

## Il problema del controllo

Dato un sistema con funzione di trasferimento  $P(s)$ , si vuole costruire un controllore (cioè un oggetto - matematico e quindi fisico - che effettui la scelta dell'ingresso  $u$ ) che assicuri le seguenti **specifiche**:

- la **stabilità asintotica** del sistema complessivo;
- un buon **inseguimento** da parte dell'uscita  $y(t)$  di un segnale di riferimento  $r(t)$  assegnato in termini di:
  - i) **precisione**: l'uscita  $y(t)$  a regime (cioè per tempi grandi) deve essere il più possibile vicina a  $r(t)$ ;
  - ii) **transitorio**: la convergenza di  $y(t)$  verso  $r(t)$  deve essere sufficientemente rapida e presentare oscillazioni il più possibile contenute rispetto al riferimento.

## Controllo a catena aperta

Un possibile schema di controllo per ottenere questo scopo è quello a catena aperta (*feed-forward*). Con riferimento alla Fig. 1,  $C(s)$  è la funzione di trasferimento del controllore mentre  $P(s)$  è quella del sistema da controllare. I segnali  $R(s)$ ,  $U(s)$  e  $Y(s)$  rappresentano rispettivamente la trasformata di Laplace del riferimento da inseguire, dell'ingresso e dell'uscita del sistema da controllare.

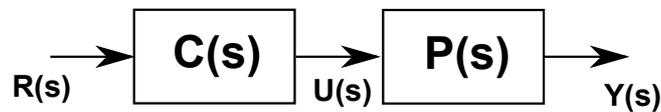


Figure 1: Schema di controllo in catena aperta

Questo schema di controllo presenta diversi problemi, in parte già messi in luce nell'esempio del carrello all'inizio del corso. Un primo problema è quello che, se  $P(s)$  è instabile, la stabilizzazione del sistema complessivo mediante cancellazione del polo instabile, anche se fa scomparire questo modo dalla funzione di trasferimento del sistema complessivo (e quindi dalle risposte forzate  $y$  del sistema), lo rende tuttavia solo non raggiungibile: tale modo continua a esistere all'interno del sistema e dà problemi se la sua dinamica si innesca per qualche motivo (per esempio a causa di disturbi e/o di condizioni iniziali non nulle).

In generale però, il problema principale di questo schema, così come messo in luce nell'esempio del carrello, è che l'ingresso  $u$  viene scelto sulla base di calcoli preliminari, senza tenere conto degli effetti reali che produrrà sul sistema. Ora, in qualunque problema reale, i parametri del sistema ma anche il suo modello sono noti solo con una certa approssimazione. Ora, una legge di controllo progettata sulla base di una conoscenza nominale del sistema, potrebbe produrre comportamenti indesiderati quando venga applicata su un sistema anche solo leggermente diverso da quello di partenza. In sostanza una legge di controllo in catena aperta si rivela poco **robusta** rispetto a incertezze sul modello e/o a disturbi non noti che agiscono sul sistema (si veda la Fig. 2).

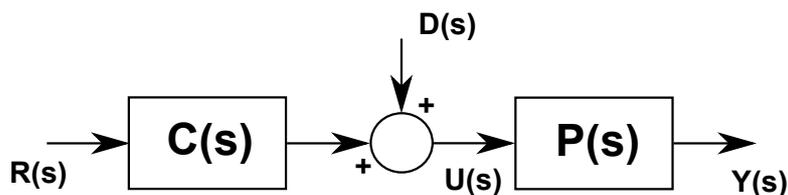
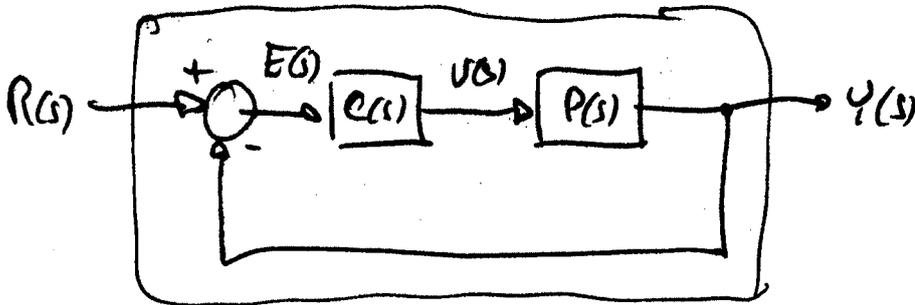


Figure 2: Schema di controllo in catena aperta: un disturbo (con trasformata di Laplace  $D(s)$ ) agisce sugli attuatori del sistema e perturba il valore dell'ingresso restituito dal controllore

Uno schema di controllo in catena aperta può essere comunque utilizzato, e questo perché in generale può presentare buone caratteristiche (per esempio in termini di rapidità di risposta). Tuttavia è bene che sia affiancato da uno schema di controllo in catena chiusa, il quale garantisce un certo grado di robustezza al controllore e aggira le problematiche menzionate pocanzi in relazione al controllo in catena aperta (così come si era osservato nell'esempio del carrello). Nel resto del corso ci si soffermerà sul progetto di un controllo in catena chiusa, lasciando a corsi più avanzati il progetto di uno schema di controllo *misto*, che prevede cioè sia un'azione in avanti (cioè in catena aperta) sia un'azione in catena chiusa.

