Stabilità dei Sistemi Lineari

Si riporta la definizione di stabilità in modo molto semplificato, in relazione ai soli sistemi lineari. Con riferimento quindi a tali sistemi, si distinguono due tipi di stabilità:

- la stabilità *interna*, definita in relazione all'evoluzione libera, o *autonoma* (cioè con $u(t) = 0$) del sistema (ma che ha implicazioni, come vedremo, più generali);
- la stabilità *esterna*, definita in termini di legame ingresso-uscita (assumendo condizioni iniziali nulle) del sistema.

Stabilità Interna dei Sistemi Lineari

Descriviamo la stabilità interna dei sistemi lineari con riferimento alla loro rappresentazione I-S-U che descrive in modo completo cosa accade dentro il sistema. Poichè quando si parla di stabilità interna si considera l'evoluzione libera (cioè con u(t)=0) del sistema a partire da una certa condizione iniziale x_0, la rappresentazione I-S-U si semplifica in:

$$\begin{cases} \dot{x} & = & A\,x(t) \\ x(0) & = & x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Innanzitutto, diremo che x_e è un *punto di equilibrio* del sistema se, ponendo $x(0) = x_e$, si ha $x(t) = x_e$ per ogni t (lo stato permane cioè indefinitamente in x_e). Nel caso lineare i punti di equilibrio non possono essere punti isolati (a meno che solo l'origine sia punto di equilibrio per il sistema), ma costituiscono un sottospazio rappresentato dal nucleo della matrice A, indicato anche come $Ker(A)$. Infatti, per rimanere fermi in un punto, occorre che sia $\dot{x} = 0$, ossia $Ax = 0$. I valori di x per cui ciò capita sono effettivamente gli elementi del nucleo di A e, dal momento che $A \cdot 0 = 0$, l'origine è sempre un punto di equilibrio per un sistema lineare[1].

Diremo che un sistema lineare è **stabile** se, qualsiasi siano le condizioni iniziali x_0, la risposta libera nello stato $x(t)$ risulta limitata per ogni t, e si può rimanere per ogni t arbitrariamente vicini all'origine purché si parta da un x_0 sufficientemente vicino all'origine (cioè, formalmente, se per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $\|x_0\| < \delta$ si ha $\|x(t)\| < \epsilon$ per ogni t).

Diremo che un sistema lineare è **asintoticamente stabile** se, qualsiasi siano le condizioni iniziali x_0, la risposta libera nello stato $x(t)$ risulta limitata per ogni t (stabilità) e, inoltre, per t che tende all'infinito, $x(t)$ tende all'origine (attrattività), cioè $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$, avendo indicato con $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ la norma euclidea del vettore di stato[2].

Diremo infine che un sistema lineare è **instabile** se non è stabile (e quindi neanche asintoticamente stabile), cioè se esiste qualche condizione iniziale (e se ne possono trovare in questo caso arbitrariamente vicine all'origine) per cui $x(t)$ non è limitato, ma presenta qualche componente che va all'infinito per t che tende all'infinito.

Vale il seguente teorema, la cui dimostrazione è accennata nel seguito insieme alla definizione di molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore.

Teorema (sulla stabilità interna). *Siano $\lambda_i(A)$ gli autovalori di A. Allora:*

- *Se $Re\{\lambda_i\} < 0$ per ogni $i \Rightarrow$ ASINTOTICA STABILITÀ*
- *Se esiste anche un solo λ_k con $Re\{\lambda_k\} > 0 \Rightarrow$ INSTABILITÀ*
- *Se $Re\{\lambda_i\} \leq 0$ per ogni i, si considerino solo i λ_k con parte reale nulla:*
  - *se per ognuno di essi $m_k \equiv \mu_k \Rightarrow$ STABILITÀ (non asintotica però)*
  - *se anche solo per uno di essi $m_k > \mu_k \Rightarrow$ INSTABILITÀ*

dove m_k=molteplicità algebrica di λ_k e μ_k=molteplicità geometrica di λ_k.

[1] Nel caso non lineare invece, cioè quando $\dot{x} = f[x(t)]$, la condizione $f(x) = 0$, che definisce i punti di equilibrio del sistema, può determinare punti di equilibrio isolati nello spazio di stato e non necessariamente $f(0) = 0$, ovvero non necessariamente l'origine dello spazio di stato è punto di equilibrio.

