:

$$f_1(t) = 2 e^{\alpha t} [a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t)] \delta_{-1}(t) = 2[-(-\frac{1}{2\sqrt{2}})\sin(\sqrt{2}t)] \delta_{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \delta_{-1}(t).$$

Si arriva alla stessa espressione se si decide di utilizzare la (6.46):

$$f_1(t) = 2Me^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi) \delta_{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}t - \pi/2) \delta_{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \delta_{-1}(t).$$

Un modo alternativo che poteva essere seguito per calcolare la trasformata inversa di Laplace di  $F_1(s)$  è quello basato sull'osservazione che  $F_1(s)$  assomiglia molto alla trasformata di un seno:  $\mathcal{L}\{\sin(\omega t) \delta_{-1}(t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ , se  $\omega^2 = 2$ . Si può quindi sfruttare questo fatto nel seguente modo, dividendo e moltiplicando per  $\sqrt{2}$ :

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{s^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{2}t) \delta_{-1}(t)\}.$$

Dalla precedente è immediato ricavare lo stesso risultato ottenuto sopra:

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \delta_{-1}(t).$$

### 9.2.2 $F_2(s) = \frac{s+1}{4s^2+\pi^2}$

È importante innanzitutto riportare  $F_2(s)$  in una forma in cui il coefficiente del termine di grado massimo a denominatore sia pari a uno (è questa la forma canonica che abbiamo utilizzato per lo sviluppo in fratti semplici e quindi per il calcolo della trasformata inversa). Pertanto:

$$F_2(s) = \frac{s+1}{4s^2+\pi^2} = \frac{1}{4} \frac{s+1}{s^2+\pi^2/4}.$$

I poli in questo caso sono  $p_1 = \frac{\pi}{2}j$  e  $p_2 = p_1^* = -\frac{\pi}{2}j$  (sempre complessi e coniugati). Abbiamo pertanto  $p_1 = \alpha + j\omega$  con  $\alpha = 0$  e  $\omega = \pi/2$ . Procedendo come nell'esempio precedente, si calcola il coefficiente  $\alpha_{11}$  relativo a  $p_1$  nello sviluppo in fratti semplici:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \lim_{s \rightarrow p_1} (s - p_1) F_2(s) = \lim_{s \rightarrow p_1} (s - p_1) \frac{1}{4} \frac{s+1}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{1}{4} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{s+1}{(s-p_2)} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}j} \frac{s+1}{(s+\frac{\pi}{2}j)} = \frac{1}{4} \frac{\frac{\pi}{2}j+1}{2\frac{\pi}{2}j} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi}j. \end{aligned}$$

Utilizzando sempre la notazione della Sez. 6.7, si può quindi scrivere  $\alpha_{11} = a + jb$ , con  $a = 1/8$  e  $b = -\frac{1}{4\pi}$ . La (6.45) fornisce quindi in questo caso:

$$f_2(t) = 2 \left[ \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] \delta_{-1}(t) = \left[ \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] \delta_{-1}(t).$$

Anche qui si poteva seguire in alternativa la procedura basata sulle trasformate di seno e coseno.

### 9.2.3 $F_4(s) = \frac{s^2+3}{(s+2)(s+1)^2}$

Scomponendo in fratti semplici:

$$F_4(s) = \frac{s^2+3}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{\alpha_{11}}{s+2} + \frac{\alpha_{21}}{s+1} + \frac{\alpha_{22}}{(s+1)^2},$$

in cui si riconosce un polo  $(-1)$  di molteplicità due, che richiede più termini nel suo sviluppo. I coefficienti dello sviluppo sono dati da:

$$\alpha_{11} = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)F_4(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s^2+3}{(s+1)^2} = 7,$$

$$\alpha_{22} = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 F_4(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s^2+3}{(s+2)} = 4,$$

$$\alpha_{21} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} [(s+1)^2 F_4(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{s^2+3}{(s+2)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(s+2)2s - (s^2+3)}{(s+2)^2} = -6.$$