(2)

Schema di controllo in catena chiusa o in contorno (in inglese feedback): l'azione di controllo si basa sull'osservazione dell'uscita (esempio storico: regolatore di Watt, 1787).



$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

errore = differenza tra valor desiderato e quello vero.

Cosa mettere come blocco di controllo  $C(s)$  nello schema feedback sopra?

Una possibilità molto diffusa, specie in ambito industriale, sono i cosiddetti REGOLATORI STANDARD, in cui  $C(s)$  comprende una combinazione tra le seguenti possibili azioni di controllo:

- Proporzionale (indicata con "P"):

$$U(s) = K_p E(s) = K_p [R(s) - Y(s)]$$

nel tempo:  $u(t) = K_p [r(t) - y(t)]$

quindi  $C(s) = K_p$ ; l'azione di controllo è proporzionale ~~allo scarto~~ allo scarto tra valor desiderato e valor vero.

- Integrale (indicata con "I"):

$$U(s) = \frac{K_I}{s} E(s) = \frac{K_I}{s} [R(s) - Y(s)]$$

Nel tempo:  $u(t) = K_I \int_0^t [r(\tau) - y(\tau)] d\tau$

quindi  $C(s) = \frac{K_I}{s}$ . L'azione di controllo è proporzionale all'integrato dello scarto tra valor desiderato e valor vero. Usata in combinazione all'azione proporzionale può migliorarne

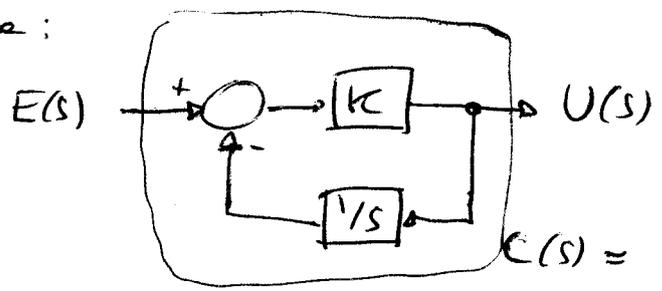
Le caratteristiche di precisione, p. es. in presenza di un disturbo tra il blocco  $C(s)$  e  $P(s)$ .

- Derivativa (indicata con "D"),

$$U(s) = K_D s E(s) = K_D s [R(s) - Y(s)]$$

Nel tempo:  $u(t) = K_D \frac{d}{dt} [r(t) - y(t)]$

Quindi  $C(s) = K_D s$ . L'azione di controllo è proporzionale alla derivata dello scarto tra valore desiderato e valore vero. Usata in combinazione all'azione proporzionale può migliorare la prontezza di risposta (accelerando la convergenza quando l'errore sta aumentando, rallentando evitando eventuali oscillazioni quando l'errore sta diminuendo). N.B.  $C(s) = K_D s$  non è realizzabile fisicamente, si può realizzarla in modo approssimato con il seguente schema:



$$C(s) = \frac{Ks}{K+s} \approx s \text{ se } K \text{ è scelto molto elevato}$$

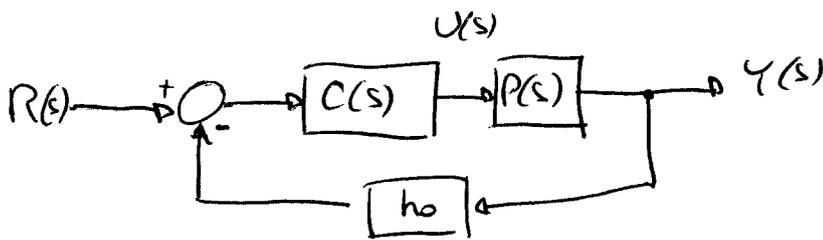
A seconda del tipo di sistema e di problema, si può scegliere una qualsiasi combinazione delle azioni precedenti. Se le consideriamo tutte, si ottiene un controllore PID in cui

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (K_p, K_I, K_D)$$

Sono possibili anche combinazioni PI, PD. Il settaggio dei parametri viene fatto con opportune tecniche, dette di Ziegler-Nichols, che ~~richiedono~~ <sup>si basano su</sup> ~~alcune~~ <sup>alcune</sup> prove sperimentali condotte sul sistema senza la necessità di conoscere  $P(s)$  (È questo un grosso vantaggio dei regolatori standard). (Fine reg. standard)

Dato lo schema di controllo a retroazione frequente, in cui l'uscita  $y(t)$  viene rilevata da un sensore che la restituisce moltiplicata per una costante  $h_0 \in \mathbb{R}$ :

(4)



