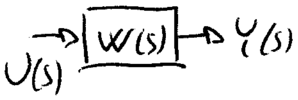
Riduzione schemi a blocchi

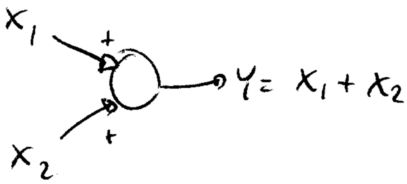
▶ Elementi degli schemi a blocchi:

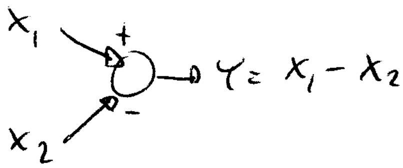
- blocco

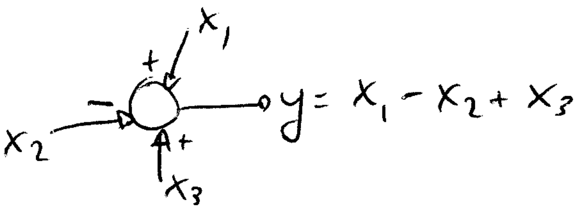


dove $W(s)$ = funzione di trasferimento del blocco

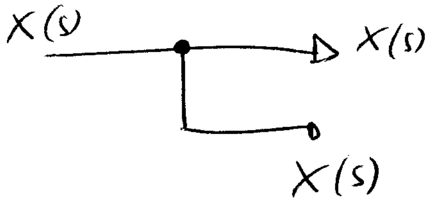
- nodo sommatore:





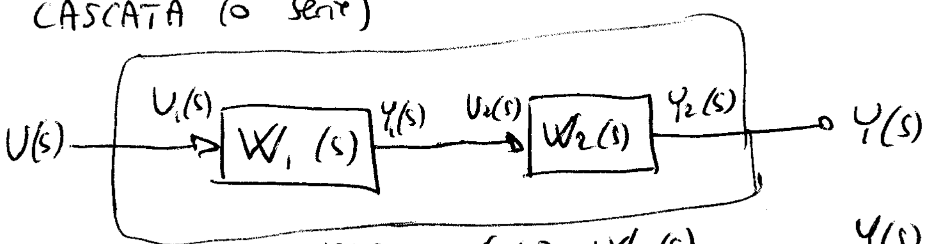


- punto di prelievo



▶ Regole di composizione

- CASCATA (o serie)

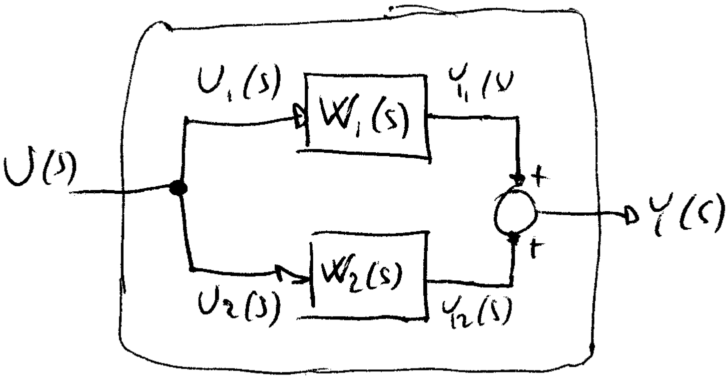


$W(s) = W_2(s) \cdot W_1(s)$

$Y(s) = W(s) \cdot U(s)$

La F^ne di trasferimento $W(s)$ della connessione in serie (o in cascata) di due sistemi è pari al prodotto delle loro funzioni di trasferimento.