Pertanto:

$$F_4(s) = \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2},$$

e

$$f_4(t) = [7e^{-2t} - 6e^{-t} + 4te^{-t}] \delta_{-1}(t).$$

#### 9.2.4 $F(s) = [F_1(s)]^2 = \frac{1}{(s^2+2)^2}$

Questo esempio viene presentato per illustrare il caso di poli complessi con molteplicità maggiore di uno. Si ha infatti:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+2)^2} = \frac{1}{(s-\sqrt{2}j)^2(s+\sqrt{2}j)^2}.$$

Dunque  $F(s)$  ha due poli complessi e coniugati con molteplicità 2:  $p_1 = \sqrt{2}j$  e  $p_2 = p_1^* = -\sqrt{2}j$ . Abbiamo pertanto  $p_1 = \alpha + j\omega$  con  $\alpha = 0$  e  $\omega = \sqrt{2}$ . Si può quindi procedere alla scomposizione in fratti semplici:

$$F_1(s) = \frac{\alpha_{11}}{s-p_1} + \frac{\alpha_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{\alpha_{21}}{s-p_2} + \frac{\alpha_{22}}{(s-p_2)^2}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \lim_{s \rightarrow p_1} (s-p_1)^2 F_1(s) = \lim_{s \rightarrow p_1} (s-p_1)^2 \frac{1}{(s-p_1)^2(s-p_2)^2} = \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{1}{(s-p_2)^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \sqrt{2}j} \frac{1}{(s+\sqrt{2}j)^2} = \frac{1}{(2\sqrt{2}j)^2} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} [(s-p_1)^2 F_1(s)] = \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s-p_2)^2} = -\lim_{s \rightarrow p_1} \frac{2}{(s-p_2)^3} = \\ &= -\lim_{s \rightarrow \sqrt{2}j} \frac{2}{(s+\sqrt{2}j)^3} = -\frac{2}{(2\sqrt{2}j)^3} = -\frac{1}{8\sqrt{2}j}. \end{aligned}$$

Anche nel caso di molteplicità maggiore di uno, come specificato nella Sez. 6.7, sussiste la relazione  $\alpha_{21} = \alpha_{11}^*$  e  $\alpha_{22} = \alpha_{12}^*$ , la quale permette di arrivare alle espressioni finali riportate sempre nella Sez. 6.7. Introducendo quindi la notazione  $\alpha_{11} = a_1 + jb_1$ , con  $a_1 = 0$  e  $b_1 = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$  e  $\alpha_{12} = a_2 + jb_2$ , con  $a_2 = -1/8$  e  $b_2 = 0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2e^{\alpha t} [(a_1 \cos(\omega t) - b_1 \sin(\omega t)) + (a_2 t \cos(\omega t) - b_2 t \sin(\omega t))] \delta_{-1}(t) = \\ &= 2 \left[ \frac{1}{8\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) - \frac{1}{8} t \cos(\sqrt{2}t) \right] \delta_{-1}(t) = \left[ \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) - \frac{1}{4} t \cos(\sqrt{2}t) \right] \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

$$9.2.5 \quad F_5(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s}$$

Riscriviamo  $F_5(s)$  mettendo in evidenza i suoi tre poli:

$$F_5(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s + 1 + 2j)(s + 1 - 2j)}.$$

I poli complessi (e coniugati) sono stati trovati utilizzando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado applicata all'equazione  $s^2 + 2s + 5 = 0$ . I poli sono pertanto:  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1 - 2j$  e  $p_3 = -1 + 2j$ . La scomposizione in fratti semplici di  $F_5(s)$  risulta pertanto data da:

$$F_5(s) = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{21}}{s + 1 + 2j} + \frac{\alpha_{31}}{s + 1 - 2j}.$$