Si vogliono studiare tecniche per valutare l'asintotica stabilità del sistema complesso (ANALISI) e per progettare una legge di controllo  $C(s)$  che soddisfi le specifiche (SINTESI). Esistono varie tecniche per questo scopo. Se  $C(s)$  dipende solo da un parametro (come per esempio  $C(s) = K_p$ ), la stabilità del sistema (e quindi la scelta di  $K_p$ ) può essere studiata con Routh applicato al denominatore di:

$$W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + h_0 P(s)C(s)}$$

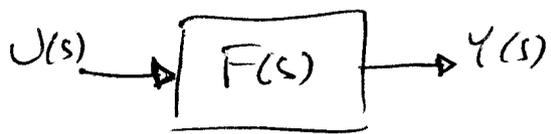
Nel caso più

generale, esistono diverse possibilità e diversi tipi di approccio sia per quanto riguarda l'analisi, sia per quanto riguarda la sintesi. In questo corso faremo riferimento ~~ai~~ a metodi basati sulla risposta in frequenza, sia per l'analisi, sia per la sintesi. Gli ingredienti necessari per introdurre questi metodi sono: i diagrammi di Bode, il criterio di Nyquist, la risposta armonica di un sistema lineare. Questi saranno oggetto delle prossime lezioni. Cominciamo col definire la risposta armonica di un sistema lineare.

Risposta armonica di un sistema lineare.

Dato un sist. lineare e.s. stabile con fn di trasferimento  $F(s)$ , la risposta armonica è l'andamento dell'uscita  $y(t)$  a regime quando in ingresso c'è un segnale sinusoidale, con  $\omega t$  del tipo  $u(t) = A \cos(\omega t)$ .

Si trova che l'uscita a regime, corrispondente a un



ingresso sinusoidale, è ancora un segnale sinusoidale, con stessa pulsazione, ma diversa ampiezza e fase, con

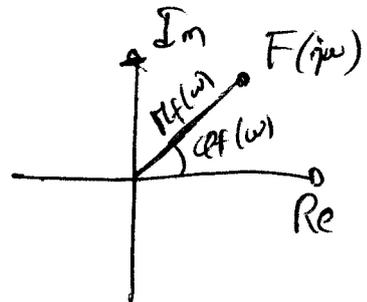
$$y(t) = A \cdot M_f(\omega) \cos(\omega t + \varphi_f(\omega))$$

Il guadagno  $M_f(\omega)$  e lo sfasamento  $\varphi_f(\omega)$  dipendono dalla  $F(s)$  e dalla pulsazione  $\omega$ , in particolare si ha:

$$M_f(\omega) = |F(j\omega)| = \text{modulo di } F(s)|_{s=j\omega}$$

modulo (fase)

$$\varphi_f(\omega) = \arg(F(j\omega)) = \text{argomento di } F(s)|_{s=j\omega}$$



Infatti, se  $u(t) = e^{j\omega t}$ , si ha

$$U(s) = \frac{1}{s - j\omega} \quad \text{a} \quad Y(s) = \frac{F(s)}{s - j\omega} = \left( \text{fratti semplici relativi ai poli di } F(s) \right) + \frac{\alpha}{s - j\omega}$$

dove  $\alpha = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) F(s) = F(j\omega)$

$F(j\omega)$  è un numero complesso, con modulo  $M_f(\omega)$  e fase  $\varphi_f(\omega)$ , con  $F(j\omega) = M_f(\omega) e^{j\varphi_f(\omega)}$

Quindi:

$$y(t) = \left( \begin{array}{l} \text{modi corrispondenti ai poli} \\ \text{di } F(s), \text{ che vanno a } \phi \\ \text{per } t \rightarrow \infty \text{ per l'ass. stab. di } F(s) \end{array} \right) + M_f(\omega) e^{j(\omega t + \phi_f(\omega))}$$

Se applico  $u(t) = e^{-j\omega t}$ , ottengo e regimo:

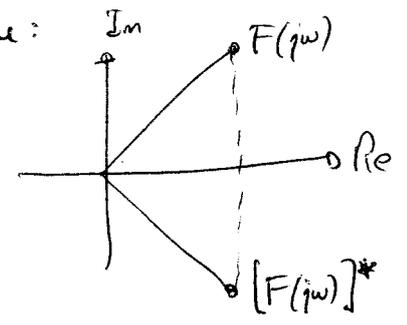
$$y(t) = M_f(-\omega) e^{-j\omega t + j\phi_f(-\omega)}$$

↙ complesso coniugato

Poiché  $F(-j\omega) = [F(j\omega)]^*$ , ne segue che:

$$M_f(-\omega) = M_f(\omega)$$

$$\phi_f(-\omega) = -\phi_f(\omega)$$



$$\Rightarrow y(t) = M_f(\omega) e^{-j[\omega t + \phi_f(\omega)]}$$

Pertanto, se applico  $u(t) = A \cos(\omega t) = A \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

ottengo:

$$y(t) = \frac{A}{2} \cdot M_f(\omega) \left[ e^{j[\omega t + \phi_f(\omega)]} + e^{-j[\omega t + \phi_f(\omega)]} \right] =$$

$$= A M_f(\omega) \cos[\omega t + \phi_f(\omega)]$$

Anche se  $F(s)$  non è la fun. di trasf. di un sistema c.s. stabile, ~~per~~  $F(j\omega) = M_f(\omega) e^{j\phi_f(\omega)}$  è un numero complesso con un modulo  $M_f(\omega)$  e una fase  $\phi_f(\omega)$ . I diagrammi logaritmici di questo modulo e di questa fase in fun. di  $\omega$  sono detti DIAGRAMMI DI BODE e sono l'ingrediente di base per il criterio di Nyquist e per la sintesi basata sulla risposta in frequenza.

