

# Tracciamento diagrammi di Bode e polari (segue)

•  $F(s) = \frac{1}{s} \rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$$\frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\omega e^{j\pi/2}} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$M_f(\omega) = \frac{1}{\omega}$       Per  $\omega=1$ ,  $M_f(\omega) = 1 = 0 \text{ dB}$

$\phi_f(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

Diagramma  
moduli

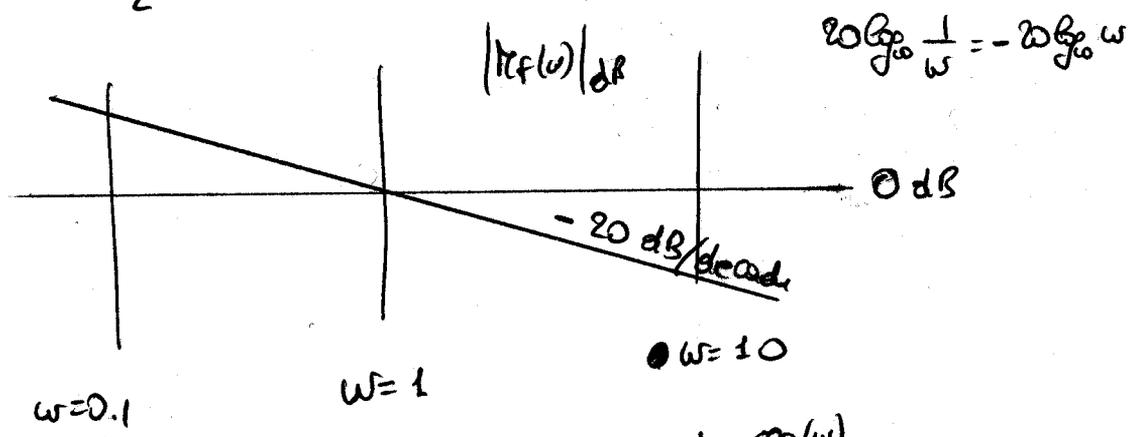
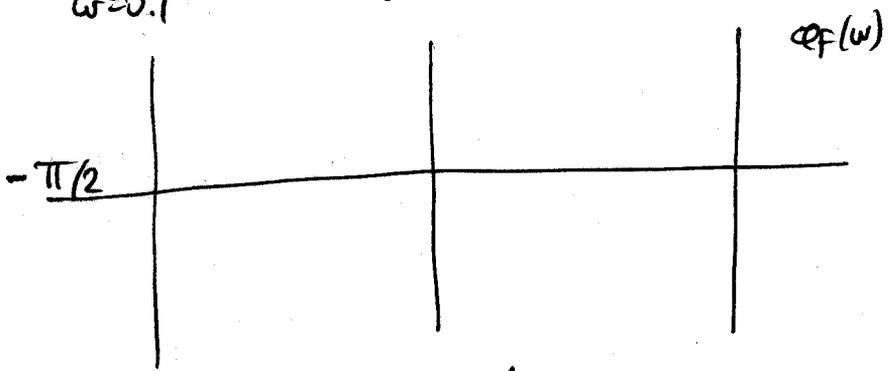
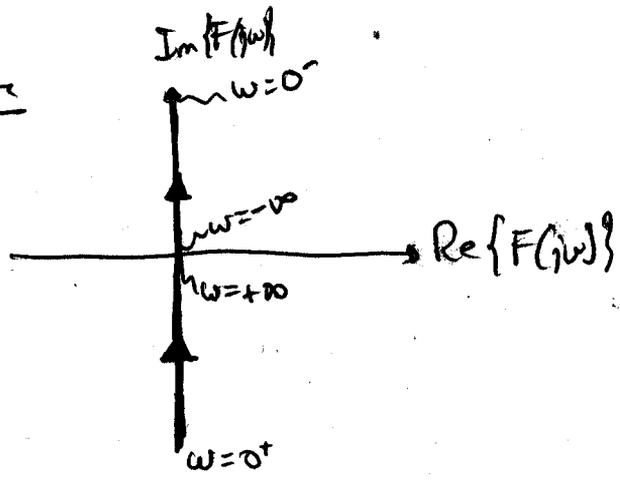


Diagramma  
fasi



in questo caso il diagramma è esatto (non ci sono correzioni da apportare)

## Diagramma polare



Per applicare il criterio di Nyquist che vedremo in seguito, il diagramma precedente deve essere completato con la chiusura all'infinito -

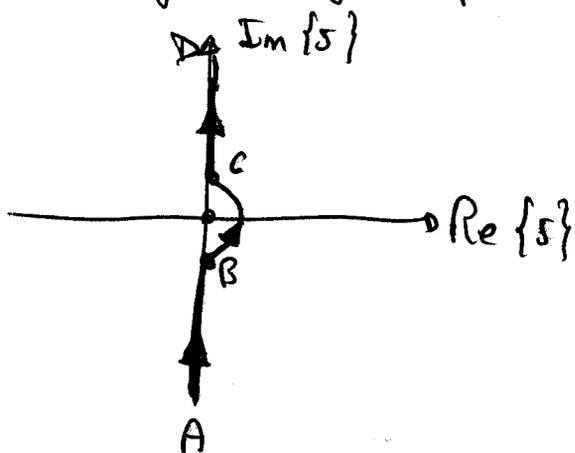
Infatti, per  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $F(s) = \frac{1}{s} |_{s=j\omega}$  tende all' $\infty$  (c'è un punto di singolarità in  $s=0$ )

La chiusura all' $\infty$  viene definita nel seguente modo.

(2)

Per definizione il diagramma polare di  $F(s)$  è il percorso di  $F(s)$  nel piano complesso quando  $s$  percorre l'asse immaginario, con  $s = j\omega$ ,  $\omega \in (-\infty, \infty)$ .