I coefficienti dello sviluppo sono dati da:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \lim_{s \rightarrow 0} [sF_5(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^2 + 2s + 5} = 1, \\ \alpha_{21} &= \lim_{s \rightarrow -1-2j} [(s + 1 + 2j)F_5(s)] = \lim_{s \rightarrow -(1+2j)} \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^2 + s - 2js} = \\ &= \frac{7(1+2j)^2 + 8(1+2j) + 5}{(1+2j)^2 - 1 - 2j + 2j - 4} = \frac{7(1-4+4j) + 8 + 16j + 5}{1-4+4j-5} = \frac{-8+44j}{-8+4j} = \\ &= \frac{-2+11j}{-2+j} = \frac{-2+11j}{-2+j} \cdot \frac{-2-j}{-2-j} = \frac{4+2j-22j+11}{4+1} = \frac{15-20j}{5} = 3-4j. \end{aligned}$$

Chiaramente  $\alpha_{31} = \alpha_{21}^* = 3 + 4j$ , essendo i due coefficienti  $\alpha_{21}$  e  $\alpha_{31}$  riferiti a poli complessi e coniugati. Quindi:

$$F_5(s) = \frac{1}{s} + \frac{3-4j}{s+1+2j} + \frac{3+4j}{s+1-2j}.$$

Al solito, utilizzando la notazione  $p_2 = -1 - 2j = \alpha + j\omega$  (con  $\alpha = -1$  e  $\omega = -2$ ) e  $\alpha_{21} = 3 - 4j = a + bj$  (con  $a = 3$  e  $b = -4$ ) e applicando la (6.45), si ottiene:

$$\begin{aligned} f_5(t) &= \{1 + 2e^{\alpha t} [a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t)]\} \delta_{-1}(t) = \\ &= \{1 + 2e^{-t} [3 \cos(-2t) + 4 \sin(-2t)]\} \delta_{-1}(t) = \\ &= \{1 + 2e^{-t} [3 \cos(2t) - 4 \sin(2t)]\} \delta_{-1}(t) = \\ &= \{1 + e^{-t} [6 \cos(2t) - 8 \sin(2t)]\} \delta_{-1}(t). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Utilizzando invece la scrittura in notazione polare di  $\alpha_{21}$  (cioè  $\alpha_{21} = Me^{j\phi}$ ), si ha:  $\alpha_{21} = 5e^{-j\psi}$ , dove  $M = 5$  e  $\phi = -\psi$ , essendo  $\psi = -\text{atan2}(-4, 3) = 53.13^\circ$ . In questo caso, utilizzando la (6.46), si ottiene:

$$\begin{aligned} f_5(t) &= [1 + 2Me^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)] \delta_{-1}(t) = \\ &= [1 + 10e^{-t} \cos(-2t - \psi)] \delta_{-1}(t) = \\ &= [1 + 10e^{-t} \cos(2t + \psi)] \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

Si noti che la soluzione riportata nel link degli esercizi:

$$f_5(t) = [1 + 10e^{-t} \sin(2t + \phi)] \delta_{-1}(t)$$

con  $\phi = \text{arctg}(-3/4) + \pi$  è del tutto equivalente alla (9.1). Infatti:

$$10 \sin(2t + \phi) = 10 \sin(2t) \cos(\phi) + 10 \cos(2t) \sin(\phi) = 6 \cos(2t) - 8 \sin(2t),$$

(essendo  $\cos(\text{arctg}(-3/4) + \pi) = -0.8$  e  $\sin(\text{arctg}(-3/4) + \pi) = 0.6$ ) che è esattamente il termine che compare tra parentesi quadre nella (9.1).

### 9.3 Funzioni di trasferimento

[Esercizio (iv) del file *funTrasf.pdf* riportato nella sezione *Esercizi del sito del corso*]

Calcolare la funzione di trasferimento del sistema descritto dalla seguente rappresentazione I-S-U:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

dove le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sono date da:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \quad C = [1, b, 0] \quad D = 0,$$

essendo  $a$  e  $b$  delle costanti. Dire per quali valori di  $a$  e  $b$  la funzione di trasferimento non rappresenta tutto il sistema (ossia, equivalentemente, per quali valori di  $a$  e  $b$  il sistema non è tutto raggiungibile e osservabile).