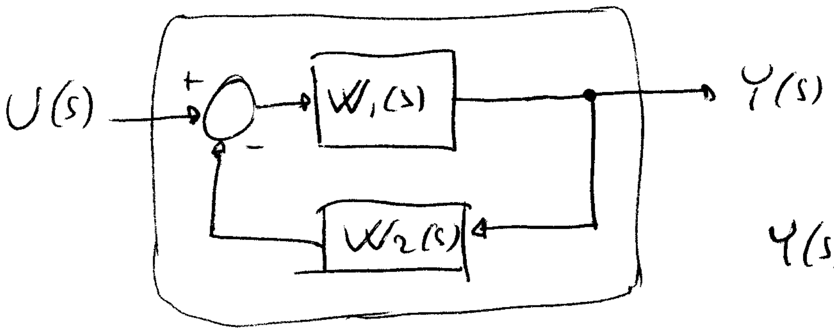
- Connessione in PARALLELO



$$Y(s) = W(s)\,U(s)$$

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s)$$

- Controreazione



$$Y(s) = W_1(s)\left[U(s) - W_2(s)Y(s)\right]$$

$$= W_1(s)U(s) - W_1(s)W_2(s)Y(s)$$

$$\Rightarrow \left[1 + W_1(s)W_2(s)\right]Y(s) = W_1(s)U(s)$$

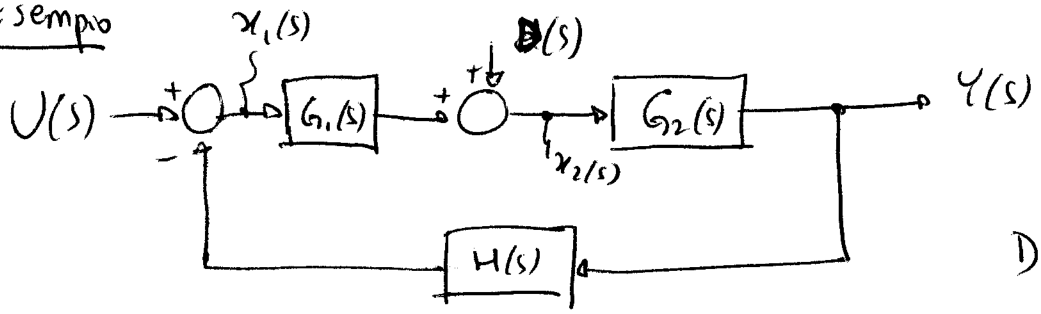
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}\,U(s)$$

$$Y(s) = W(s)\,U(s)$$

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_2(s)W_1(s)}$$

In generale, per calcolare una funzione di trasferimento, conviene mettere una variabile dopo ogni sommatore e fare i calcoli.

Esempio



d = disturbo

$D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\}$

$$Y(s) = W_{uy}(s)\,U(s) + W_{dy}(s)\cdot D(s)$$

Calcoliamo $W_{uy}(s)$ e $W_{dy}(s)$.

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G_2(s) \cdot X_2(s) = \\
&= G_2(s) \cdot \left[G_1(s)\, X_1(s) + D(s) \right] = \\
&= G_2(s) \cdot \left[G_1(s) \big(U(s) - H(s) \cdot Y(s) \big) + D(s) \right] = \\
&= G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot U(s) - G_2(s)\, G_1(s) \cdot H(s)\, Y(s) + G_2(s) \cdot D(s)
\end{aligned}
$$

$$
\left[1 + G_2(s)\, G_1(s)\, H(s) \right] Y(s) = G_2(s)\, G_1(s)\, U(s) + G_2(s)\, D(s)
$$

$$
Y(s) = \underbrace{\frac{G_2(s)\, G_1(s)}{1 + G_2(s)\, G_1(s)\, H(s)}}_{W_{uy}(s)} U(s) + \underbrace{\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)\, G_1(s)\, H(s)}}_{W_{dy}(s)} D(s)
$$

■

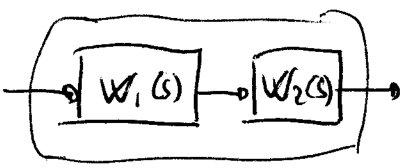
Esiste una formula (detta di Mason) che permette di calcolare la funzione di trasferimento di schemi a blocchi. Nel presente corso non se ne farà uso.

■

EFFETTI DELLA CONNESSIONE DI SISTEMI

Supponiamo ogni blocco sia raggiungibile e osservabile (la $W(s)$ rappresenta completamente la dinamica del blocco). Cosa accade quando si connettono sistemi?