# Tracciamento diagrammi di Bode e dei diagrammi polari

(1)

Dato una  $F(s)$ , funzione razionale in  $s$ , ponendo  $s = j\omega$ ,  $F(j\omega) \neq \omega$  è un numero complesso con modulo  $M_f(\omega)$  e fase  $\varphi_f(\omega)$ :

$$F(j\omega) = M_f(\omega) e^{j\varphi_f(\omega)}$$

Poiché  $F(s)$  è ~~scopre~~ caratterizzata da coefficienti reali, vale la proprietà:

$$F(-j\omega) = [F(j\omega)]^* \quad \text{a complesso coniugato}$$

per cui  $M_f(-\omega) = M_f(\omega)$   
 $\varphi_f(-\omega) = -\varphi_f(\omega)$

Il diagramma di Bode di  $F(s)$  è il grafico di  $M_f(\omega)$  e di  $\varphi_f(\omega)$  per  $\omega$  positivo.

In ascissa la pulsazione è riportata su scala logaritmica, pertanto le ascisse ~~sono~~ <sup>corrispondenti</sup>  $\omega_0, 10\omega_0, 100\omega_0, \dots$  sono equidistanti, e la distanza tra una  $\omega_0$  e  $10\omega_0$  è detta decade.

Il modulo viene riportato in dB (decibel), cioè

$$|M_f(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(M_f(\omega))$$

mentre la fase è riportata in gradi o radianti.

Per tracciare il diagramma di Bode di una  $F(s)$  questa va posta nella seguente forma:

$$F(s) = K \frac{(1 \pm \tau_{n1}s)(1 \pm \tau_{n2}s) \dots}{s^v (1 \pm \tau_{d1}s)(1 \pm \tau_{d2}s) \dots}$$

Coeff. di guadagno

**IMPORTANTISSIMO!!!**

Esempio:

$$\frac{s+2}{(s+4)(s+3)}$$

va posto come

$$= \frac{1}{6} \frac{2}{(1+s/2)} \frac{4 \cdot 3}{(1+s/4)(1+s/3)}$$

Se c'è un termine quadratico con radici complesse

(2)

$$s^2 + as + b$$

con  $a^2 - 4b < 0$  (radici complesse), viene posto nella forma

$$b \left( 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)$$

$\omega_n$  = pulsazione naturale

$\zeta$  = coefficiente smorzamento

in cui  $b = \omega_n^2$  (N.B.  $b > 0$  perché  $a^2 - 4b < 0$ )

$$a = 2\zeta\omega_n$$

(noti  $a$  e  $b$  è immediato calcolare  $\zeta$  e  $\omega_n$ )

Le radici (complesse) sono allora espresse nel seguente modo:

$$s_{1,2} = \left( -\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2} \right) \omega_n$$

dove  $\zeta^2 < 1$  affinché siano effettivamente complesse, con  $\zeta > 0 \rightarrow$

radici a parte reale ~~negativa~~ negativa,  $\zeta < 0 \rightarrow$  a p. reale positiva.

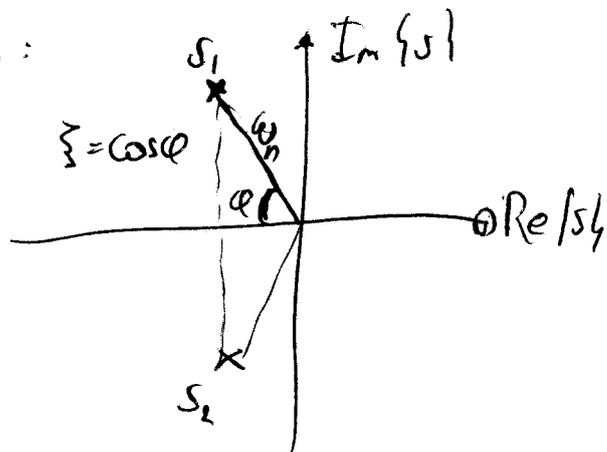
Significato geometrico di  $\zeta$  e  $\omega_n$ :

$s_1$  e  $s_2$  radici di

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$(s_2 = s_1^*)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_n &= |s_1| = |s_2| \\ \zeta &= \cos\varphi \end{aligned}}$$



Quindi:  $\omega_n > 0$ ,  $-1 < \zeta < 1$



Tracciato il diagramma di Bode, è possibile tracciare il diagramma polare, che è il percorso di  $F(j\omega)$  nel piano complesso quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Essendo  $F(-j\omega) = (F(j\omega))^*$ , una volta tracciato il diagramma polare per  $\omega \in (0, +\infty)$ , quello per  $\omega \in (-\infty, 0)$  è simmetrico al precedente rispetto all'asse reale.