**Soluzione.** In base alla (6.8), la funzione di trasferimento del sistema è data da  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ . Calcoliamo innanzitutto  $(sI - A)^{-1}$ . Ora:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 \\ 0 & s - \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

Quindi:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} s(s - \frac{1}{2}) & 0 & s - \frac{1}{2} \\ 0 & s^2 + 1 & 0 \\ -(s - \frac{1}{2}) & 0 & s(s - \frac{1}{2}) \end{bmatrix},$$

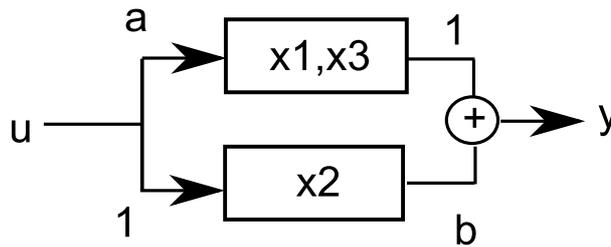
dove  $\det(sI - A)$  è il determinante di  $sI - A$  e cioè il polinomio caratteristico di  $A$  (quello cioè che ha per radici gli autovalori di  $A$ ). Sviluppando il determinante rispetto alla riga centrale di  $sI - A$  si ha:

$$\det(sI - A) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}\right) = \left(s - \frac{1}{2}\right) (s^2 + 1),$$

da cui si evince che la matrice  $A$  ha come autovalori  $\lambda_1 = 1/2$ ,  $\lambda_2 = j$  e  $\lambda_3 = \lambda_2^* = -j$ . Pertanto:

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \\ &= \frac{1}{\left(s - \frac{1}{2}\right)(s^2 + 1)} [1, b, 0] \begin{bmatrix} s(s - \frac{1}{2}) & 0 & s - \frac{1}{2} \\ 0 & s^2 + 1 & 0 \\ -(s - \frac{1}{2}) & 0 & s(s - \frac{1}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} + 0 = \\ &= \frac{1}{\left(s - \frac{1}{2}\right)(s^2 + 1)} \left[ s\left(s - \frac{1}{2}\right), b(s^2 + 1), s - \frac{1}{2} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} = \\ &= \frac{b(s^2 + 1) + a\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\left(s - \frac{1}{2}\right)(s^2 + 1)} = \frac{bs^2 + as + b - \frac{a}{2}}{\left(s - \frac{1}{2}\right)(s^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Le radici del denominatore (i poli di  $W(s)$ ) sono  $1/2$  e  $\pm j$ . Per vedere per quali valori di  $a$  e  $b$  la  $W(s)$  non rappresenta tutto il sistema, occorre calcolare quei valori di  $a$  e di  $b$  per cui una (o più) delle radici del denominatore è anche radice del numeratore e si ha una semplificazione (ossia una riduzione del grado del denominatore e quindi una rappresentazione IU equivalente che ha un ordine massimo  $n$  di derivazione dell'uscita minore della dimensione  $\bar{n} = 3$  dello stato della rappresentazione ISU da cui siamo partiti). Questo accade se:



**Figura 9.1:** Rappresentazione grafica delle equazioni che descrivono la dinamica del sistema dell'esercizio nella Sez. 9.3

- $a = 0$ : in questo caso si semplifica il termine  $s^2 + 1$  e si ha

$$W(s) = \frac{b}{s - \frac{1}{2}}.$$

Il polo di  $W(s)$  che rimane ( $s = 1/2$ ) è l'autovalore della parte raggiungibile e osservabile del sistema, mentre  $s = \pm j$  è la coppia complessa di autovalori relativi alla parte non raggiungibile e/o non osservabile del sistema.

- $b = 0$ : in questo caso si semplifica il termine  $s - 1/2$  e si ha

$$W(s) = \frac{a}{s^2 + 1}.$$

In  $W(s)$  rimane quindi la coppia di poli  $s = \pm j$  che sono quindi gli autovalori della parte raggiungibile e osservabile del sistema, mentre  $s = 1/2$  è l'autovalore della parte non raggiungibile e/o non osservabile del sistema.