[2] L'attrattività dell'origine, cioè il fatto che $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$, nel caso lineare implica anche la stabilità, cosa che non accade in generale per i sistemi non lineari, dove le due proprietà sono indipendenti. Nel caso non lineare poi ogni punto di equilibrio ha proprietà di stabilità (locali) diverse in generale da quelle di eventuali altri punti di equilibrio e non si può perciò parlare di stabilità e di attrattività dell'intero sistema. Questo è possibile nel caso lineare perché, qualora esistano più punti di equilibrio, essi necessariamente presentano le stesse proprietà di stabilità (come è facile verificare studiando la dinamica del sistema attorno al punto di equilibrio, cioè introducendo una variabile $z = x - x_e$ la quale, come è facile verificare, obbedisce alla stessa dinamica $\dot{z} = Az$ del sistema di partenza). Un'altra peculiarità del caso lineare è che l'asintotica stabilità implica che solo l'origine può essere punto di equilibrio per il sistema.

Si ricorda che gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A, definito come $p_A(\lambda) := det(\lambda I - A)$ (essendo I la matrice identità). Scomposto tale polinomo si ottiene in generale:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

dove si è supposto ci siano r autovalori distinti λ_k di A $(k = 1, 2, \dots, r)$. La *molteplicità algebrica* di un autovalore λ_k è m_k. La *molteplicità geometrica* μ_k di λ_k è la dimensione dell'autospazio relativo a λ_k, cioè il numero di autovettori linearmente indipendenti di A relativi a λ_k. Operativamente si calcola con:

$$\mu_k = \bar{n} - r_k$$

essendo $\bar{n}$ la dimensione di A e $r_k := rango(\lambda_k I - A)$. Vale la seguente relazione: $m_k \geq \mu_k \geq 1$.

Cenni alla dimostrazione del teorema. La dimostrazione del teorema sulla stabilità si può fare ricorrendo alla trasformata di Laplace, notando che $X(s) = (sI - A)^{-1}x_0$ dove $X(s)$ è il vettore di stato in s (cioè $X(s) = [X_1(s), X_2(s), \dots, X_{\bar{n}}(s)]^T$). Si ha che ciascun elemento di questo vettore è del tipo:

$$X_i(s) = \frac{A_{11}}{s - p_1} + \frac{A_{12}}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\nu_1}}{(s - p_1)^{\nu_1}} + \frac{A_{21}}{s - p_2} + \dots + \frac{A_{2\nu_2}}{(s - p_2)^{\nu_2}} + \dots$$

dove gli $A_{\ell j}$ dipendono da x_0 e ν_ℓ è la molteciplità del polo p_ℓ in $X_i(s)$. Quindi, antitrasformando:

$$x_i(t) = \left[A_{11}e^{p_1 t} + A_{12}te^{p_1 t} + \dots + A_{1\nu_1}\frac{t^{\nu_1 - 1}}{(\nu_1 - 1)!}e^{p_1 t} + A_{21}e^{p_2 t} + \dots + A_{2\nu_2}\frac{t^{\nu_2 - 1}}{(\nu_2 - 1)!}e^{p_2 t} + \dots \right] \delta_{-1}(t)$$

da cui si deducono le proprietà dei p_ℓ perché $x_i(t)$ sia limitato (stabilità) e perché vada a 0 per $t \to \infty$ (attrattività). In particolare, se i p_ℓ hanno tutti parte reale negativa, $x_i(t)$ è limitato per ogni t e va a zero per t che tende all'infinito (as. stabilità). Se invece esiste anche un solo p_k con parte reale positiva, esiste sempre la possibilità di trovare condizioni iniziali opportune per cui qualche componente $x_i(t)$ di $x(t)$ va all'infinito (instabilità). Infine, se $Re\{p_\ell\} \leq 0$ per ogni ℓ, si ha che $x(t)$ è limitato ma non va a zero per t che tende all'infinito (stabilità non asintotica) se $\nu_k = 1$ per ogni p_k con parte reale nulla, mentre $x(t)$ diverge sotto opportune condizioni iniziali (instabilità) se, quando $Re\{p_\ell\} \leq 0$ per ogni ℓ, tuttavia esiste almeno un p_k con parte reale nulla per cui $\nu_k > 1$. Ora, i p_ℓ sono autovalori di A, infatti gli elementi di $(sI - A)^{-1}$ sono del tipo:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{(sI - A)_{ji}}{det(sI - A)}$$