Nel diagramma polare le scale degli assi non sono lineari (cioè non è logaritmica). Avendo scelto per i diagrammi di Bode i dB per i moduli, si ha che il diagramma di Bode (sia dei moduli e sia delle fasi) del prodotto di due funzioni è la SOMMA di diagrammi di Bode delle singole funzioni. ~~Cioè~~ Sia

cioè 
$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

quindi 
$$F(j\omega) = F_1(j\omega) F_2(j\omega)$$

con  $F_1(j\omega) = M_1(\omega) e^{j\phi_1(\omega)}$

$F_2(j\omega) = M_2(\omega) e^{j\phi_2(\omega)}$

Allora  $F(j\omega) = M_F(\omega) e^{j\phi_F(\omega)}$

con  $M_F(\omega) = M_1(\omega) \cdot M_2(\omega)$

$\phi_F(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$

e  $M_F(\omega) |_{dB} = |M_1(\omega)|_{dB} + |M_2(\omega)|_{dB}$

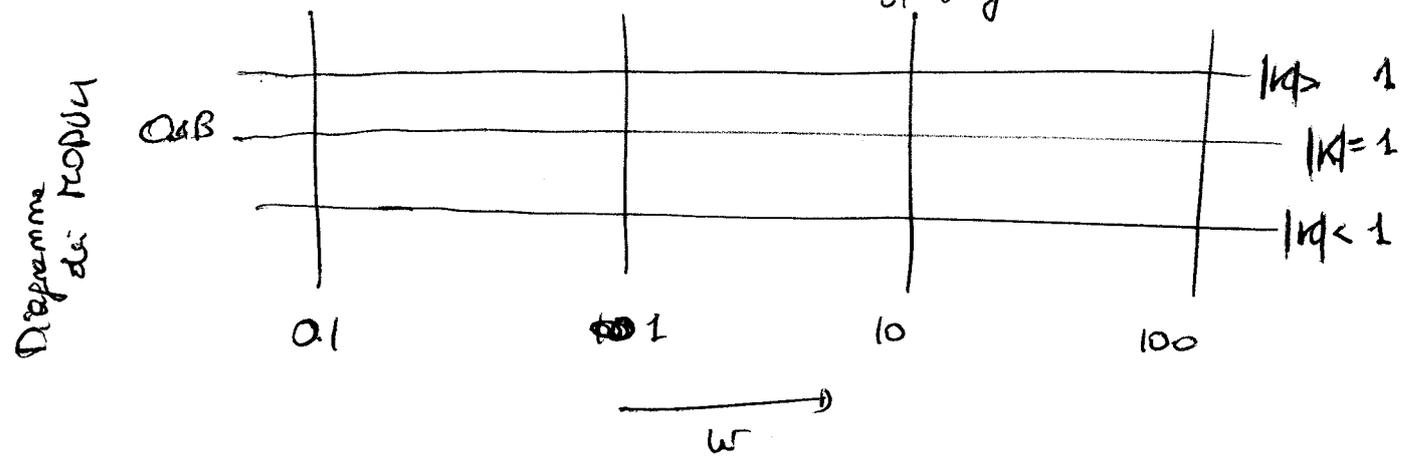
Considerando il diagramma di Bode di  $F_1(s)$  e di  $F_2(s)$  è immediato trovare il Diagramma analogo per  $F(s) = F_1(s)/F_2(s)$ .

Diagrammi di Bode e poli di alcune funzioni

•  $F(s) = K \rightarrow F(j\omega) = K$

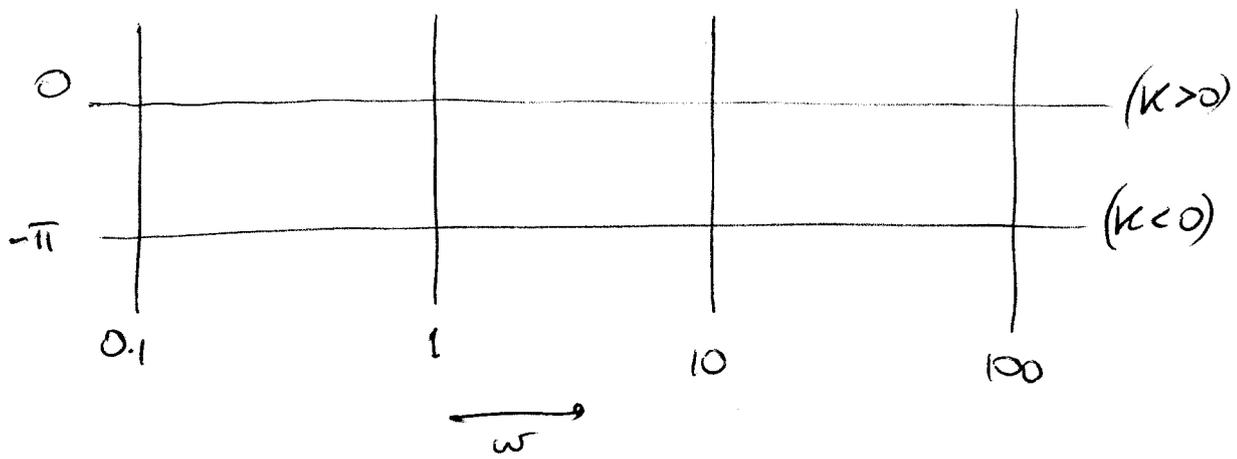
$M_F(\omega) = |K|$

$\phi_F(\omega) = \begin{cases} 0 & K > 0 \\ -\pi & K < 0 \end{cases}$  (o anche  $+\pi$ , ma per convenzione si sceglie  $-\pi$ )