▶ Connessione in serie

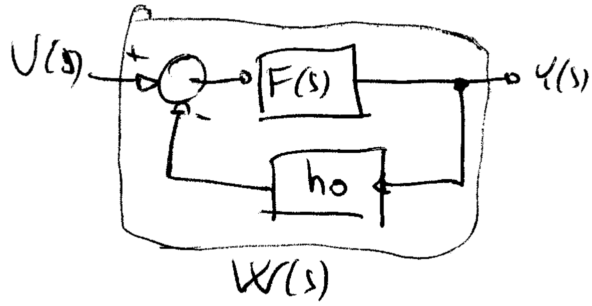


$$
W_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \qquad W_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}
$$

$$
W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s)
$$

Se non ci sono cancellazioni tra $W_1(s)$ e $W_2(s)$ allora anche $W(s)$ rappresenta completamente il sistema complessivo, altrimenti no, se ci sono cancellazioni tra $W_1(s)$ e $W_2(s)$, si può avere la perdita di raggiungibilità e/o dell'osservabilità (cfr. esempio più avanti).

Connessione in controreazione istantanea



Supp $F(s)$ ~~dia~~ rappresenti completamente il sistema e sia strettamente propria. Allora anche $W(s) = \frac{F(s)}{1+h_0F(s)}$, funzione di trasferimento del sistema complessivo, rappresenta completamente il sistema.

Infatti, sia

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con $\underbrace{N(s)}_{}$ e $D(s)$ due polinomi primi tra loro. Si ha:

$$W(s) = \frac{F(s)}{1+h_0F(s)} = \frac{N(s)}{D(s)+h_0N(s)}$$

Supp per assurdo che $W(s)$ non rappresenti completamente il sistema, allora $N(s)$ e $D(s)+h_0N(s)$ non sono primi tra loro, cioè

$$N(s) = (s-p)\,P(s)$$

$$D(s) + h_0N(s) = (s-p)\,Q(s)$$

p è uno zero comune a $N(s)$ e a $D(s)+h_0N(s)$; $P(s)$ e $Q(s)$ sono due polinomi

Ma allora

$$D(s) = (s-p)\,Q(s) - h_0(s-p)\,P(s) =$$

$$= (s-p)\left[Q(s) - h_0P(s)\right] = (s-p)\,R(s)$$

con $R(s) = Q(s) - h_0P(s)$ un opportuno polinomio

Ma allora N(s) e D(s) non sono primi tra loro e quindi F(s) = N(s)/D(s) = [(s-p)P(s)]/[(s-p)R(s)] = P(s)/R(s) non rappresenterebbe tutto il sistema (essendosi semplificato il fattore (s-p)), contro l'ipotesi.
Pertanto la controreazione istantanea non altera le proprietà di raggiungibilità e osservabilità.

Effetti della connessione serie di sistemi lineari

In questo documento si analizzano gli effetti della connessione serie utilizzando un semplice esempio. La dimostrazione analitica generale degli effetti mostrati in questo esempio esula dagli scopi di questo corso. Si considerino quindi due sistemi lineari e stazionari $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ con funzione di trasferimento rispettivamente:

$$W_1(s) = \frac{1}{s-1} \qquad \text{e} \qquad W_2(s) = \frac{s-1}{s+1}. \tag{1}$$

Vogliamo studiare gli effetti della connessione serie di questi due sistemi: la funzione di trasferimento complessiva, che è il prodotto delle funzioni dei due sistemi, comporta una semplificazione del fattore $s-1$ ed è data da

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}. \tag{2}$$

Sappiamo che questa semplificazione è indice di una perdita di raggiungibilità e/o di osservabilità del modo associato al polo che si è semplificato (cioè del modo $e^t\delta_{-1}(t)$ presente nel primo sistema). In particolare, assumendo che $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ siano sistemi raggiungibili e osservabili (per cui la loro funzione di trasferimento li rappresenta completamente, contenendo come poli tutti gli autovalori con le loro molteplicità algebriche), il sistema serie complessivo non sarà più completamente raggiungibile e osservabile e la $W(s)$ non lo rappresenterà tutto.