Chiaramente, se  $a = b = 0$ , poiché  $W(s) = 0$ , la  $W(s)$  non rappresenta nulla e il sistema è completamente non raggiungibile e/o non osservabile (cioè il blocchetto  $z_a$  in Fig. 3.1 è del tutto assente).

La Fig. 9.1, che è una rappresentazione grafica della dinamica descritta dalle equazioni del sistema, permette di intuire meglio quello che accade (questa volta senza necessità di un cambiamento di coordinate). Innanzitutto, come si intuisce dalla forma della matrice  $A$ , la coppia di variabili  $x_1$  e  $x_3$  non influenza e non è influenzata da  $x_2$  (si dice che hanno dinamiche *disaccoppiate*). Per questo motivo nella figura la coppia  $(x_1, x_3)$  è stata rappresentata in un blocchetto separato da quello della variabile  $x_2$ . Se  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , tutte le variabili sono raggiunte dall'ingresso e sono osservabili in uscita: il sistema è completamente raggiungibile e osservabile e la funzione di trasferimento lo rappresenta tutto (con riferimento alla Fig. 3.1 abbiamo solo il blocchetto  $z_a$  che comprende tutte e tre le variabili). I poli di  $W(s)$  sono in questo caso tutti gli autovalori di  $A$ .

Se  $a = 0$ , il blocchetto  $(x_1, x_3)$  non è più raggiungibile: con riferimento alla Fig. 3.1 abbiamo solo il blocchetto  $z_a$  (che comprende quindi la sola variabile  $x_2$ ) e il blocchetto  $z_c$  (che comprende la coppia  $x_1$  e  $x_3$ ). Nella funzione  $W(s)$  come polo compare solo l'autovalore che descrive la dinamica di  $x_2$ , cioè della sola parte raggiungibile e osservabile.

Se invece  $b = 0$ , è il blocchetto  $x_2$  che diviene non più osservabile: con riferimento alla Fig. 3.1 ci saranno solo il blocchetto  $z_a$  (coincidente con la coppia  $(x_1, x_3)$ ) e il blocchetto  $z_b$  (che comprende la variabile  $x_2$ ). La funzione  $W(s)$  avrà come poli solo gli autovalori che descrivono la dinamica di  $x_1$  e  $x_3$ , cioè ancora della sola parte raggiungibile e osservabile.

Infine, se  $a = b = 0$ , la  $W(s)$  scompare del tutto perché non abbiamo più il blocchetto  $z_a$  ma solo  $z_b$  (coincidente con  $x_2$ ) e  $z_c$  (coincidente con la coppia  $(x_1, x_3)$ ).

## 9.4 Esercizi di calcolo della risposta a partire dalla rappresentazione IU

### 9.4.1 Esercizio (vii) del file risp.pdf riportato nella sezione Esercizi del sito del corso

Si consideri un sistema lineare e stazionario con rappresentazione IU data da:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = u.$$

Calcolare la risposta libera e forzata che si ottiene a partire dalle condizioni iniziali  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 0$  nell'ipotesi che si applichi come ingresso la funzione  $u(t) = 10\delta_{-1}(t)$ .

**Soluzione.** Se  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  indica la trasformata di Laplace di  $y(t)$ , si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s.\end{aligned}$$

Pertanto, indicando con  $U(s)$  la trasformata di  $u(t)$ , nel dominio della trasformata il legame IU diventa:

$$s^2Y(s) - s + 4sY(s) - 4 + 3Y(s) = U(s),$$

cioè

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = s + 4 + U(s),$$

da cui

$$Y(s) = \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 3} + \frac{1}{s^2 + 4s + 3}U(s).$$

Ora

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{10\delta_{-1}(t)\} = \frac{10}{s}$$

Quindi

$$Y(s) = \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 3} + \frac{10}{s(s^2 + 4s + 3)}.$$