dove $(sI - A)_{ji}$ è il determinante della matrice ottenuta da $sI - A$ dopo aver tolto la riga j e la colonna i. Quindi gli zeri p_ℓ del denominatore di $X_i(s)$ sono anche zeri di $det(sI - A)$, cioè sono autovalori di A. Occorre tuttavia fare attenzione alle cancellazioni tra numeratore e denominatore per cui la molteciplità ν_k dei poli p_k delle $X_i(s)$ non coincide con la molteplicità algebrica m_k dei corrispondenti autovalori di A (in generale $\nu_k \leq m_k$): di qui la complicazione sul confronto tra molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori con parte reale nulla, da effettuarsi quando tutti gli autovalori hanno parte reale non positiva, avendosi $\nu_k = 1$ se $\mu_k \equiv m_k$ (che implica la stabilità se ciò accade per ogni λ_k con parte reale nulla) e $\nu_k > 1$ se $\mu_k \neq m_k$ (che implica l'instabilità se ciò accade anche solo per un λ_k con parte reale nulla). Questo ultimo fatto viene illustrato con un esempio. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

È immediato verificare che A ha come autovalore $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica $m_1 = 2$ e molteplicità geometrica $\mu_1 = 2$. Dal teorema il sistema dovrebbe essere stabile $(m_1 \equiv \mu_1)$. Infatti si ha:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$$

che, per qualsiasi x_0, dà luogo a risposte $x(t)$ limitate per ogni t. Sia ora

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

È immediato verificare che A ha come autovalore $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica $m_1 = 2$ e molteplicità geometrica $\mu_1 = 1$. Dal teorema il sistema dovrebbe essere instabile $(m_1 > \mu_1)$. Infatti si ha:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$$

che, scegliendo $x_0 = [0,\ 1]^T$, dà luogo a una risposta $x(t)$ illimitata (si ottiene infatti $x_1(t) = t\delta_{-1}(t)$). $\square$

Esempio. Studiare la stabilità del sistema $\dot{x} = Ax$ con matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Calcoliamo gli autovalori di A. Si ha:

$$det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 1 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

Quindi A ha come autovalore $\lambda_1 = -2$ con molteplicità algebrica $m_1 = 2$. Quindi tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa, per cui il sistema è **asintoticamente stabile**. $\square$

Lo studio della stabilità interna dei sistemi lineari riveste particolare interesse in quanto permette di conoscere la stabilità dei *movimenti* di questi sistemi. Per *movimento* si intende l'andamento nel tempo dello stato $x(t)$ (e quindi dell'uscita $y(t)$) che si ottiene applicando un certo ingresso $u(t)$ a partire da certe condizioni iniziali x_0. Indichiamo quindi con $x_{u,x_0}(t)$ la risposta nello stato che si ottiene a partire da condizioni iniziali x_0 applicando un ingresso $u(t)$.

Se un sistema è stabile, la risposta che si ottiene perturbando le condizioni iniziali, rimane *vicina* a quella che si ottiene senza perturbazione, ossia, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $\|x_0\| < \delta$, $\|x_{u,x_0}(t) - x_{u,0}(t)\| < \epsilon$ per ogni t. Se il sistema è asintoticamente stabile non solo vale questa proprietà ma si ha anche che $\lim_{t\to\infty} \|x_{u,x_0}(t) - x_{u,0}(t)\| = 0$. La dimostrazione di questo fatto è immediata considerando la dinamica dell'*errore*, definito come $e(t) = x_{u,x_0}(t) - x_{u,0}(t)$. È immediato verificare che la dinamica dell'errore soddisfa

$$\begin{cases} \dot{e} & = & A\,e(t) \\ e(0) & = & x_0 \end{cases} \tag{2}$$

ed ha quindi le stesse proprietà di stabilità dello stato x rispetto all'origine, come si evince dal confronto di (2) con (1).

Stabilità Esterna dei Sistemi Lineari

La stabilità esterna di un sistema lineare è relativa al legame tra ingresso e uscita (e verrà quindi descritta senza precisare il tipo di rappresentazione utilizzato). Diremo che un sistema è **stabile esternamente** (o stabile BIBO, dove BIBO sta per Bounded Input Bounded Output) quando, a partire da condizioni iniziali nulle (spesso si parla di stabilità esterna nello stato 0 proprio per indicare questo fatto), risponde con uscite limitate (cioè $|y(t)| \leq M_y < \infty$ per ogni t) ogni volta che viene sollecitato con ingressi limitati (cioè $|u(t)| \leq M_u < \infty$ per ogni t). Vale la seguente proprietà, la cui dimostrazione si ottiene facilmente a partire dall'espressione della risposta forzata $Y(s) = W(s)U(s)$.