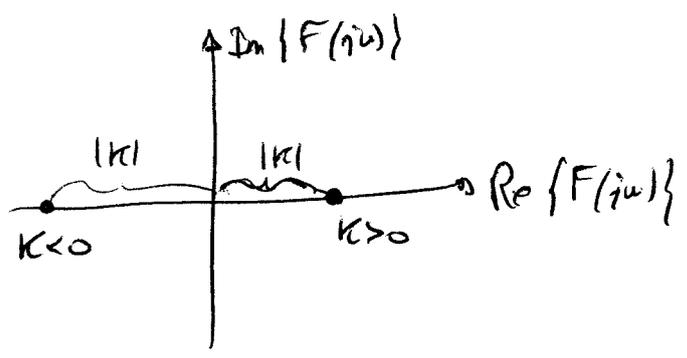


4

Diagramma delle FASI



Il diagramma POLARE di  $F(s) = K$  è invece:



•  $F(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$

$$|F(\omega)| = \left( \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \right)^{1/2}$$

$$\phi_F(\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

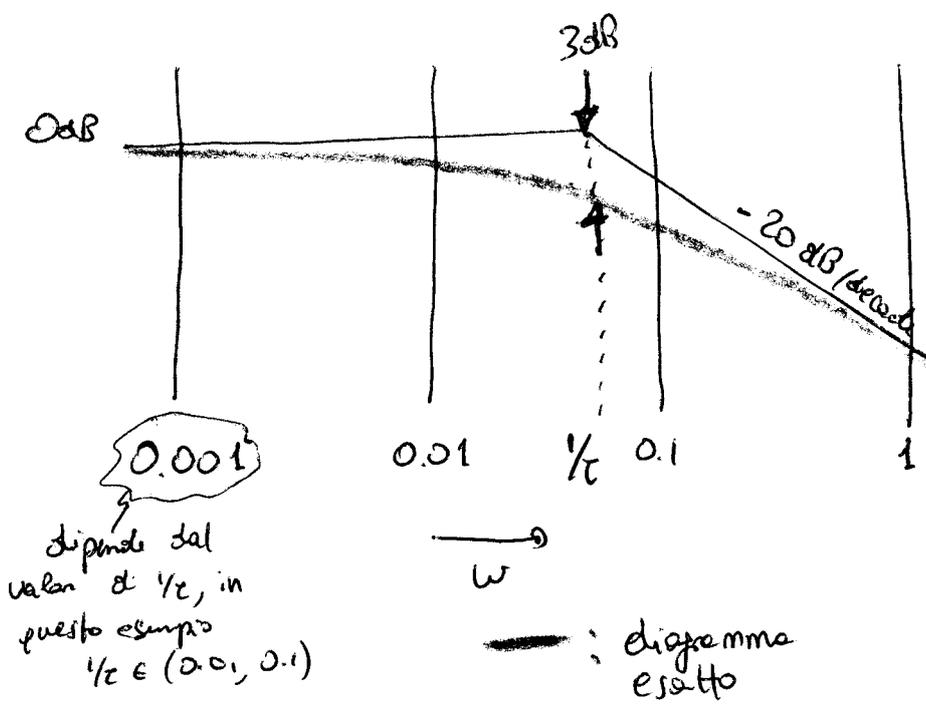
Diagramma approssimato ( $\hat{=}$  asintotico):

$\rightarrow \omega \ll 1/\tau$  :  $|F(\omega)| \approx 1 \rightarrow |F(\omega)|_{dB} \approx 0 \text{ dB}$   
 $\phi_F(\omega) \approx 0^\circ$

$\rightarrow \omega \gg 1/\tau$  :  $|F(\omega)| \approx \frac{1}{\omega\tau} \rightarrow |F(\omega)|_{dB} \approx -20 \log_{10}(\omega\tau)$   
 $\phi_F(\omega) \approx -\pi/2$

Il diagramma di Bode asintotico viene convenzionalmente definito come segue. Per vederne una buona approssimazione del diagramma esatto, si prenda in preavviso.