Il primo termine della precedente è la risposta libera  $Y_\ell(s)$  mentre il secondo è la risposta forzata  $Y_f(s)$ . Antitrasformiamo tali espressioni (che sono come atteso funzioni razionali strettamente proprie) per ricavare la risposta libera e forzata del sistema nel tempo. Si ha:

$$Y_\ell(s) = \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s + 4}{(s + 3)(s + 1)} = \alpha_{11}\frac{1}{s + 3} + \alpha_{21}\frac{1}{s + 1},$$

con

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \lim_{s \rightarrow -3} (s + 3)Y_\ell(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s + 4}{s + 1} = -\frac{1}{2} \\ \alpha_{21} &= \lim_{s \rightarrow -1} (s + 1)Y_\ell(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s + 4}{s + 3} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Pertanto:

$$Y_\ell(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s + 3} + \frac{3}{2}\frac{1}{s + 1},$$

che, nel tempo, corrisponde a:

$$y_\ell(t) = \left[ -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t} \right] \delta_{-1}(t).$$

Per quanto riguarda la risposta forzata:

$$Y_f(s) = \frac{10}{s(s + 3)(s + 1)} = \alpha_{11}\frac{1}{s} + \alpha_{21}\frac{1}{s + 3} + \alpha_{31}\frac{1}{s + 1}.$$

Calcolando i coefficienti dello sviluppo con le solite formule, si trova:

$$Y_f(s) = \frac{10}{3}\frac{1}{s} + \frac{5}{3}\frac{1}{s + 3} - 5\frac{1}{s + 1},$$

che, nel tempo, corrisponde a:

$$y_f(t) = \left[ \frac{10}{3} + \frac{5}{3}e^{-3t} - 5e^{-t} \right] \delta_{-1}(t).$$

### 9.4.2 Esercizio (ix) del file risp.pdf riportato nella sezione Esercizi del sito del corso

Si consideri un sistema lineare e stazionario con rappresentazione IU data da:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y = u - \frac{du}{dt}.$$

Calcolare la risposta libera e forzata che si ottiene a partire dalle condizioni iniziali  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  nell'ipotesi che si applichi come ingresso la funzione  $u(t) = 10\delta_{-1}(t)$ .

**Soluzione.** Poiché  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$ , si ha in generale  $\mathcal{L}\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} = s^k Y(s)$ . Pertanto, indicando con  $U(s)$  la trasformata di  $u(t)$ , nel dominio della trasformata il legame IU diventa:

$$(s^2 + 4s + 4)Y(s) = (1 - s)U(s),$$

essendo in ogni caso  $\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\} = sU(s)$ . Quindi:

$$Y(s) = \frac{1 - s}{s^2 + 4s + 4} U(s) = \frac{10(1 - s)}{s(s + 2)^2},$$

essendo anche in questo caso  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{10\delta_{-1}(t)\} = \frac{10}{s}$ .

Si nota dalla precedente che la risposta comprende in questo caso la sola componente forzata  $Y_f(s)$ : ciò è conseguenza del fatto che le condizioni iniziali di questo esercizio sono nulle.

Procedendo al calcolo della trasformata inversa della precedente (che è sempre una funzione razionale strettamente propria), si ha:

$$Y(s) = \frac{10(1 - s)}{s(s + 2)^2} = \alpha_{11} \frac{1}{s} + \alpha_{21} \frac{1}{s + 2} + \alpha_{22} \frac{1}{(s + 2)^2}.$$

Si noti come in questo caso il polo  $s = -2$  abbia molteplicità 2 e richieda quindi uno sviluppo in fratti semplici che comprende due termini.

I coefficienti dello sviluppo sono dati da:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(1 - s)}{(s + 2)^2} = \frac{5}{2} \\ \alpha_{22} &= \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2)^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{10(1 - s)}{s} = -15 \\ \alpha_{21} &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} [(s + 2)^2 Y(s)] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{10(1 - s)}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{-10}{s^2} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$Y(s) = \frac{5}{2} \frac{1}{s} - \frac{5}{2} \frac{1}{s + 2} - 15 \frac{1}{(s + 2)^2},$$

che, nel tempo, corrisponde a:

$$y_f(t) = \left[ \frac{5}{2} - \frac{5}{2} e^{-2t} - 15 t e^{-2t} \right] \delta_{-1}(t).$$