La chiusura all' $\infty$  si ottiene come procedimento al limite di un percorso di  $F(s)$  ottenuto facendo variare  $s$  su un cammino leggermente diverso. Anziché far muovere  $s$  lungo l'asse immaginario, lo facciamo variare lungo il seguente percorso:



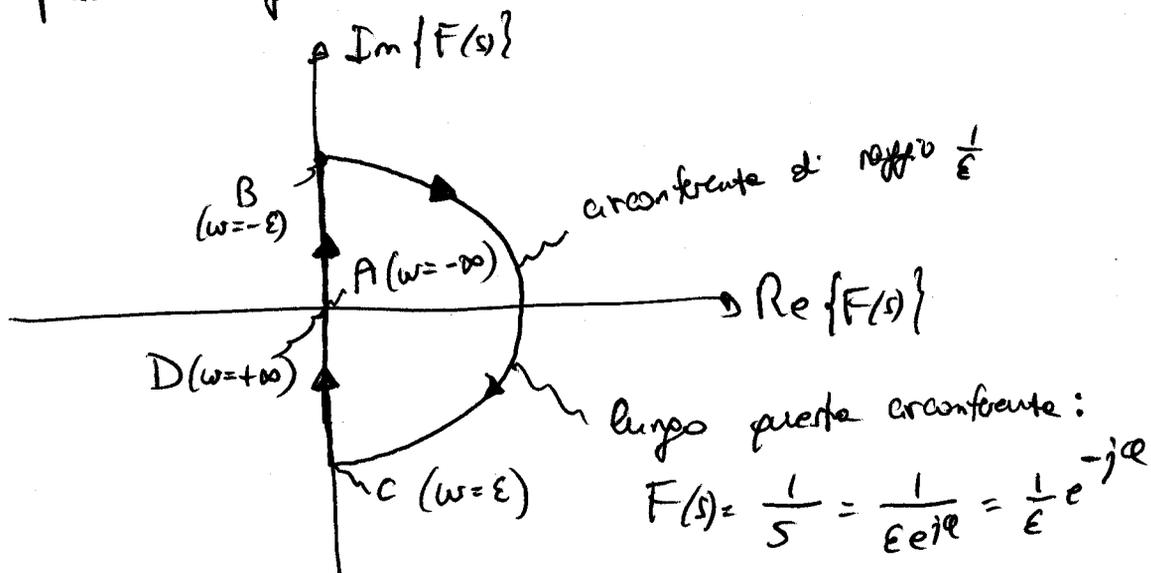
In questo modo lo  $\phi$  (che è un punto di singolarità per  $F(s) = \frac{1}{s}$ ) viene evitato.

Nel tratto (A,B),  $s = j\omega$ , con  $\omega \in (-\infty, -\epsilon)$

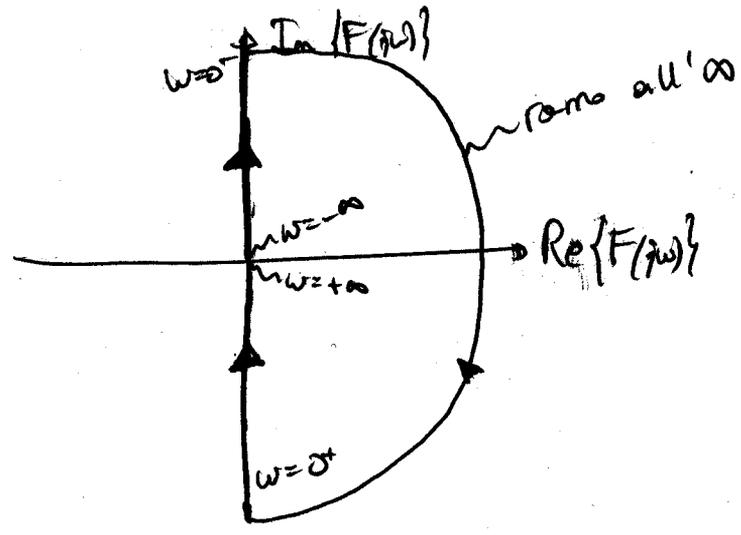
Nel tratto (B,C),  $s = \epsilon e^{j\phi}$ , con  $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $\epsilon$  piccolo

Nel tratto (C,D),  $s = j\omega$ , con  $\omega \in (\epsilon, +\infty)$

Se  $s$  varia come indicato sopra,  $F(s) = \frac{1}{s}$  percorre nel piano complesso il seguente cammino:



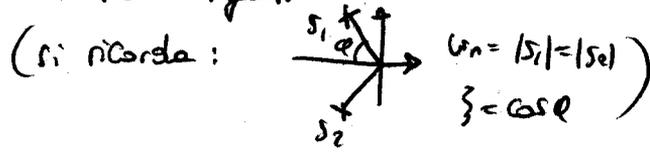
Facendo il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$ , otteniamo il diagramma polare di  $F(s) = \frac{1}{s}$  con la chiusura all'  $\infty$ :



•  $F(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

con  $\zeta \in (0, 1)$

$\Rightarrow$  radici complesse e parti reali negative



$s = j\omega$

~~•~~  $F(j\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}$

N.B.  $\zeta = 0 \rightarrow$  radici  $\sqrt{\phantom{x}}$  e parte reale nulla  
 $\zeta \in (-1, 0) \rightarrow$  radici a parti reali positive (complesse)  
 $(|\zeta| > 1 \rightarrow$  radici reali)

$M_f(\omega) = \frac{1}{\left(\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{1/2}}$

$\varphi_f(\omega) = -\arctan\left[\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right]$

•  $\omega \ll \omega_n \Rightarrow M_f(\omega) \approx 1 = 0 \text{ dB}$

$\varphi_f(\omega) \approx 0$

•  $\omega \gg \omega_n \Rightarrow M_f(\omega) \approx \frac{1}{(\omega/\omega_n)^2} \rightarrow 20 \log_{10} \left(\frac{1}{(\omega/\omega_n)^2}\right) = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

$\varphi_f(\omega) \approx -\pi \text{ rad}$

N.B. Per  $\omega = \omega_n^-$   $\varphi_f(\omega) = -\pi/2$  (l'argomento dell'arctg tende a  $+\infty$ )  
 A  $\omega = \omega_n$  l'argomento dell'arctg cambia di segno.

Diagrammi di Bode asintotici e in prosotto, approssimati

diagramma moduli

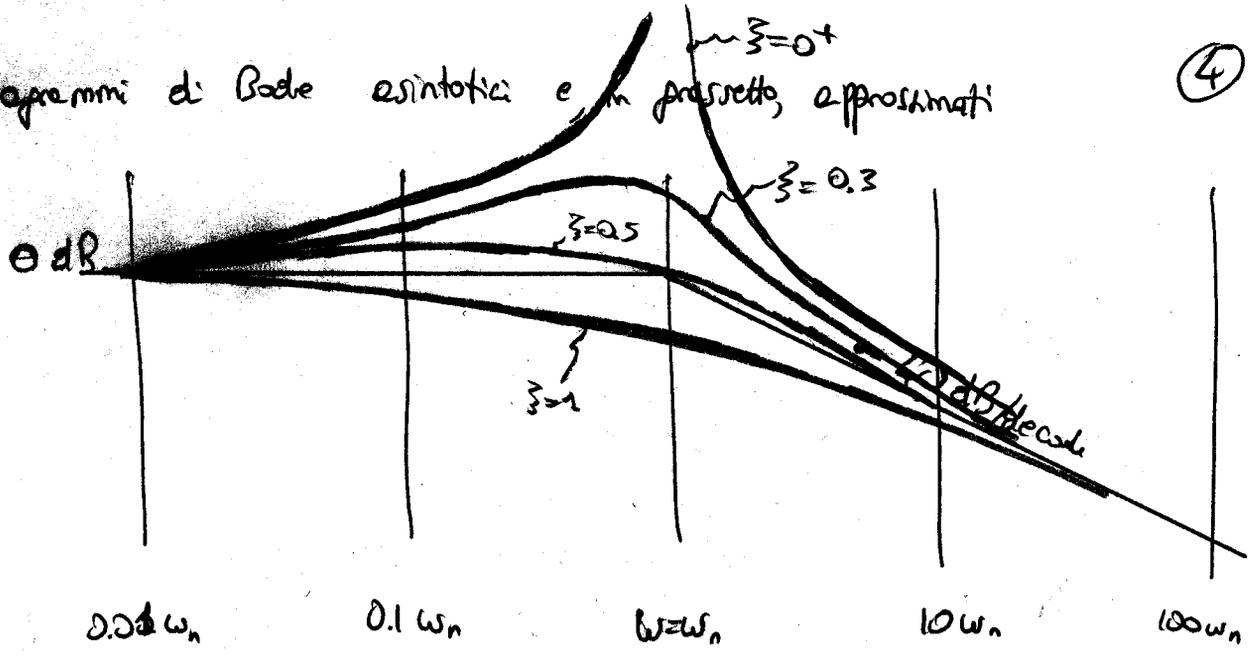
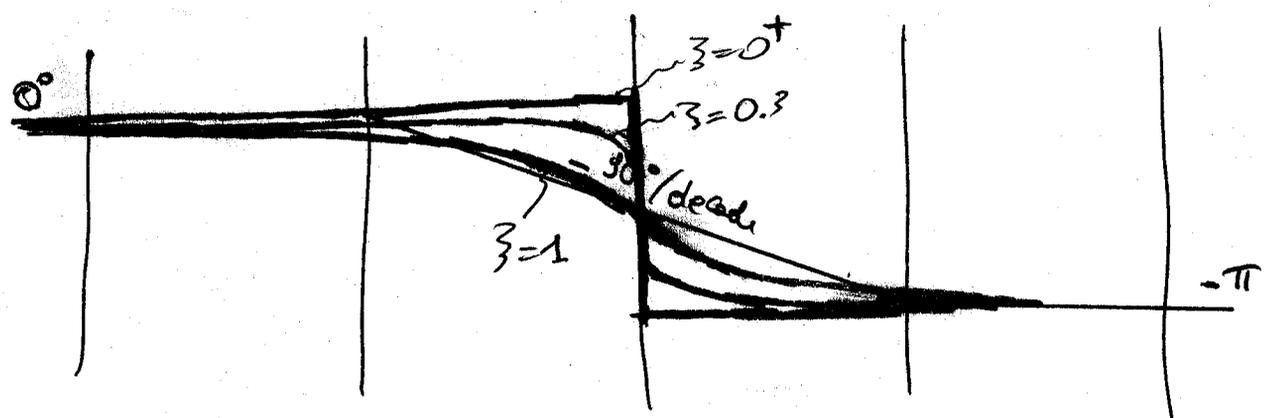


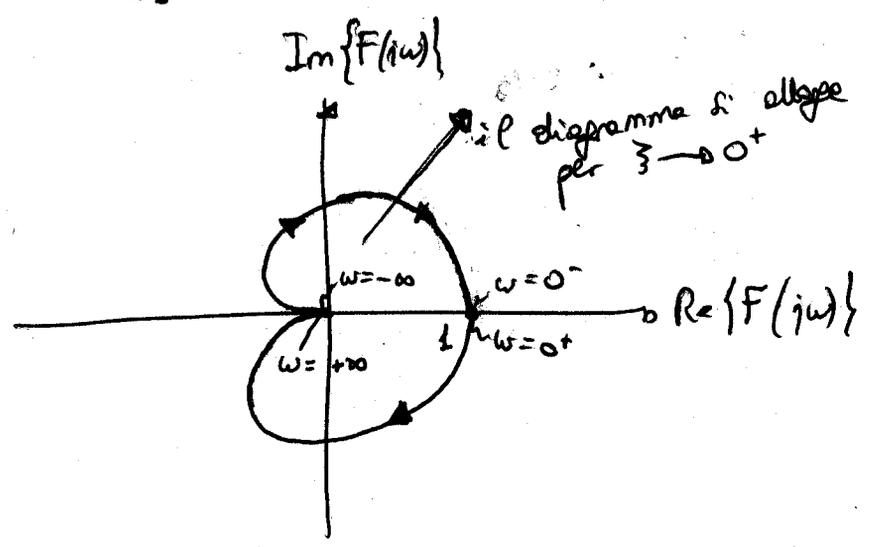
diagramma fasi



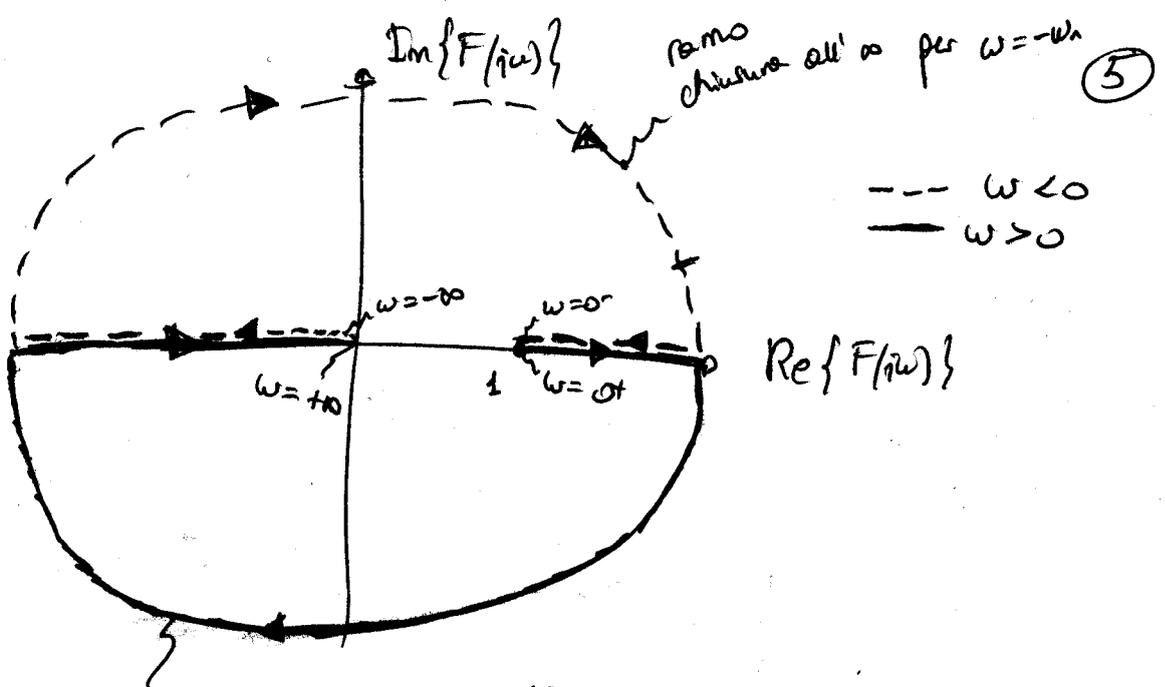
La correzione dipende da  $\zeta$ : per  $\zeta=0^+$ , il diagramma dei moduli va all'infinito per  $\omega=\omega_n$  e quello delle fasi ha una discontinuità di  $180^\circ$  per  $\omega=\omega_n$ . Le correzioni sono riportate nel ~~link~~ link successivo e quello di questo documento. in modo più dettagliato

Diagramma polare

$\zeta > 0$  ( $|\zeta| < 1$  sempre)

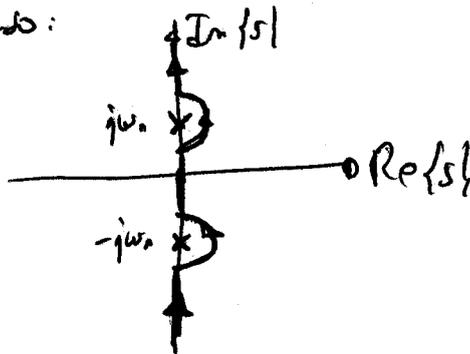


$$\zeta = 0^+$$



ramo chiusura all'infinito per  $w = w_n$

I rami di chiusura all'infinito sono ottenuti con lo stesso ragionamento del caso  $F(s) = \frac{1}{s}$ . Infatti, per  $\zeta = 0^+$ , abbiamo due radici a parti reali nulle, cioè  $1 + \frac{2\zeta}{w_n} s + \frac{s^2}{w_n^2}$  per  $\zeta = 0^+$  ha due radici a parti reali nulle, rispettivamente  $s = \pm jw_n$ . Un percorso di  $s$  è in questo caso:



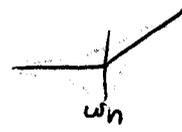
Se  $\zeta < 0$ , il diagramma dei moduli è come per  $\zeta > 0$  mentre quello delle fasi ha segno opposto rispetto a quello di  $\zeta > 0$ .  
 Il diagramma polare ha stessa forma ma verso opposto.

Se  $F(s) = 1 + \frac{2\zeta}{w_n} s + \frac{s^2}{w_n^2}$  (cioè a numeratore uguale a denominatore):

- il diagramma di moduli è opposto al caso precedente:

- il diagramma delle fasi:  $\pi$  ( $\zeta > 0$ )

$-\pi$  ( $\zeta < 0$ )



Diagrammi a simmetria

- il diagramma polare cambia sostanzialmente

# Criterio di Nyquist

Si consideri lo schema in controreazione riportato in Fig. 1, dove  $P(s)$  può essere vista come la funzione di trasferimento di un processo da controllare,  $C(s)$  come un blocco di controllo (da progettare) e  $h_0$  come la costante di guadagno di un sensore, che misura l'uscita  $y(t)$  del processo e la confronta con un segnale di riferimento  $r(t)$ , la cui trasformata  $R(s)$  è indicata in figura. Il criterio di Nyquist si applica comunque a qualsiasi sistema in controreazione (cioè a prescindere dal significato associato ai blocchi indicati in figura).

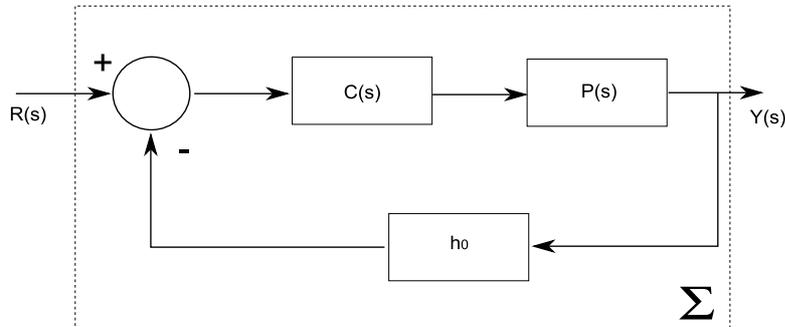


Figure 1: Sistema in controreazione

Si definiscano:

- $G(s) := P(s)C(s)$  (guadagno della catena diretta);
- $F(s) := h_0P(s)C(s)$  (guadagno d'anello o a catena aperta);
- si scriva  $F(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}$  e sia  $n$  il grado di  $D_F(s)$ ;
- $W(s) := \frac{P(s)C(s)}{1+h_0P(s)C(s)}$  (funzione di trasferimento in catena chiusa, cioè del sistema complessivo  $\Sigma$ ).

Si facciano inoltre le seguenti (usuali in questo corso) ipotesi:

- i blocchi  $C(s)$  e  $P(s)$  rappresentano completamente i rispettivi sistemi (qualora non li rappresentassero supporremo che le parti non raggiungibili e/o non osservabili contenute in essi non diano problemi, cioè siano asintoticamente stabili) e non ci sono cancellazioni tra di essi;
- la funzione  $G(s)$  (o, equivalentemente,  $F(s)$ ) è strettamente propria. Qualora  $G(s)$  fosse solo propria occorre che sia soddisfatta la condizione detta di *buona connessione*, cioè che  $1 + h_0 \cdot D \neq 0$  (dove  $D$  è la matrice  $1 \times 1$  del legame diretto ingresso-uscita del sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$ ). Se  $G(s)$  è strettamente propria, questo significa che  $D = 0$ , per cui la controreazione è sicuramente ben connessa. La condizione di buona connessione implica che il denominatore di  $W(s)$  ha lo stesso grado  $n$  del denominatore di  $F(s)$ .

Il criterio di Nyquist permette di valutare la stabilità asintotica del sistema complessivo  $\Sigma$  sulla base della conoscenza della sola funzione di trasferimento  $F(s)$ .

**Theorem 1** *Si consideri lo schema in controreazione di Fig. 1 con le notazioni e ipotesi appena elencate. Sia inoltre  $P_p$  il numero di poli con parte reale strettamente positiva di  $F(s)$ . Allora il sistema complessivo  $\Sigma$  è asintoticamente stabile se e solo se valgono entrambe le seguenti due condizioni:*

1. il diagramma polare di  $F(s)$  non passa per il punto  $-1$ ;

2. indicando con  $N$  il numero di giri antiorari che il diagramma polare di  $F(s)$  fa attorno al punto  $-1$ , si ha  $N = P_p$ .

Tale criterio, che può essere utilizzato per valutare la stabilità di un sistema in retroazione, costituisce la base della sintesi del controllore  $C(s)$ : se il sistema  $\Sigma$  infatti risulta instabile, l'idea è quella di modificare (con una  $C(s)$  opportuna) il percorso del diagramma polare di  $F(s)$  in modo da soddisfare le condizioni del teorema e da ottenere la stabilità asintotica del sistema complessivo.

**Dimostrazione del criterio di Nyquist.** Innanzitutto osserviamo che poiché  $C(s)$  e  $P(s)$  rappresentano completamente i rispettivi sistemi e non ci sono cancellazioni tra di loro, anche  $F(s)$  rappresenta tutto il sistema in catena aperta. Siccome poi la controreazione istantanea non altera le proprietà di raggiungibilità e osservabilità (come dimostrato in precedenza), il sistema  $\Sigma$  sarà anch'esso rappresentato completamente dalla sua funzione di trasferimento  $W(s)$ . Quindi  $\Sigma$  è asintoticamente stabile se e solo se i poli di  $W(s)$  sono tutti a parte reale strettamente negativa.

Notiamo che

$$W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + h_0 P(s)C(s)} = \frac{1}{h_0} \frac{F(s)}{1 + F(s)} = \frac{\frac{1}{h_0} N_F(s)}{D_F(s) + N_F(s)} \quad (1)$$

per cui il denominatore  $D_W(s)$  di  $W(s)$  è  $D_F(s) + N_F(s)$ , ed è questo polinomio che deve avere tutte le radici con parte reale negativa per avere la stabilità asintotica di  $\Sigma$ . Inoltre si nota, come anticipato sopra in virtù della condizione di buona connessione, che anche questo polinomio ha grado  $n$ .

Ora, la condizione 1. del teorema esclude che  $W(s)$  abbia poli con parte reale nulla<sup>1</sup>: se infatti il diagramma polare di  $F(s)$  passasse per il punto  $-1$ , ciò vorrebbe dire che esiste un certo  $\bar{\omega}$  tale che  $F(j\bar{\omega}) = -1$ , cioè tale che  $N_F(j\bar{\omega}) + D_F(j\bar{\omega}) = 0$ . Ma questo, in base a (1), significherebbe che  $j\bar{\omega}$  (che ha parte reale nulla) è polo di  $W(s)$ .

Quindi, sotto la condizione 1. del teorema, la  $W(s)$  può avere solo poli con parte reale diversa da 0. Se definiamo con  $Z_p$  il numero di poli con parte reale strettamente positiva di  $W(s)$ , la  $W(s)$  avrà allora  $n - Z_p$  poli (cioè tutti gli altri) con parte reale strettamente negativa. Occorre dimostrare che la condizione 2. del teorema implica che  $Z_p = 0$  e la prova è terminata.

Per fare ciò si premette il seguente risultato. Si consideri un polinomio

$$q(s) = q_0 + q_1 s + \dots + q_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

di grado  $n$  e sia  $N_q$  il numero di radici con parte reale strettamente positiva di  $q(s)$ . Scomponendo in fattori il polinomio si ha:

$$q(s) = (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)$$

dove  $z_i$  sono le  $n$  radici (alcune coincidenti tra loro, alcune complesse e coniugate) di  $q(s)$ . Ponendo  $s = j\omega$ ,  $q(j\omega)$  è un numero complesso la cui fase  $\phi_q(\omega)$  cambia al variare di  $\omega$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Mostriamo ora che la variazione complessiva di fase  $\Delta\Phi_q$  di  $q(j\omega)$  che si ottiene quando  $\omega$  varia in  $(-\infty, +\infty)$  è data da:

$$\Delta\Phi_q = (n - 2N_q)\pi \quad (2)$$

Questo si può vedere nel seguente modo. Si consideri la variazione di fase  $\Delta\Phi_i$  del termine  $s - z_i$  quando si ponga  $s = j\omega$  e  $\omega$  vari in  $(-\infty, +\infty)$ . Con riferimento alla Fig. 2, si nota come tale variazione vale  $+\pi$  se  $z_i$  ha parte reale negativa e  $-\pi$  se ha parte reale positiva. Ora, se  $z_i$  ha parte reale nulla, vedremo tra un attimo che questo, per come abbiamo scelto di fare le chiusure all'infinito (lasciando i poli a sinistra), va considerato come uno zero con parte reale negativa. Quindi, complessivamente:

$$\Delta\Phi_i = \begin{cases} +\pi & \text{Re}\{z_i\} \leq 0 \\ -\pi & \text{Re}\{z_i\} > 0 \end{cases}$$

<sup>1</sup>Notare che questo va effettivamente escluso perché solo poli con parte reale negativa sono ammessi per  $W(s)$  se si vuole la stabilità asintotica di  $\Sigma$

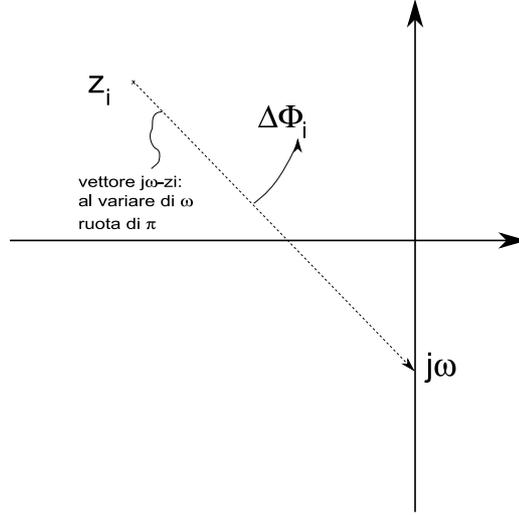


Figure 2: La variazione di fase  $\Delta\Phi_i$

Poiché la fase del prodotto è pari alla somma delle fasi, combinando gli effetti di tutti gli zeri  $z_i$ , si ottiene  $\Delta\Phi_q = (n - N_q)\pi + N_q(-\pi)$ , che è effettivamente la variazione di fase riportata nella (2). Si consideri ora la funzione

$$1 + F(s) = \frac{D_F(s) + N_F(s)}{D_F(s)}$$

che ha a numeratore il denominatore di  $W(s)$  e a denominatore il denominatore di  $F(s)$ . Ponendo  $s = j\omega$  e facendo variare  $\omega$  in  $(-\infty, +\infty)$ , la variazione di fase di tale funzione si ricava nel seguente modo:

$$\Delta\Phi_{1+F} = \Delta\Phi_{D_F+N_F} - \Delta\Phi_{D_F} \quad (3)$$

che discende dal fatto che la fase del rapporto è pari alla differenza delle fasi. Ora,  $D_F + N_F$  e  $D_F$  sono entrambi polinomi di grado  $n$ . Il primo non ha radici con parte reale nulla ed ha  $Z_p$  radici con parte reale positiva. In base a (2) si ha:

$$\Delta\Phi_{D_F+N_F} = (n - 2Z_p)\pi \quad (4)$$

Analogamente  $D_F$  ha grado  $n$  e  $P_p$  radici con parte reale strettamente positiva. Può avere radici con parte reale nulla ma, per quanto diremo sotto, le possiamo considerare come quelle con parte reale negativa. Si ha quindi, sempre usando la (2):

$$\Delta\Phi_{D_F} = (n - 2P_p)\pi \quad (5)$$

Mettendo insieme (3)-(5) si ottiene:

$$\Delta\Phi_{1+F} = (P_p - Z_p) \cdot 2\pi$$

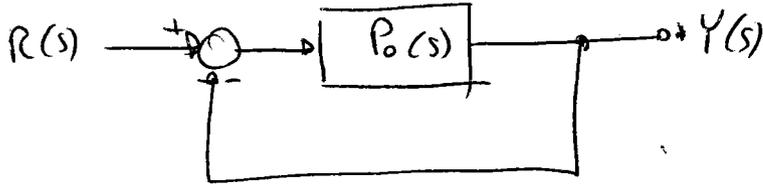
ossia il diagramma polare di  $1+F(s)$  fa  $P_p - Z_p$  giri antiorari attorno allo 0, cioè ancora, **il diagramma polare di  $F(s)$  fa  $P_p - Z_p$  giri antiorari attorno al punto  $-1$** . Osserviamo a tal proposito che siccome quando tracciamo i diagrammi polari i poli con parte reale nulla li lasciamo alla sinistra, essi contribuiranno alla variazione di fase come quelli con parte reale negativa, e ciò giustifica il fatto che li abbiamo considerati tali nel calcolo della (5).

Ora, la stabilità asintotica di  $\Sigma$  equivale al fatto che, come detto, la  $W(s)$  abbia solo poli con parte reale negativa, cioè, grazie a (1) che esclude poli con parte reale nulla, che non ci siano poli con parte reale positiva, cioè che  $Z_p = 0$ . Pertanto,  $\Sigma$  è asintoticamente stabile se  $\Delta\Phi_{1+F} = P_p \cdot 2\pi$ , cioè se il diagramma polare di  $F(s)$  fa  $P_p$  giri attorno al punto  $-1$ , che è proprio la condizione 2. del teorema.  $\square$

## ESEMPIO

$$P_0(s) = \frac{50(s+1)}{(s+10)(s^2+1)}$$

- ▶ Tracciare i diagrammi di Bode e il diagramma polare
- ▶ Valutare la stabilità asintotica del sistema:



mediante Nyquist e confrontare il risultato con quello ottenuto con il criterio di Routh.

## Soluzione

Innanzitutto  $P_0(s)$  va posta nella forma seguente:

$$\begin{aligned} P_0(s) &= \frac{50(1+s)}{10(1+s/10)(1+s^2)} = \frac{5(1+s)}{(1+0.1s)(1+s^2)} \\ &= \frac{5(1+\tau_n s)}{(1+\tau_d s)\left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)} \end{aligned}$$

dove:  $\tau_n = 1 \Rightarrow 1/\tau_n = 1$

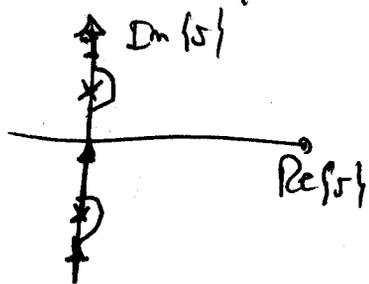
$\tau_d = 0.1 \Rightarrow 1/\tau_d = 10$

$\zeta = 0$  (da intendersi come  $0^+$ )

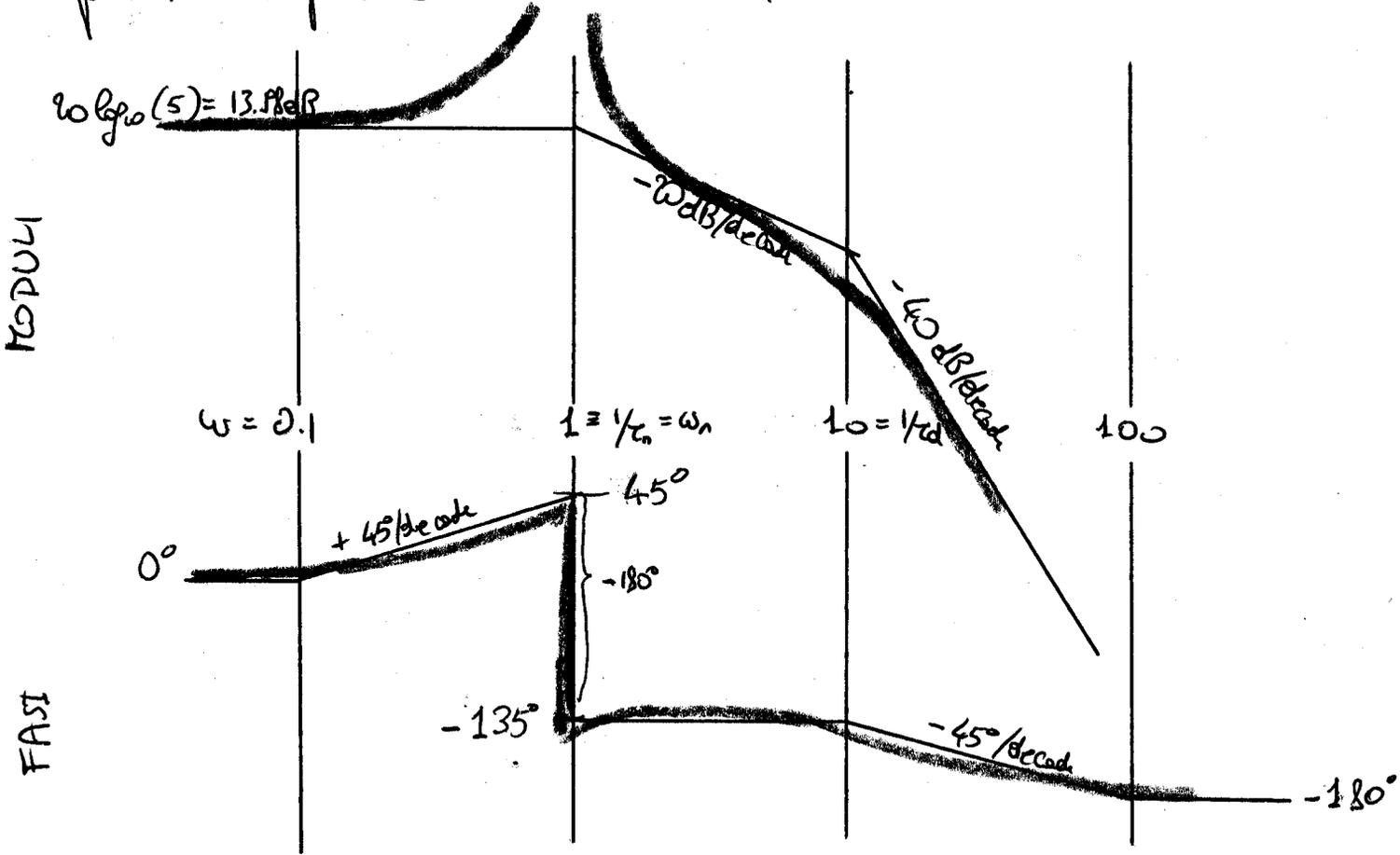
$\omega_n = 1$

N.B. I valori  $1/\tau_d$ ,  $1/\tau_n$ ,  $\omega_n$  vengono detti punti di rottura del diagramma di Bode.

Osservazione Il motivo per cui  $\zeta = 0$  è da intendersi come  $\zeta = 0^+$ , è lo stesso per cui nel criterio di Nyquist  $P_p$  e  $Z_p$  è il numero di poli a parte reale strettamente positive. In definitiva, consideriamo i poli a parte reale nulla come se fossero a parte reale negativa, e questo perché abbiamo scelto di evitare tali poli lasciandoli a sinistra (vedi figura), chiudendo di conseguenza il diagramma polare.



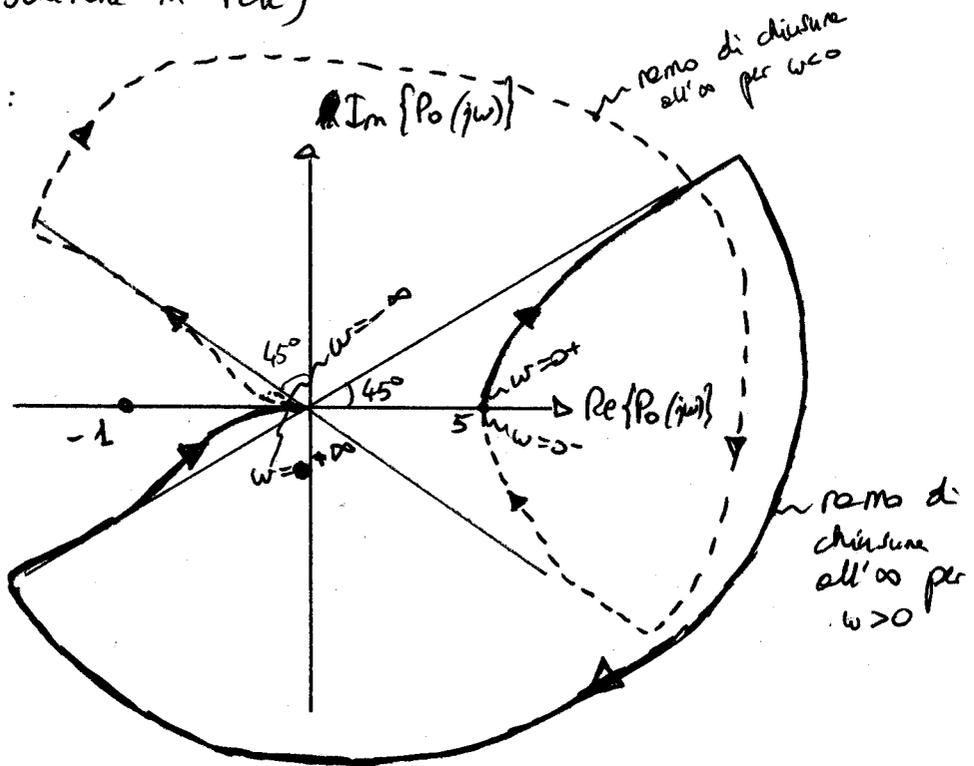
Ora, il diagramma di Bode si fa sommando i diagrammi dei vari fattori che compaiono in  $P_0(s)$ , e questo perché il modulo del prodotto in dB è pari alla somma di moduli in dB, e la fase del prodotto è pari alla somma delle fasi.



(Vedere anche la soluzione in rete)

6

Diagramma polare:



—  $\omega$  positivi  
 ---  $\omega$  negativi (simmetria rispetto all'asse reale all'alto)

Il numero  $N$  di giri attorno a  $-1$  (contando tutto il diagramma, con sia  $\omega$  positivo che negativo) è pari a  $0$ . Inoltre il diagramma non passa per  $-1$ .  
 $P_p = 0$  ( $P_o(s)$  ha <sup>tutti i</sup> poli a parte reale  $\leq 0$ , nessuno  $\bar{r}$  a parte reale positiva).

Quindi  $N = P_p \Rightarrow$  per Nyquist, il sistema complesso è a.s. stabile. Cioè  $\bar{r}_p = 0$ .

Verifica con Routh: 
$$W(s) = \frac{50(1+s)}{50(1+s) + (5+10s)(s^2+1)} = \frac{50(s+1)}{s^3 + 10s^2 + 51s + 60}$$

Il polinomio  $s^3 + 10s^2 + 51s + 60$  ha tutte radici a parte reale negativa:

1	51
10	60
45	
60	

tabella di Routh.

(Infatti le radici sono:  $-1.5$ ;  
 $-4.2 \pm j4.46$ )