Teorema (sulla stabilità esterna). *Un sistema lineare è stabile esternamente (stabile BIBO) se e solo se tutti i poli della sua funzione di trasferimento hanno parte reale strettamente negativa.*

Da notare che non basterebbe richiedere la condizione di minore uguale a 0 della parte reale dei poli della funzione di trasferimento $W(s)$. Questo si può vedere facilmente considerando il seguente esempio: $W(s) = 1/s$ e $u(t) = \delta_{-1}(t)$. In tal caso infatti, la $W(s)$ ha un polo con parte reale nulla e $u(t)$ è limitata per ogni t. Invece $y(t)$ non è limitata. Infatti si ha: $Y(s) = W(s)U(s) = 1/s^2$ cui corrisponde $y(t) = t\delta_{-1}(t)$.

Per quanto si è detto in precedenza, la stabilità esterna a partire da condizioni iniziali nulle di un sistema lineare è legata alle proprietà di stabilità (interna) della sola parte raggiungibile e osservabile del sistema. I poli della funzione di trasferimento sono infatti gli autovalori della parte raggiungibile e osservabile del sistema. Quindi un sistema lineare è BIBO stabile se e solo se la sua parte raggiungibile e osservabile è asintoticamente stabile (ma il sistema complessivo internamente potrebbe anche essere instabile, come mostrato nel seguente esempio).

Esempio. Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, con matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C = [1,\ 0], \quad D = 0.$$

Tale sistema è instabile internamente, infatti

$$det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2),$$

con autovalori quindi $\lambda_1 = -1 < 0$ e $\lambda_2 = 2 > 0$. Poiché esiste almeno un autovalore con parte reale positiva ($\lambda_2 = 2$), in base al teorema sulla stabilità interna, il sistema è INSTABILE.

Per quanto riguarda la stabilità BIBO (o esterna):

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = [1,\ 0]\frac{1}{s^2 - s - 2}\begin{bmatrix} s & 2 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-2)}[s,\ 2]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{s-2}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{(s+1)}. \end{aligned}$$

Poiché l'unico polo della $W(s)$ ha parte reale strettamente negativa ($p = -1$), in base al teorema sulla stabilità esterna, il sistema è stabile esternamente, pur essendo, come visto, instabile internamente. Questo accade perché il modo instabile (quello relativo all'autovalore pari a 2) non è eccitabile e quindi non compare nella funzione di trasferimento. Ciò si può verificare o mediante gli strumenti dell'analisi modale oppure scrivendo la dinamica nelle coordinate $z_1 = -x_2$ e $z_2 = x_1 + x_2$: la dinamica di z_2, caratterizzata dall'autovalore pari a 2, è infatti data da $\dot{z}_2 = 2z_2$ e non risulta quindi raggiungibile dall'ingresso. □

Il criterio di Routh

Per valutare la stabilità esterna o la stabilità asintotica di sistemi lineari, occorre determinare il segno della parte reale delle radici di un polinomio $p(s)$ (nel primo caso il denominatore della funzione di trasferimento, nel secondo caso il polinomio caratteristico della matrice dinamica A). Questo compito potrebbe non essere immediato qualora il grado di $p(s)$ sia maggiore di 2, in quanto potrebbe non essere semplice calcolare le radici del polinomio stesso. Nelle prossime pagine si descrive un criterio, detto **Criterio di Routh**, che, nella versione semplificata proposta in queste pagine, permette di stabilire se un dato polinomio abbia o meno tutte le sue radici con parte reale negativa. Il criterio di Routh in definitiva permette di rispondere alla seguente domanda: *Sono le radici del polinomio $p(s)$ tutte con parte reale strettamente negativa?* La risposta a questa domanda permette di valutare la stabilità esterna di un sistema (se il polinomio considerato è il denominatore della funzione di trasferimento) e la stabilità asintotica (se $p(s)$ è il polinomio caratteristico di A).

Criterio di Routh ([redacted])

Si consideri il polinomio di grado n

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n \triangleq p(s)$$

con $a_n > 0$ (se $a_n < 0$ basta moltiplicare $p(s)$ per -1).