Tuttavia, come si vedrà tra breve, il discorso cambia a seconda di quale connessione serie si considera: cioè se si mette $\mathcal{S}_1$ prima di $\mathcal{S}_2$ o viceversa, avendo nel primo caso una cancellazione detta *polo-zero* e nel secondo caso una cancellazione *zero-polo*. Vedremo che il primo caso corrisponde a una perdita di osservabilità del polo in $s=1$ che si è semplificato mentre il secondo a una perdita di raggiungibilità.

Rappresentazione ISU dei due sistemi

Prima di affrontare il discorso, ricaviamo una rappresentazione ISU delle funzioni di trasferimento dei due sistemi, che servirà dopo per valutare le proprietà di raggiungibilità e osservabilità della connessione serie. Si noti che, poiché per ipotesi $W_1(s)$ e $W_2(s)$ rappresentano completamente i loro sistemi, la ISU ad esse associata che abbiamo considerato in questo corso descrive completamente quello che accade dentro i due sistemi e, come accennato a suo tempo, è univocamente determinata a meno di un cambiamento di base nello spazio di stato.

Rappresentazione ISU di $\mathcal{S}_1$. La funzione di trasferimento di $\mathcal{S}_1$ è

$$W_1(s) = \frac{1}{s-1} = \frac{b_0}{s+a_0},$$

dove abbiamo introdotto i coefficienti $b_0 = 1$ e $a_0 = -1$ utilizzati anche nella sez. 6.3.2 degli appunti sulla prima parte del corso, dove veniva data la formula di una possibile rappresentazione ISU di un sistema avente una funzione di trasferimento di questo tipo. Essendo il denominatore di $W_1(s)$ un polinomio di grado 1, la dimensione $\bar{n}$ della ISU è appunto 1 e quindi, indicando con A_1 la matrice A di questa rappresentazione, A_1 sarà una matrice 1×1. Guardando l'espressione di A nella sez. 6.3.2 richiamata pocanzi, l'unico elemento che rimane nel caso 1×1 è $-a_0$, cioè $A_1 = -a_0 = 1$. Del vettore B rimane solo l'1. Poiché abbiamo un grado a numeratore $m = 0$ e a denominatore $n = 1$, siamo nel caso $m < n$ in cui $C = b_0 = 1$ e $D = 0$. In definitiva:

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 1, \quad C_1 = 1, \quad D_1 = 0,$$

dove con A_1, B_1, C_1 e D_1, come in parte già detto, abbiamo indicato le matrici della rappresentazione ISU che abbiamo scelto per il sistema $\mathcal{S}_1$. In accordo cone queste matrici, indicando con x_1, u_1 e y_1 rispettivamente lo stato, l'ingresso e l'uscita di questa rappresentazione ISU, si ha:

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 = x_1 + u_1, \tag{3}$$

$$y_1 = C_1x_1 + D_1u_1 = x_1. \tag{4}$$

Si può verificare facilmente che la scelta delle matrici è corretta in quanto, calcolando $C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1$ si riottiene proprio la $W_1(s)$. Si noti che in questo caso, essendo A_1 uno scalare, $(sI - A_1)^{-1} = \frac{1}{s-A_1} = \frac{1}{s-1}$.

Rappresentazione ISU di $\mathcal{S}_2$. Un discorso del tutto analogo si può fare per il sistema $\mathcal{S}_2$ che ha una funzione di trasferimento data da

$$W_2(s) = \frac{s-1}{s+1} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + s},$$

dove ora $b_0 = -1$, $b_1 = 1$ e $a_0 = 1$. Tutto è molto simile al caso precedente salvo il fatto che in questo caso numeratore e denominatore hanno lo stesso grado $m = n = 1$ e pertanto C e D sono date da (cfr. sempre la sez. 6.3.2 degli appunti sulla prima parte del corso) $C = b_0 - a_0 b_n = b_0 - a_0 b_1 = -1 - 1 \cdot 1 = -2$ e $D = b_n = b_1 = 1$. In definitiva:

$$A_2 = -a_0 = -1, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = -2, \quad D_2 = 1,$$

essendo A_2, B_2, C_2 e D_2 le matrici della rappresentazione ISU che abbiamo adottato per il sistema $\mathcal{S}_2$. Indicando con x_2, u_2 e y_2 rispettivamente lo stato, l'ingresso e l'uscita di questa rappresentazione ISU, si ha:

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 = -x_2 + u_2, \tag{5}$$

$$y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 = -2x_2 + u_2. \tag{6}$$

Anche qui, $C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$ coincide con $W_2(s)$.