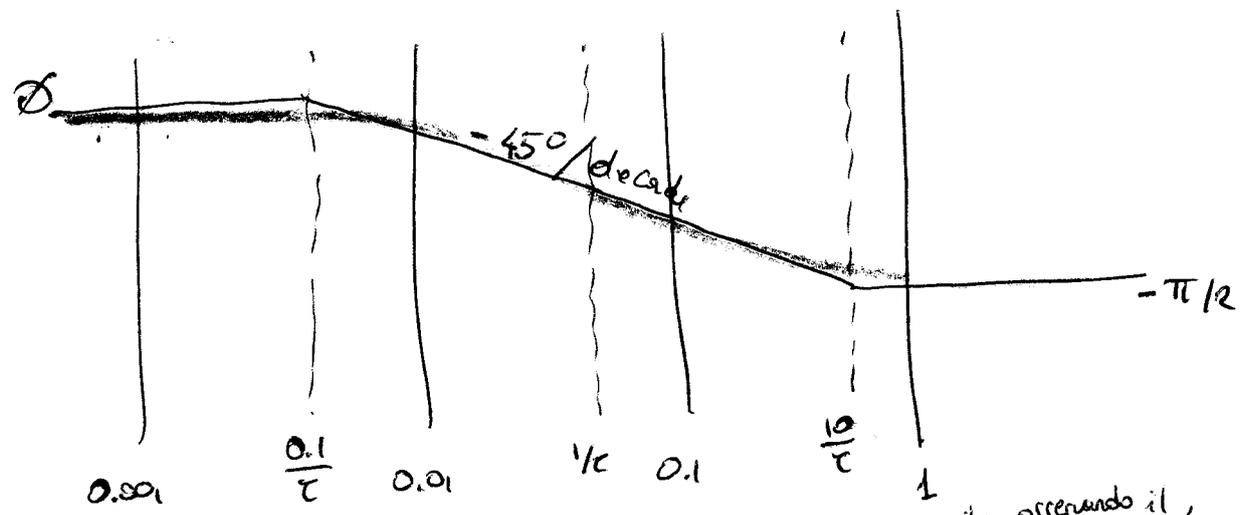
Diagramma di Modul.



in ogni decade  
il diagramma  
scende di  
20 dB  
⇒ per  $\omega = \frac{10}{r}$   
 $1 \text{ decade} = -20 \text{ dB}$

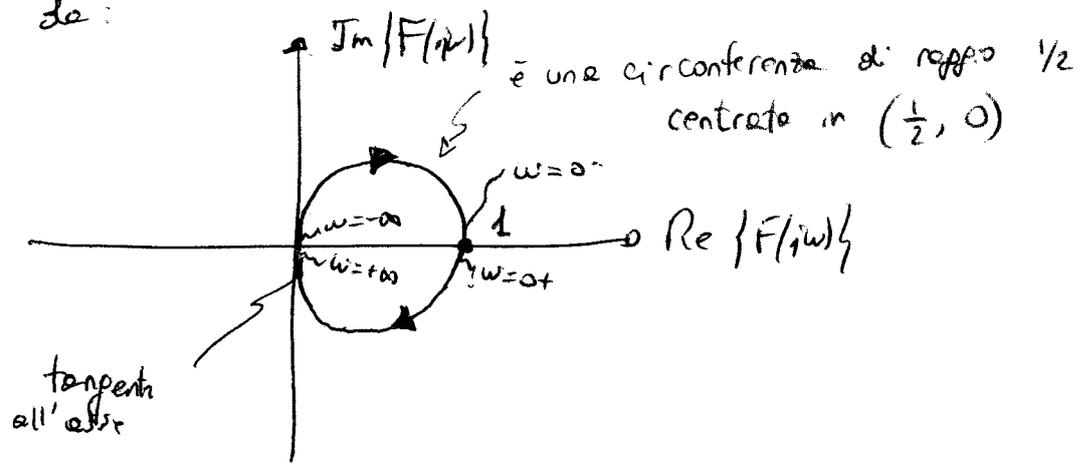
dipende dal  
valore di  $1/r$ , in  
questo esempio  
 $1/r \in (0.01, 0.1)$

Diagramma  
della FASI



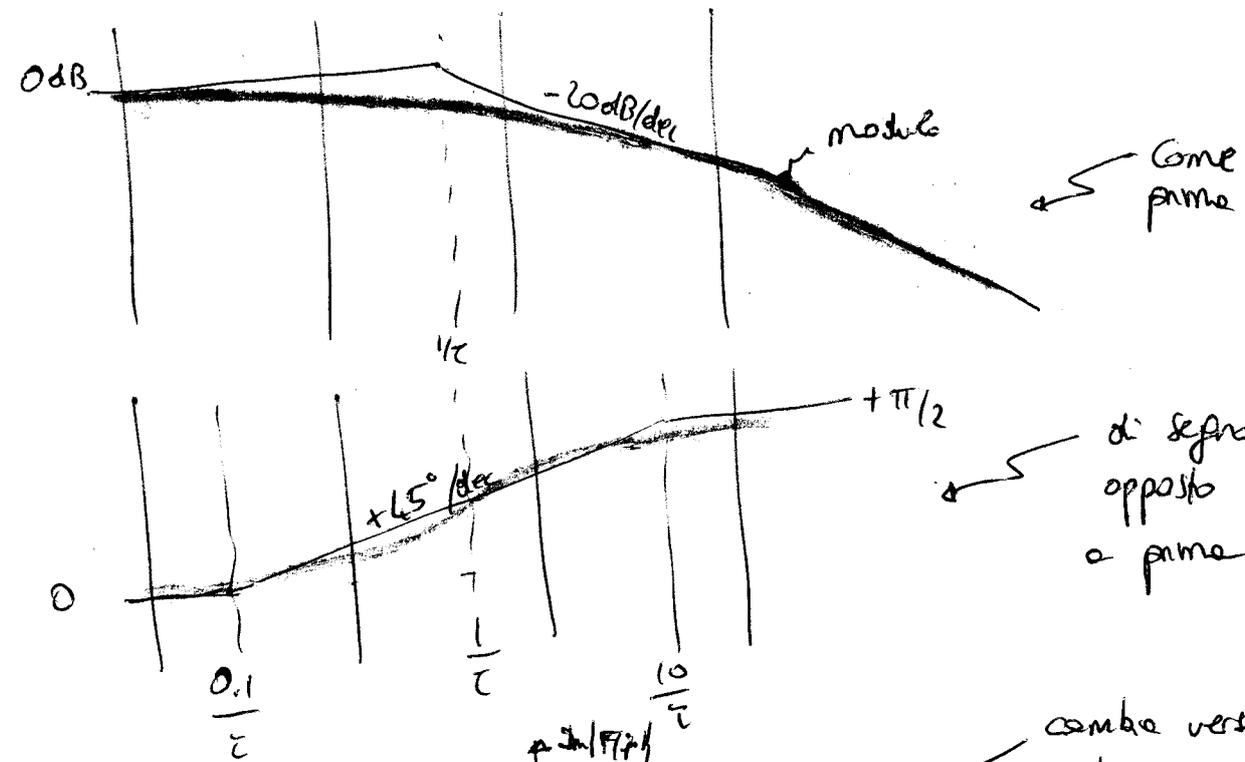
Il diagramma polare di  $F(s) = \frac{1}{1+s^2}$  può essere costruito osservando il diagramma di