Se $\exists$ anche un solo $a_i \leq 0$, allora $p(s)$ <u>non</u> ha tutte le radici a parte reale negativa; se $a_i > 0$ (strettamente) $\forall i$ si procede costruendo la seguente tabella:

$$\begin{array}{llll}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \\
b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \dots \\
c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & \\
\dots & & &
\end{array}$$

dove

$$b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}$$

$$b_{n-4} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}$$

$$b_{n-6} = -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{bmatrix}$$

$$\dots$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-2}} \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{bmatrix}$$

$$c_{n-5} = -\frac{1}{b_{n-2}} \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{bmatrix}$$

N.B. La tabella termina dopo un numero finito di righe.

Il polinomio ha tutte radici a parte reale negativa se il primo elemento di tutte le righe è positivo (quindi ci si ferma nella costruzione della tabella, non appena si trova una riga con primo elemento ≤ 0). ∎

<u>Esempio</u>

$$p(s) = 4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1$$

$a_i > 0 \quad \forall i \Rightarrow$ costruiamo la tabella

$$\begin{array}{ccc}
4 & 5 & 1 \\
3 & 2 & \\
7/3 & 1 & \\
5/7 & & \\
1 & &
\end{array}$$

$$= -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{3}{7} \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{7}{5} \det \begin{bmatrix} 7/3 & 1 \\ 5/7 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ tutti gli elementi della 1^a colonna sono positivi $\Rightarrow$ le soluzioni di $p(s) = 0$ sono <u>tutte</u> a parte reale negativa ∎

Esercizi su Routh

1) $p(s) = s^3 + s^2 + 3s + 6$

$a_i > 0 \ \forall i$, costruisco la tabella

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 6 \\ -3 & \dots \end{array}$$

mi fermo: ho trovato un el. ≤ 0

$\Rightarrow$ $p(s)$ <u>NON</u> ha tutte le radici con parte reale negative.

2) $p(s) = 3s^3 + s + 1$

$a_2 = 0$: mi fermo qui; $p(s)$ <u>non</u> ha tutte le radici a parte reale negative

N.B. Se costruendo la tabella dovesse comparire un elemento nullo nella prima colonna o una riga tutta di zeri, esistono metodi per continuare la tabella e per stabilire quante soluz. hanno parte reale negativa, quante positiva e quante nulla. In ogni caso se ciò accade sicuramente <u>non</u> tutte le radici hanno parte reale negativa.

3) $p(s) = s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 24 & 16 \\ 8 & 32 & \\ 20 & 16 & \\ 512 & & \\ 16 & & \end{array}$$

$20 \rightarrow -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 32 \end{vmatrix}$

$16 \rightarrow -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$

$512 \rightarrow \left(-\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 8 & 32 \\ 20 & 16 \end{bmatrix}\right) \times 20$

N.B. Si può moltiplicare un'intera riga per una costante positiva

$16 \rightarrow -\frac{1}{512}\begin{vmatrix} 20 & 16 \\ 512 & 0 \end{vmatrix}$

Sono tutti positivi $\Rightarrow$ le radici sono tutte a parte reale negative.

4) Polinomio con coefficienti parametrici:

$$p(s) = s^3 + 5s^2 + (K+3)s + K-9$$

$$\begin{cases} K+3 > 0 \\ K-9 > 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{K > 9}}$$

Costruisco la tabella:

1	$K+3$
5	$K-9$
$4K+24$	
$K-9$	

Complessivamente $p(s)$ ha tutte radici a parte reale negative se $\boxed{K > 9}$.

Esercizi sulla stabilità

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(sI - A) = s^3 \Rightarrow \lambda_i = 0$ è autovalore con molteplicità algebrica $m_i = 3$

Per calcolare la molteplicità geometrica μ_i, occorre calcolare il rango di $(\lambda_i I - A)$ per $\lambda_i = 0$, cioè

$$r_i = \text{rank}(\lambda_i I - A) \equiv \text{rank}(A) =$$

$$= \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Quindi $\mu_i = n - r_i = 3 - 2 = 1 < m_i$

$\Rightarrow$ INSTABILE

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \det(sI - A) = (s^2+1)(s^2+4)$

$\Rightarrow s = \pm j, \pm 2j$

Siccome in generale $\mu_i \leq m_i$, se $m_i = 1$, necessariamente anche $\mu_i = 1 \Rightarrow$ STABILE (ma non asintoticamente).