Cancellazione polo-zero

Si consideri ora la connessione serie riportata in Fig. 1. Dalla figura si vede come l'uscita del sistema serie complessivo sia quella del secondo sistema, l'ingresso del secondo sistema sia l'uscita del primo e l'ingresso del sistema complessivo coincida con l'ingresso del primo. Cioè:

$$Y(s) = Y_2(s), \quad U_2(s) = Y_1(s), \quad U(s) = U_1(s). \tag{7}$$

Il sistema serie complessivo ha uno stato x di dimensione 2, composto dalle variabili di stato x_1 e x_2

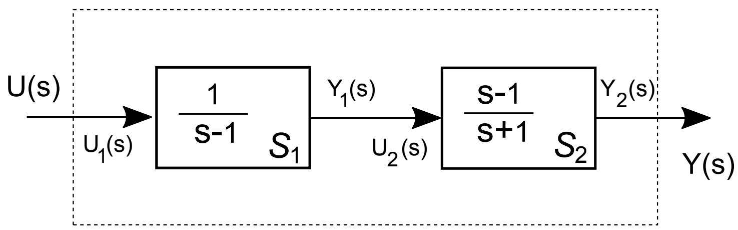


Figura 1: Connessione serie $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$.

dei due sistemi che lo compongono. Utilizzando le relazioni (7) e quelle riportate in (3), (4), (5) e (6), la rappresentazione ISU del sistema complessivo sarà data da:

$$\dot{x}_1 = x_1 + u_1 = x_1 + u, \tag{8}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u_2 = -x_2 + y_1 = x_1 - x_2, \tag{9}$$

$$y = y_2 = -2x_2 + u_2 = -2x_2 + y_1 = x_1 - 2x_2. \tag{10}$$

La rappresentazione ISU del sistema complessivo sarà quindi caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -2], \quad D = 0. \tag{11}$$

Sappiamo che la funzione di trasferimento del sistema serie complessivo è $W(s) = 1/(s+1)$ mentre gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Pertanto solo l'autovalore -1 è presente come polo della $W(s)$: l'altro si è semplificato nei calcoli e ciò è indice del fatto che l'autospazio ad esso relativo è non raggiungibile e/o non osservabile. Andando a fare l'analisi modale di questo sistema (possibile senza problemi in quanto abbiamo due autovalori distinti), si scopre che abbiamo perso l'osservabilità del modo associato a $\lambda_2 = 1$. Infatti, scegliendo come autovettori destri degli autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ rispettivamente $w_1 = [0, -0.5]'$ e $w_2 = [1, 0.5]'$, la matrice T degli autovettori sinistri (che è l'inversa di $T^{-1} = [w_1, w_2]$, cioè della matrice che ha per colonne i due autovettori destri) è data da

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}.$$

Gli autovettori sinistri sono dunque le righe di T, cioè $v_1' = [1,\ -2]$ e $v_2' = [1,\ 0]$. Per quanto riguarda l'eccitabilità dei modi si ha che $v_1'B = [1,\ -2] \cdot [1,\ 0]' = 1 \neq 0$ e $v_2'B = [1,\ 0] \cdot [1,\ 0]' = 1 \neq 0$. Pertanto entrambi i modi sono eccitabili con impulsi dall'ingresso. Per quanto riguarda l'osservabilità si ha che $Cw_1 = [1,\ -2] \cdot [0,\ -0.5]' = 1 \neq 0$ e $Cw_2 = [1,\ -2] \cdot [1,\ 0.5]' = 0$. Pertanto mentre il primo modo è osservabile, il secondo (che è proprio quello relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$ che si è semplificato) non lo è.

Considerando il cambiamento di coordinate suggerito dall'analisi modale, e cioè $z = Tx$ (ossia $z_1 = x_1 - 2x_2$ e $z_2 = x_1$), si ottiene nelle nuove coordinate la seguente rappresentazione ISU:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + u, \\ \dot{z}_2 &= z_2 + u, \\ y &= z_1. \end{aligned}$$

Rappresentando graficamente queste equazioni (si veda la Fig. 2), è evidente come l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$ (descritto dalla coordinata z_2) sia divenuto non osservabile: il termine $(s-1)$ a numeratore del secondo sistema ha nascosto all'uscita gli effetti del polo del primo sistema.

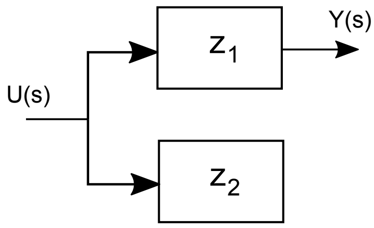


Figura 2: Schema della rappresentazione ISU nelle coordinate z della connessione serie $\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$.

Cancellazione zero-polo

Si consideri ora la connessione serie riportata in Fig. 3. Dalla figura si vede come l'uscita del sistema serie complessivo sia quella del sistema $\mathcal{S}_1$, l'ingresso di $\mathcal{S}_1$ sia l'uscita di $\mathcal{S}_2$ e l'ingresso del sistema complessivo coincida con l'ingresso di $\mathcal{S}_2$. Cioè:

$$Y(s) = Y_1(s), \quad U_1(s) = Y_2(s), \quad U(s) = U_2(s). \tag{12}$$

Il sistema serie complessivo ha uno stato x di dimensione 2, composto dalle variabili di stato x_1 e x_2 dei due sistemi che lo compongono. Utilizzando le relazioni (12) e quelle riportate in (3), (4), (5) e (6), la rappresentazione ISU del sistema complessivo sarà data da::

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + u_1 = x_1 + y_2 = x_1 - 2x_2 + u_2 = x_1 - 2x_2 + u, && (13) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u_2 = -x_2 + u, && (14) \\ y &= y_1 = x_1. && (15) \end{aligned}$$

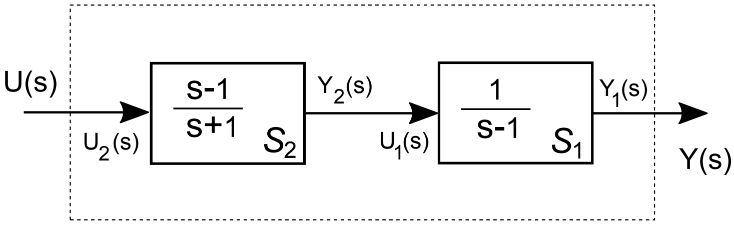


Figura 3: Connessione serie $\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1$.

La rappresentazione ISU del sistema complessivo sarà quindi caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ \ 0], \quad D = 0. \tag{16}$$

Sappiamo che la funzione di trasferimento del sistema serie complessivo è $W(s) = 1/(s+1)$ mentre gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Pertanto solo l'autovalore -1 è presente come polo della $W(s)$: l'altro si è semplificato nei calcoli e ciò è indice del fatto che l'autospazio ad esso relativo è non raggiungibile e/o non osservabile. Andando a fare l'analisi modale di questo sistema (possibile senza problemi in quanto anche in questo caso abbiamo due autovalori distinti), si scopre che abbiamo perso l'eccitabilità del modo associato a $\lambda_2 = 1$. Infatti, scegliendo come autovettori destri degli autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ rispettivamente $w_1 = [1, 1]'$ e $w_2 = [1, 0]'$, la matrice T degli autovettori sinistri (che è l'inversa di $T^{-1} = [w_1, w_2]$, cioè della matrice che ha per colonne i due autovettori destri) è data da

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}.$$

Gli autovettori sinistri sono dunque le righe di T, cioè $v_1' = [0, \ 1]$ e $v_2' = [1, \ -1]$. Per quanto riguarda l'eccitabilità dei modi si ha che $v_1'B = [0, \ 1] \cdot [1, \ 1]' = 1 \neq 0$ e $v_2'B = [1, \ -1] \cdot [1, \ 1]' = 0$. Pertanto mentre il primo modo è eccitabile con impulsi dall'ingresso, il secondo (che è proprio quello relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$ che si è semplificato) non lo è. Per quanto riguarda l'osservabilità si ha che $Cw_1 = [1, \ 0] \cdot [1, \ 1]' = 1 \neq 0$ e $Cw_2 = [1, \ 0] \cdot [1, \ 0]' = 1 \neq 0$. Pertanto entrambi i modi sono osservabili.

Considerando il cambiamento di coordinate suggerito dall'analisi modale, e cioè $z = Tx$ (ossia $z_1 = x_2$ e $z_2 = x_1 - x_2$), si ottiene nelle nuove coordinate la seguente rappresentazione ISU:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + u, \\ \dot{z}_2 &= z_2 \\ y &= z_1 + z_2. \end{aligned}$$

Rappresentando graficamente queste equazioni (si veda la Fig. 4), è evidente come l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$ (descritto dalla coordinata z_2) sia divenuto non raggiungibile: il termine $(s-1)$ a numeratore di $\mathcal{S}_2$, semplificando il polo di $\mathcal{S}_1$, non permette all'ingresso di eccitare il modo associato a questo polo.

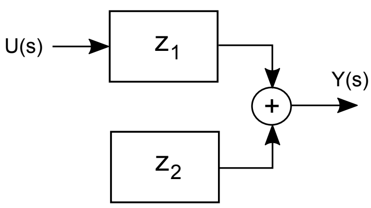
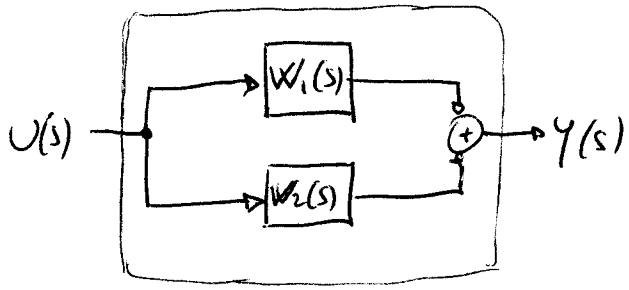


Figura 4: Schema della rappresentazione ISU nelle coordinate z della connessione serie $\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1$.

Effetti della connessione parallelo.



Come detto in precedente, si assume che $W_1(s)$ e $W_2(s)$ rappresentino tutto il sistema, quindi se $W_1(s) = \dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}$ e $W_2(s) = \dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}$, si assume che $N_1(s)$ e $D_1(s)$ siano primi tra loro, e così pure $N_2(s)$ e $D_2(s)$. Ora,

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}.$$

<u>Si ha una semplificazione nella $W(s)$ se e solo se $W_1(s)$ e $W_2(s)$ hanno uno (o più) polo in comune.</u> Infatti, sia $(s-p)$ il fattore comune tra numeratore e denominatore di $W(s)$ e, senza perdita di generalità, si assume che sia un polo di $W_1(s)$, cioè

$$D_1(s) = (s-p)\,\hat{D}_1(s)$$

con $\hat{D}_1(s)$ un polinomio opportuno. Per avere semplificazione, $(s-p)$ deve essere un fattore anche del numeratore di $W(s)$, cioè

$$N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)\Big|_{s=p} = 0 \qquad (1)$$

Ora, $D_1(s)\Big|_{s=p} = 0$ per cui

$$N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)\Big|_{s=p} = N_1(s)D_2(s)\Big|_{s=p}$$

Poiché $N_1(s)\Big|_{s=p} \neq 0$ (perché $N_1(s)$ e $D_1(s)$ sono primi tra loro), la (1) implica che $D_2(s)\Big|_{s=p} = 0$, cioè $D_2(s) = (s-p)\,\hat{D}_2(s)$, con $\hat{D}_2(s)$ un polinomio opportuno. Quindi p è anche un polo di $W_2(s)$.

Quindi, <u>nella connessione parallelo, si ha perdita di raggiungibilità e osservabilità</u> (si perdono entrambe) <u>se e solo se $W_1(s)$ e $W_2(s)$ hanno uno o più poli in comune.</u> ∎