Bode; è dato da:

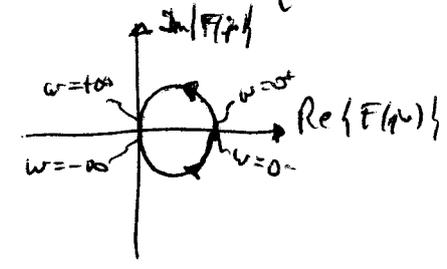


- Se avessi avuto  $\frac{1}{1-s^2}$ , poiché il modulo non cambia mentre la fase cambia segno, i diagrammi di Bode sarebbero stati:

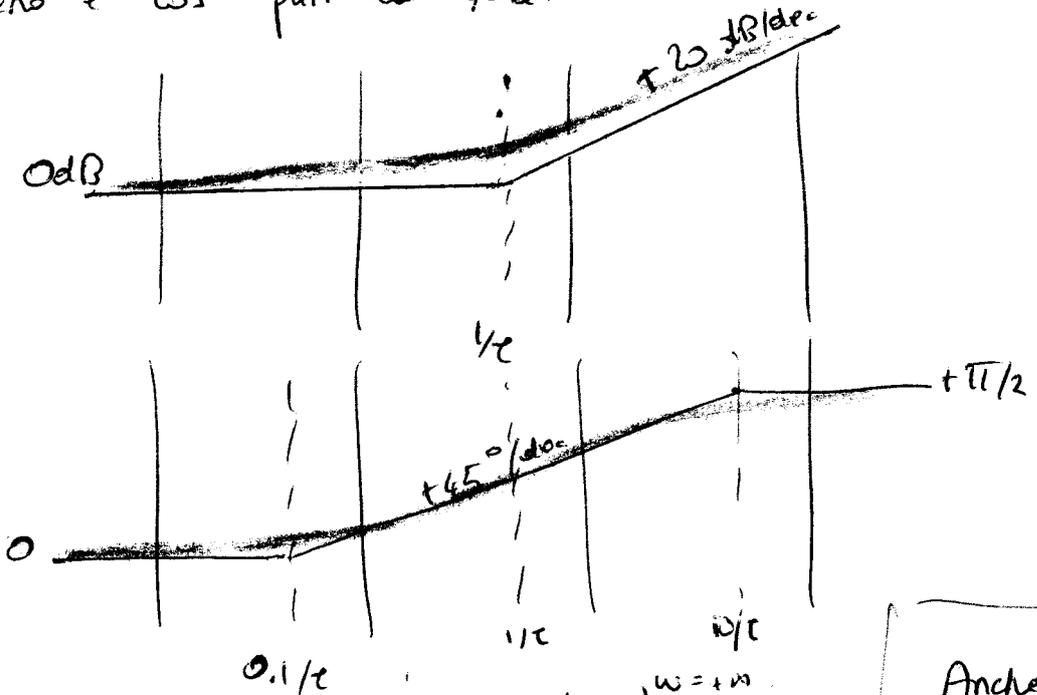
6



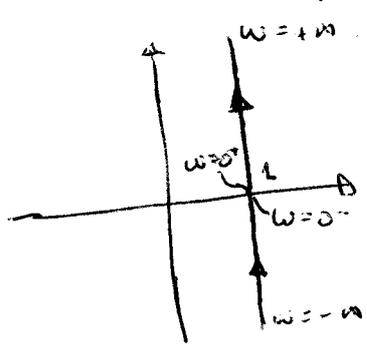
e quello polare:



- Analogamente, se  $F(s) = 1 + s\tau$ , il modulo in dB cambia segno e così pure la fase:



e il diagramma polare



Anche qui, cambiando segno, cioè considerando  $1 - s\tau$ , si sarebbe invertita la fase ma non il modulo: