

# 1 Specifica di precisione

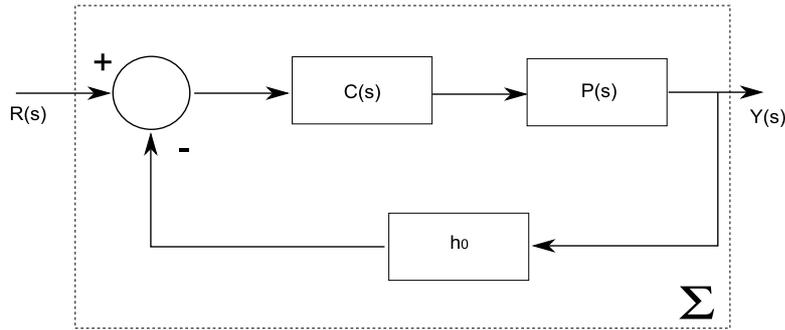


Figure 1: Sistema in controreazione

Si consideri lo schema in controreazione riportato in Fig. 1, dove  $P(s)$  è la funzione di trasferimento di un processo da controllare,  $C(s)$  il blocco di controllo (da progettare) e  $h_0$  una costante di guadagno da scegliere opportunamente.

Per specifica di precisione si intende la richiesta (da soddisfare mediante una scelta opportuna del controllore  $C(s)$  e del guadagno  $h_0$  nell'ambito dello schema in controreazione in figura) che l'uscita  $y(t)$  del processo controllato (quello del blocco  $P(s)$ ) inseguia a regime (cioè per tempi  $t$  abbastanza grandi) un segnale di riferimento  $r(t)$ , eventualmente moltiplicato per una costante  $K_d$ . Sia pertanto  $y_d(t) := K_d r(t)$  il valore desiderato a regime per l'uscita e si definisca l'errore di inseguimento  $\varepsilon(t)$  come

$$\varepsilon(t) := K_d r(t) - y(t). \quad (1)$$

Allora, la specifica di precisione consiste nella richiesta che  $\varepsilon(t)$  per  $t$  grandi sia sufficientemente piccolo, cioè, formalmente, definendo

$$\varepsilon_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$$

la specifica di precisione sarà

$$|\varepsilon_\infty| \leq c \quad (2)$$

dove  $c \geq 0$  è una costante (eventualmente pari a 0 nel caso si desideri un inseguimento a regime perfetto).

Risolveremo il problema solo per una classe (invero piuttosto generale) di riferimenti  $r(t)$ , quella dei riferimenti *di tipo k*.

**Definizione 1** *Un riferimento  $r(t)$  è di tipo  $k$  se è una funzione del tipo*

$$r(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$$

dove  $k$  è una costante intera non negativa (cioè  $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Per soddisfare la specifica di precisione occorre innanzitutto scegliere

$$\boxed{h_0 = \frac{1}{K_d}} \quad (3)$$

Occorre quindi inserire in  $C(s)$  delle quantità opportune come mostrato nel seguito. Si ricorda che nel progetto complessivo del controllore  $C(s)$ , si deve tenere conto oltre che della precisione anche delle specifiche di stabilità asintotica di  $\Sigma$  e sul transitorio. Per fare ciò la funzione  $C(s)$  sarà costituita da due blocchi:

$$C(s) = C_1(s) \cdot C_2(s),$$

dove  $C_1(s)$  terrà conto della specifica di precisione (argomento del presente capitolo) e  $C_2(s)$  della stabilità e del transitorio (nel modo che si vedrà in seguito). Nel progetto si partirà sempre dalla sintesi di  $C_1(s)$  e si procederà quindi con la scelta di  $C_2(s)$ , che essendo scelta come una funzione a guadagno unitario, non rovinerà mai, come si vedrà, il contributo alla precisione di  $C_1(s)$  ma aggiungerà solo dei pezzi che assicureranno la stabilità del sistema complessivo e un buon comportamento transitorio. In questo capitolo assumeremo quindi  $C_2(s) = 1$ , con  $C(s) = C_1(s)$ .

La funzione  $C_1(s)$  viene scelta del seguente tipo:

$$C_1(s) = \frac{K_c}{s^\alpha}, \quad (4)$$

dove  $K_c$  è una costante e  $\alpha$  è un intero non negativo.

Si definisca la funzione di trasferimento in catena diretta

$$G(s) := P(s)C(s) = P(s)C_1(s) \quad (5)$$

e la si scriva nella forma generale:

$$G(s) := \frac{K_g(1 + \dots)}{s^\nu(1 + \dots)}, \quad (6)$$

dove anche qui  $K_g$  è una costante,  $\nu$  è un intero non negativo e i termini  $(1 + \dots)$  e  $(1 + \dots)$  sono polinomi in  $s$  con termine noto unitario.

Se scriviamo  $P(s)$  nella stessa forma,

$$P(s) := \frac{K_p(1 + \dots)}{s^{\nu_p}(1 + \dots)}, \quad (7)$$

dove  $K_p$  è una costante,  $\nu_p$  è un intero non negativo e i termini  $(1 + \dots)$  e  $(1 + \dots)$  sono altri polinomi in  $s$  con termine noto unitario, dal fatto che  $G(s) = P(s)C(s)$ , segue:

$$K_g = K_p \cdot K_c \quad (8)$$

$$\nu = \nu_p + \alpha \quad (9)$$

Introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 2** *Un sistema in controreazione del tipo riportato in Fig. 1 è detto di tipo  $\nu$  (dove  $\nu$  è una costante intera non negativa, cioè  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) se la funzione di trasferimento  $G(s)$  in catena diretta ha un polo in 0 di ordine  $\nu$  (cioè  $G(s)$  è del tipo riportato in (6)).*

Sussiste allora il seguente teorema.

**Teorema 1** *Si consideri il sistema in controreazione riportato in Fig. 1 con  $h_0 = 1/K_d$  e si indichi con  $\nu$  il tipo del sistema (in accordo con la definizione 2). Si assuma di voler inseguire un riferimento di tipo  $k$  (cioè si vuole  $y(t) = K_d r(t)$  a regime con  $r(t)$  come nella definizione 1). Allora, se il sistema complessivo  $\Sigma$  è asintoticamente stabile, vale la seguente formula per l'errore di inseguimento a regime  $\varepsilon_\infty$ :*

$$\varepsilon_\infty = \begin{cases} 0 & \nu > k \\ \frac{K_d^2}{K_g} & \nu = k \geq 1 \\ \frac{K_d^2}{K_d + K_g} & \nu = k = 0 \\ \infty & \nu < k. \end{cases}$$

Questo significa che se nella catena diretta abbiamo un polo in 0 di ordine superiore al tipo del riferimento e il sistema complessivo è asintoticamente stabile, l'errore di inseguimento a regime è nullo. Se invece l'ordine del polo in 0 coincide col tipo del riferimento l'errore è costante. L'errore è infinito nel caso di ordine del polo in 0 inferiore al tipo del riferimento. La tabella 1 illustra graficamente il risultato del teorema.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$\dots$
$\nu = 0$	$\frac{K_d^2}{K_d + K_g}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$\nu = 1$	0	$\frac{K_d^2}{K_g}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$\nu = 2$	0	0	$\frac{K_d^2}{K_g}$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$\nu = 3$	0	0	0	$\frac{K_d^2}{K_g}$	$\infty$	$\dots$
$\nu = 4$	0	0	0	0	$\frac{K_d^2}{K_g}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Table 1: Illustrazione del Teorema 1: nella tabella viene riportato il valore di  $\varepsilon_\infty$  in funzione del tipo  $\nu$  del sistema e  $k$  del riferimento.

**Dimostrazione del Teorema 1.** La dimostrazione del teorema si fa utilizzando il teorema del valor finale secondo cui, quando i seguenti limiti esistono, sussiste la relazione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$$

dove  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  è la trasformata di Laplace di  $x(t)$ . Si ha allora (i limiti esistono se il sistema complessivo  $\Sigma$  è asintoticamente stabile e i riferimenti sono di tipo  $k$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [K_d r(t) - y(t)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s [K_d R(s) - Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s [K_d - W(s)] R(s). \end{aligned} \quad (10)$$

Ora, utilizzando l'espressione (6) per  $G(s)$  (indicando per maggiore chiarezza con  $(1 + \dots)_N$  il polinomio a numeratore di  $G(s)$  e con  $(1 + \dots)_D$  quello a denominatore) si ha:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + h_0 G(s)} = \frac{K_g (1 + \dots)_N}{s^\nu (1 + \dots)_D + h_0 K_g (1 + \dots)_N}$$

per cui

$$K_d - W(s) = \frac{K_d s^\nu (1 + \dots)_D + K_d h_0 K_g (1 + \dots)_N - K_g (1 + \dots)_N}{s^\nu (1 + \dots)_D + h_0 K_g (1 + \dots)_N}$$

Ora, in base a (3),  $K_d h_0 = 1$ . Pertanto, l'espressione precedente si semplifica in:

$$K_d - W(s) = \frac{K_d s^\nu (1 + \dots)_D}{s^\nu (1 + \dots)_D + h_0 K_g (1 + \dots)_N}$$

Nel caso di riferimento di tipo  $k$  si ha

$$R(s) = \frac{1}{s^{k+1}}.$$

Si ha allora, sostituendo in (10),

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_d s^\nu (1 + \dots)_D}{s^\nu (1 + \dots)_D + h_0 K_g (1 + \dots)_N} \frac{1}{s^{k+1}} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d s^\nu (1 + \dots)_D}{s^\nu (1 + \dots)_D + h_0 K_g (1 + \dots)_N} \frac{1}{s^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d (1 + \dots)_D}{s^\nu (1 + \dots)_D + h_0 K_g (1 + \dots)_N} s^{\nu-k} \end{aligned}$$

che vale 0 se  $\nu > k$ , costante se  $\nu = k$  e infinito se  $\nu < k$ . Nel caso  $\nu = k > 0$  abbiamo:

$$\varepsilon_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d (1 + \dots)_D}{s^\nu (1 + \dots)_D + h_0 K_g (1 + \dots)_N} = \frac{K_d}{h_0 K_g} = \frac{K_d^2}{K_g}$$

Nel caso  $\nu = k = 0$  abbiamo:

$$\varepsilon_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d (1 + \dots)_D}{(1 + \dots)_D + h_0 K_g (1 + \dots)_N} = \frac{K_d}{1 + h_0 K_g} = \frac{K_d^2}{K_d + K_g}$$

che conclude completamente la prova. □

Il Teorema 1 permette di capire molto facilmente come va scelta  $C_1(s) = K_c/s^\alpha$  del tipo in (4) per ottenere la precisione. Se si vuole un errore a regime nullo per un riferimento di tipo  $k$  occorrerà fare in modo che  $\nu > k$  e, siccome  $\nu = \alpha + \nu_p$ , occorrerà scegliere in  $C_1(s)$  un esponente

$$\alpha > \max\{0, k - \nu_p\}.$$

La presenza del massimo nella precedente è dovuta al fatto che se già  $\nu_p > k$ , ovvero se il polo nel processo è di ordine tale da garantire già da solo la precisione richiesta, non si aggiungono altri poli in 0 con il controllore (cioè  $\alpha = 0$ ). Se non ci fosse il massimo e  $\nu_p > k$ , si otterrebbe un valore di  $\alpha$  negativo(!), cosa che corrisponderebbe a una cancellazione di un polo con parte reale nulla. Per quanto riguarda la costante  $K_c$ , questa risulta libera in questo caso (per esempio si può scegliere pari a 1). Poiché più il polo in 0 è di ordine elevato e più risulterà difficile in generale stabilizzare il sistema (cioè più sarà difficile il progetto di  $C_2(s)$ ), conviene scegliere generalmente l'ordine minimo indispensabile, ossia

$$\alpha = \max\{0, k - \nu_p + 1\}.$$

Se si vuole invece (come è più frequente) un errore a regime limitato da una costante  $c > 0$  (vedere (2)) per un riferimento di tipo  $k$  occorrerà fare in modo che  $\nu \geq k$  e, siccome  $\nu = \alpha + \nu_p$ , occorrerà scegliere in  $C_1(s)$  un esponente

$$\alpha \geq \max\{0, k - \nu_p\},$$

Per lo stesso motivo detto sopra, si sceglierà

$$\alpha = \max\{0, k - \nu_p\}.$$

In questo caso, la costante  $K_c$  va scelta opportunamente: nel caso  $\nu = k > 0$  sarà scelta tale che:

$$\frac{K_d^2}{|K_p K_c|} \leq c \quad (11)$$

mentre nel caso  $\nu = k = 0$  sarà scelta tale che:

$$\frac{K_d^2}{|K_d + K_p K_c|} \leq c \quad (12)$$

Anche qui, generalmente, per facilitare il compito di stabilizzare, conviene spesso scegliere  $K_c$  in modo che le equazioni (11) e (12) siano soddisfatte con l'uguaglianza.

**ESEMPIO.** Si consideri lo schema in Fig. 1 con  $P(s) = \frac{s+10}{s(s+1)(s^2+2s+5)}$  e si voglia inseguire con errore nullo a regime il riferimento (di tipo 2)  $r(t) = \frac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)$  con  $K_d = 2$  (cioè l'uscita desiderata è  $y_d(t) = K_d r(t) = t^2\delta_{-1}(t)$ ). Determinare come vanno scelti la costante  $h_0$  e i parametri  $K_c$  e  $\alpha$  in  $C_1(s) = K_c/s^\alpha$ .

*Soluzione.* Innanzitutto scegliamo  $h_0 = 1/K_d = 0.5$ .

Il riferimento è di tipo 2 e quindi per avere un errore di inseguimento a regime nullo occorre avere un sistema di tipo almeno  $\nu = 3$ . Siccome il processo ha già un polo di ordine 1 in 0, basta scegliere  $\alpha = 2$ , in modo tale che  $\nu = \alpha + \nu_p = 2 + 1 = 3$ . La costante  $K_c$  è libera e possiamo scegliere per esempio  $K_c = 1$ . Poi occorre proseguire nella sintesi di  $C_2(s)$  per assicurare la stabilità asintotica e un buon comportamento transitorio (si ricorda infatti che la precisione vale solo sotto l'ipotesi di stabilità asintotica). □

**ESEMPIO 2.** Nella stessa situazione dell'esempio precedente, si richiede un errore a regime minore o uguale a 0.01 sempre rispetto a riferimenti di tipo 2.

*Soluzione.* Anche qui  $h_0 = 1/K_d = 0.5$ .

Il riferimento è di tipo 2 e quindi per avere un errore di inseguimento a regime costante occorre avere un sistema di tipo almeno  $\nu = 2$ . Siccome il processo ha già un polo di ordine 1 in 0, basta scegliere  $\alpha = 1$ , in modo tale che  $\nu = \alpha + \nu_p = 1 + 1 = 2$ . La costante  $K_c$  va scelta in modo tale che

$$\frac{K_d^2}{|K_p K_c|} \leq 0.01$$

dove  $K_p$  è il coefficiente di guadagno di  $P(s)$ . Esso si determina mettendo in evidenza i termini noti di numeratore e denominatore:

$$P(s) = \frac{s+10}{s(s+1)(s^2+2s+5)} = 2 \frac{1+s/10}{s(1+s)(1+2s/5+s^2/5)}$$

e vale quindi  $K_p = 2$ . Quindi:

$$\frac{K_d^2}{|K_p K_c|} = \frac{4}{2K_c} \leq 0.01$$

per cui  $K_c \geq 200$  e sceglieremo proprio  $K_c = 200$ . Anche qui occorre poi proseguire nella sintesi di  $C_2(s)$  per assicurare la stabilità asintotica e un buon comportamento transitorio.  $\square$

**Osservazione.** Se con la  $P(s)$  degli esempi precedenti si richiedesse un errore a regime minore o uguale a 0.01 per riferimenti di tipo  $k = 0$ , sarebbe bastato un sistema di tipo  $\nu = 0$ . Tuttavia, poiché il processo ha già un polo in zero di ordine  $\nu_p = 1$  e  $\alpha$  va scelto non negativo ( $\alpha \geq 0$ ), non possiamo in nessun modo ottenere un sistema di tipo  $\nu = \alpha + \nu_p$  minore di 1. Quindi prenderemmo in tal caso  $\alpha = 0$  che con una qualsiasi costante  $K_c$  fornisce un errore a regime nullo. Sarebbe stato un errore prendere  $\alpha = -1$  (cancellando quindi il polo di  $P(s)$ ) per avere un sistema di tipo 0!

## 1.1 Specifica di precisione in presenza di un disturbo

Illustriamo la specifica di precisione nel caso di disturbi con un esempio.

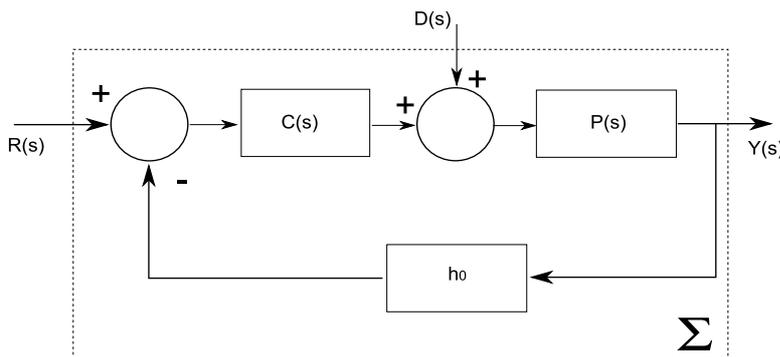


Figure 2: Sistema in controreazione con disturbo sull'attuatore del processo

**ESEMPIO con DISTURBO.** Si consideri lo schema in Fig. 2 con  $P(s) = \frac{s+10}{s(s+1)(s^2+2s+5)}$ ,  $D(s)$  un segnale di disturbo costante di ampiezza 10, cioè

$$d(t) = 10\delta_{-1}(t),$$

in modo che la sua trasformata valga

$$D(s) = \frac{10}{s}.$$

Considereremo solo disturbi costanti ma il loro punto di ingresso potrà variare nell'anello (quello rappresentato in figura può modellare disturbi sull'attuatore del processo). Successivamente, ma solo in sede di analisi e non di sintesi, vedremo l'effetto di disturbi di tipo sinusoidale.

Supponiamo di voler inseguire con errore *complessivo* a regime minore o uguale a 0.01 il riferimento (di tipo 1)  $r(t) = t\delta_{-1}(t)$  con  $K_d = 2$  (cioè l'uscita desiderata è  $y_d(t) = K_d r(t) = 2t\delta_{-1}(t)$ ). Determinare come vanno scelti la costante  $h_0$  e i parametri  $K_c$  e  $\alpha$  in  $C_1(s) = K_c/s^\alpha$ .

*Soluzione.* Innanzitutto si sceglierà sempre  $h_0 = 1/K_d = 0.5$ .

Per la sovrapposizione degli effetti, avremo che la risposta in uscita del sistema sarà composta dal contributo dovuto al disturbo e da quello dovuto al riferimento considerati isolati:

$$y(t) = y^{(r)}(t) + y^{(d)}(t)$$

per cui anche l'errore di inseguimento potrà scomporsi in due contributi:

$$\varepsilon(t) = K_d r(t) - y(t) = K_d r(t) - y^{(r)}(t) - y^{(d)}(t) =: \varepsilon^{(r)}(t) + \varepsilon^{(d)}(t)$$

dove

$$\varepsilon^{(r)}(t) := K_d r(t) - y^{(r)}(t)$$

è l'errore relativo al riferimento (e coincide con quello della sezione precedente), mentre

$$\varepsilon^{(d)}(t) := -y^{(d)}(t)$$

è il contributo all'errore di inseguimento dovuto al disturbo. Definiamo anche qui

$$\varepsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$$

l'errore a regime di inseguimento e, in accordo con le definizioni riportate sopra,

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_\infty^{(r)} + \varepsilon_\infty^{(d)}$$

con

$$\varepsilon_\infty^{(r)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^{(r)}(t)$$

e

$$\varepsilon_\infty^{(d)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^{(d)}(t).$$

Ora, in generale, un disturbo è qualcosa di non noto: progettare un sistema che funzioni con disturbi di ampiezza 10 corrisponde a richiedere che funzioni con disturbi di ampiezza *fino a* 10, quindi anche negativi, cioè anche per  $d(t) = -10\delta_{-1}(t)$ . Non sapendo a priori se i due contributi all'errore di inseguimento si sommeranno o si elideranno tra loro, si definirà piuttosto come errore totale a regime la somma dei loro valori assoluti (cioè ci si porrà nel caso peggiore possibile):

$$\varepsilon_\infty = |\varepsilon_\infty^{(r)}| + |\varepsilon_\infty^{(d)}| \quad (13)$$

In questo modo si è sicuri che l'errore a regime sarà minore o uguale al valore stabilito qualsiasi sia l'entità del disturbo (purché la sua ampiezza in modulo sia minore di 10). Si procede allora nel seguente modo. Per quanto riguarda  $\varepsilon_\infty^{(r)}$ , dalla sezione precedente sappiamo che vale la seguente cosa:

$$\varepsilon_\infty^{(r)} = \begin{cases} 0 & \alpha \geq 1 \\ K_d^2/(K_c K_p) = 2/K_c & \alpha = 0, \end{cases} \quad (14)$$

non potendosi avere errori infiniti perché  $P(s)$  ha già un polo in 0 e il riferimento è di tipo 1.

Per quanto riguarda  $\varepsilon_\infty^{(d)}$ , sempre utilizzando il teorema del valor finale si ha:

$$\varepsilon_\infty^{(d)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^{(d)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -y^{(d)}(t) = \lim_{s=0} -sW_{dy}(s)D(s)$$

dove

$$W_{dy}(s) = \frac{P(s)}{1 + h_0 P(s)C(s)}$$

è la funzione di trasferimento dal disturbo all'uscita. Sostituendo anche l'espressione di  $D(s) = 10/s$ :

$$\varepsilon_\infty^{(d)} = -\lim_{s=0} \frac{10K_p(1+\dots)_N s^\alpha}{s^{\alpha+\nu_p}(1+\dots)_D + h_0 K_p K_c (1+\dots)_N} = -\lim_{s=0} \frac{20(1+\dots)_N s^\alpha}{s^{\alpha+1}(1+\dots)_D + K_c(1+\dots)_N}$$

(dove si è scritta  $P(s) = \frac{K_p(1+\dots)_N}{s^{\nu_p}(1+\dots)_D}$ , con  $K_p = 2$  e  $\nu_p = 1$ ) da cui si vede come

$$\varepsilon_\infty^{(d)} = \begin{cases} 0 & \alpha \geq 1 \\ -20/K_c & \alpha = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Mettendo insieme (15) e (14) (prese col valore assoluto, in accordo con (13)), si ha

$$\varepsilon_\infty = |\varepsilon_\infty^{(r)}| + |\varepsilon_\infty^{(d)}| = \begin{cases} 0 & \alpha \geq 1 \\ 20/K_c + 2/K_c = 22/K_c & \alpha = 0. \end{cases}$$

La situazione in altri casi potrebbe essere più variegata. Se si desiderasse un errore complessivo di inseguimento a regime nullo, si sceglierebbe

$$\alpha = 1$$

e  $K_c$  libero, per esempio  $K_c = 1$ . Volendo un errore complessivo a regime minore o uguale a 0.01 (così come indicato nel testo iniziale), sceglieremo

$$\alpha = 0$$

e  $K_c$  tale che

$$22/K_c \leq 0.01,$$

cioè  $K_c \geq 2200$ , e quindi

$$K_c = 2200.$$

Con queste scelte la precisione richiesta è garantita sotto l'ipotesi che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile. Se non lo è occorrerà aggiungere dei pezzi in  $C(s)$  (indicati con  $C_2(s)$ ) per ottenere la stabilità ma senza guastare la specifica di precisione. Questo è l'argomento delle prossime lezioni.

□

**Osservazione 1.** Se il disturbo entra in un punto diverso dello schema, avremo una diversa funzione di trasferimento  $W_{dy}(s)$ . Per il resto però il metodo rimane uguale.

**Osservazione 2.** Il fatto che un sistema sia tale che in uscita a regime non appaia l'effetto del disturbo (cioè si ha  $\varepsilon_\infty^{(d)} = 0$ ), viene indicato con il termine di *astatismo*: il sistema viene detto *astatico* rispetto al disturbo.

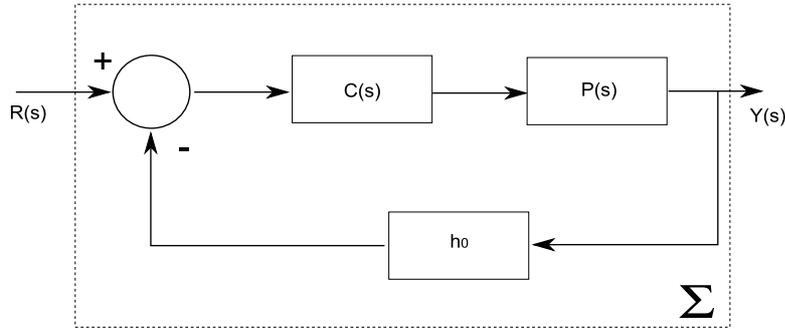


Figure 3: Sistema in controreazione

## 2 Specifica sul transitorio e di stabilità asintotica

Dato lo schema in controreazione di Fig. 3, in cui  $P(s)$  è il blocco del processo da controllare, il problema che ci siamo posti sin dall'inizio è quello di determinare la costante  $h_0$  e il controllore  $C(s)$  in modo tale che:

- il sistema complessivo  $\Sigma$  sia asintoticamente stabile;
- l'uscita  $y(t)$  del processo inseguia un valore desiderato  $K_d r(t)$  nel modo migliore possibile, e cioè:
  1. con un errore a regime contenuto o nullo (così come definito nella sezione precedente);
  2. con un comportamento transitorio soddisfacente.

Prima di definire formalmente cosa si intende per transitorio *soddisfacente*, si fa notare che la soluzione al problema posto viene ottenuta prendendo (come già noto)  $h_0 = 1/K_d$  e  $C(s) = C_1(s)C_2(s)$ , dove  $C_1(s) = K_c/s^\alpha$  viene scelta in base alla precisione desiderata (vedasi sezione precedente) e  $C_2(s)$ , del tipo

$$C_2(s) = \frac{(1 + \dots)}{(1 + \dots)}$$

(dove  $(1 + \dots)$  sono polinomi in  $s$  con termine noto unitario), viene scelta per soddisfare le altre due specifiche sulla stabilità asintotica e sul transitorio nel modo che si vedrà. Si fa notare a tale proposito come, essendo  $\lim_{s \rightarrow 0} C_2(s) = 1$ , la  $C_2(s)$  non *guasterà* la specifica di precisione (rileggere la sezione precedente aggiungendo una  $C_2(s)$  del tipo indicato per vedere che tutto resta invariato).

### 2.1 Specifica sul transitorio

È usuale definire le specifiche sulla risposta transitoria considerando la risposta del sistema al gradino unitario (e a partire da condizioni iniziali nulle). Se il sistema è asintoticamente stabile (cosa che deve verificarsi in accordo con la prima specifica del problema che stiamo affrontando), a regime la  $y(t)$  si assesterà su un valore costante. Supponendo per semplicità che a regime tale valore costante sia pari a 1, la qualità di una risposta transitoria si definisce mediante i seguenti due parametri (vedansi Figg. 4 e 5):

- tempo di salita  $t_s$ ;
- sovraelongazione  $\hat{s}$ .

Il tempo di salita  $t_s$  descrive quantitativamente la velocità con cui l'uscita si avvicina al suo valore di regime (in generale, se a regime il valore  $y_{reg}$  di  $y(t)$  dovesse essere diverso da uno, basta fare il grafico di  $y(t)/y_{reg}$  per ricadere nei casi riportati nelle due figure): nel caso di uscita  $y(t)$  oscillatoria (poli di  $W(s)$  complessi), il tempo di salita  $t_s$  è definito come il tempo per cui la  $y(t)$  raggiunge per

la prima volta il suo valore di regime (Fig. 4). Nel caso asintotico (poli reali nella  $W(s)$ ) il tempo di salita  $t_s$  è definito come il tempo che intercorre tra quando la  $y(t)$  raggiunge il 10% e il tempo in cui raggiunge il 90% del suo valore di regime (Fig. 5). La sovravelongazione  $\hat{s}$  descrive in termini

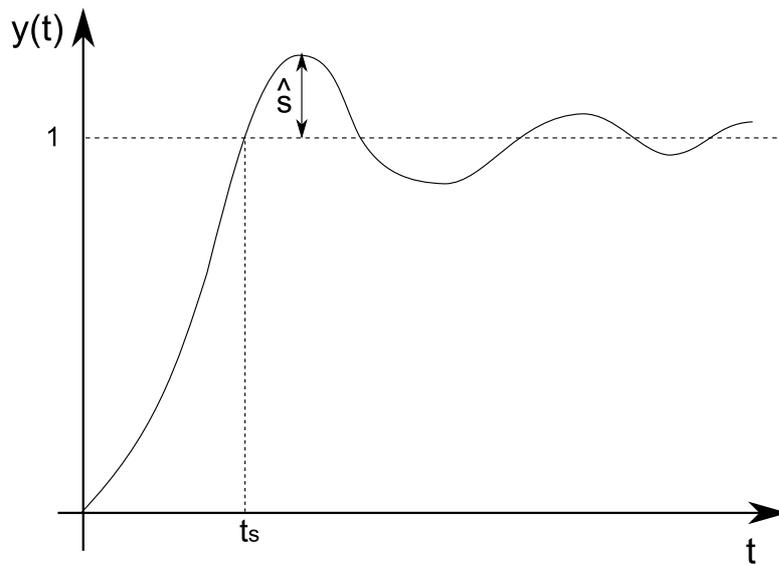


Figure 4: Tempo di salita e sovravelongazione nel caso di risposta oscillatoria.

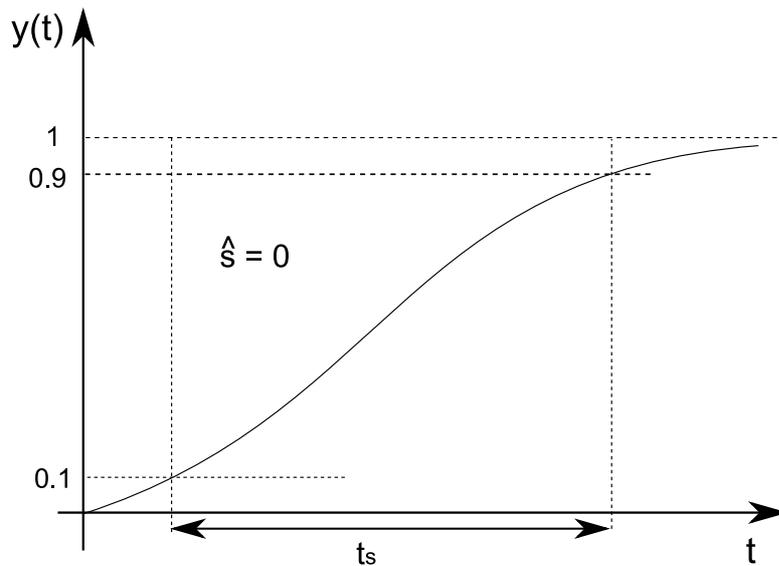


Figure 5: Tempo di salita e sovravelongazione nel caso di risposta asintotica.

percentuali l'entità dell'oscillazione dell'uscita attorno al suo valore di regime e vale quindi 0 nel caso di andamento asintotico (Fig. 5) e risulta pari al rapporto tra lo scostamento del massimo della  $y(t)$  rispetto al suo valore di regime e il suo valore di regime stesso (Fig. 4).

Le specifiche sul transitorio si porranno in termini di sovravelongazione e tempo di salita limitati. Cioè:

$$\hat{s} \leq \hat{s}^*$$

$$t_s \leq t_s^*$$

Occorre osservare che un tempo di salita troppo piccolo corrisponde a un sistema troppo reattivo, che non filtra i disturbi. Per questo motivo generalmente la specifica sul tempo di salita viene data in

questi termini:

$$t_s \approx t_s^*$$

Quindi, complessivamente, le specifiche sul transitorio possono essere riassunte nel seguente modo:

SPECIFICHE SUL TRANSITORIO
$\hat{s} \leq \hat{s}^*$ $t_s \approx t_s^*$

## 2.2 Legame tra diagramma polare e risposta transitoria del sistema

In termini molto qualitativi si può notare come più un sistema è stabile (nel senso che presenta un buon margine di stabilità, cioè anche nel senso che rimane stabile a fronte di incertezze e/o perturbazioni parametriche) e più la sovraelongazione sarà piccola: avvicinandosi in altri termini ai limiti di stabilità, la sovraelongazione diventa via via più accentuata fino ad arrivare a una risposta  $y(t)$  divergente, segno di instabilità. In accordo con il criterio di Nyquist, il margine di stabilità può essere valutato quantitativamente misurando in qualche modo la distanza minima che separa il diagramma polare della funzione di trasferimento a catena aperta  $F(s) = h_0 P(s) C(s)$  dal punto  $-1$ : maggiore risulta tale distanza, maggiore sarà il margine di stabilità (ossia la robustezza a fronte di incertezze parametriche) e migliore risulterà la risposta transitoria in termini di sovraelongazione.

La distanza minima del diagramma polare della  $F(s)$  dal punto  $-1$  riveste dunque un ruolo fondamentale sia per garantire la stabilità asintotica del sistema con un buon margine di sicurezza sia per ottenere una buona risposta transitoria in termini di sovraelongazioni. Garantire una buona distanza di tale diagramma dal punto  $-1$  è quindi l'obiettivo che si vuole ottenere nella sintesi del controllore.

Tuttavia la distanza minima del diagramma polare della  $F(s)$  dal punto  $-1$  potrebbe non essere agevole da calcolare e, soprattutto, una volta calcolata, potrebbe non essere immediato capire come intervenire progettualmente per aggiungere degli elementi nel controllore  $C(s)$  in modo da aumentare tale distanza minima.

Questo compito risulta però relativamente semplice per sistemi che soddisfano alcune proprietà e presentano una forma particolare del diagramma polare: per tali sistemi una sorta di distanza minima del diagramma polare dal punto  $-1$  può essere quantificata agevolmente mediante due parametri, detti *margine di fase* e *margine di guadagno* (o *di ampiezza*), molto facili da calcolare direttamente dai diagrammi di Bode e molto semplici da modificare, come si vedrà, intervenendo in modo opportuno con la  $C(s)$ .

## 2.3 I sistemi a stabilità regolare: margine di fase e di guadagno (o ampiezza)

Per definire i margini di fase e di guadagno, supponiamo quindi inizialmente che la  $F(s)$  abbia un coefficiente di guadagno  $K_F$  positivo, non abbia poli con parte reale positiva (cioè supponiamo  $P_p = 0$ ) e che il suo diagramma polare positivo (cioè il ramo del diagramma polare corrispondente alle  $\omega$  positive) presenti un'unica intersezione sia con il cerchio unitario sia con l'asse reale negativo. Si assuma inoltre che il sistema in controreazione  $\Sigma$  avente  $F(s)$  come funzione di trasferimento in catena aperta risulti asintoticamente stabile solo per valori di  $K_F$  sufficientemente piccoli (cioè per  $0 < K_F < \bar{K}_F$ ) e perda di stabilità quando  $K_F$  supera  $\bar{K}_F$ .  $\bar{K}_F$  è in effetti il valore di  $K_F$  per cui il diagramma polare di  $F(s)$  passa per  $-1$  (si veda la Fig. 6). Sistemi che passano dalla stabilità all'instabilità quando si aumenta  $K_F$  sono detti con un *comportamento regolare di stabilità* o anche a *stabilità regolare*. In questi appunti, per semplicità, un sistema a stabilità regolare sarà un sistema che soddisfa tutte le caratteristiche definite sopra (e cioè  $K_F > 0$ ,  $P_p = 0$ , unica intersezione con cerchio unitario e con asse reale negativo, passaggio da stabilità a instabilità aumentando  $K_F$ ). Per i sistemi a stabilità regolare è sempre possibile definire i due margini di stabilità anzidetti (di fase e di guadagno).

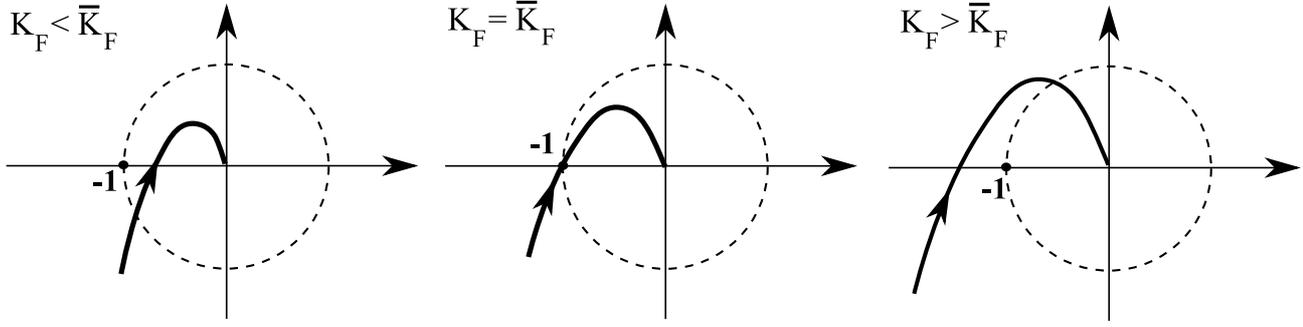


Figure 6: Diagramma polare di una funzione  $F(s)$  (solo il ramo delle  $\omega$  positive) al variare del coefficiente di guadagno  $K_F$ . Aumentando il coefficiente  $K_F$  il diagramma polare si allarga fino a superare il punto  $-1$ , cosa che avviene per un particolare valore  $K_F = \bar{K}_F$ . Il cerchio tratteggiato è il cerchio unitario. Quando  $K_F$  è minore di  $\bar{K}_F$ , l'intersezione del diagramma polare di  $F(s)$  con l'asse reale negativo avviene a destra di  $-1$  (figura a sinistra). In tal caso il numero  $N$  di giri del diagramma polare di  $F(s)$  attorno a  $-1$  (numero di giri calcolato tenendo conto del diagramma completo, cioè anche del ramo delle  $\omega$  negative e del ramo di chiusura all'infinito non riportati in figura) sarà pari a zero e, poiché  $P_p = 0$ , si avrà  $N = P_p$ . In base al criterio di Nyquist,  $\Sigma$  sarà asintoticamente stabile. Quando invece  $K_F$  è maggiore di  $\bar{K}_F$ , l'intersezione del diagramma polare di  $F(s)$  con l'asse reale negativo avviene a sinistra di  $-1$  (figura a destra). In tal caso il numero  $N$  di giri del diagramma polare di  $F(s)$  attorno a  $-1$  sarà pari a  $-2$  (i giri sono infatti in senso orario). Poiché  $P_p = 0$ , si avrà  $N \neq P_p$  e quindi, in base al criterio di Nyquist,  $\Sigma$  sarà instabile per tutti i valori di  $K_F > \bar{K}_F$ .

**Definizione 3** Si consideri un sistema a stabilità regolare e si definisca con  $\omega_T$  la pulsazione  $\omega$  per cui il diagramma dei moduli di  $F(j\omega)$  passa per  $0\text{dB}$ , cioè  $|F(j\omega_T)|_{dB} = 20\log_{10}|F(j\omega_T)| = 0$ . Tale pulsazione (che esiste unica nel caso dei sistemi qui considerati) viene anche detta pulsazione di taglio o di attraversamento ed è in effetti il valore di  $\omega$  per cui la  $F(j\omega)$  ha modulo unitario (è quindi il valore di  $\omega$  per cui il diagramma polare di  $F(s)$  interseca il cerchio unitario). Sia poi  $\tilde{\omega}$  la pulsazione  $\omega$  (anche questa unica per i sistemi qui considerati) per cui il diagramma delle fasi di  $F(j\omega)$  passa per  $-180^\circ$  (e quindi il valore di  $\omega$  per cui il diagramma polare di  $F(s)$  interseca l'asse reale negativo). Allora, il **marginale di fase**  $m_\phi$  del sistema viene definito nel seguente modo

$$m_\phi = \phi(\omega_T) - (-180^\circ), \quad (16)$$

dove  $\phi(\omega)$  è la fase di  $F(j\omega)$ . Il **marginale di guadagno**  $m_g$  viene invece definito nel seguente modo

$$m_g = -20\log_{10}|F(j\tilde{\omega})|. \quad (17)$$

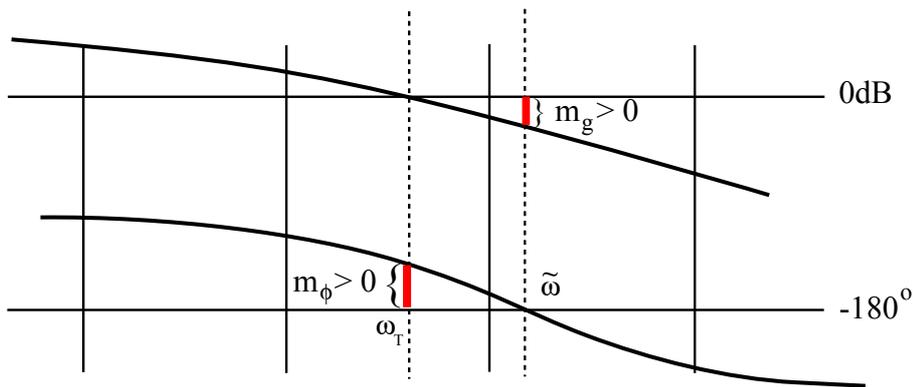


Figure 7: Diagrammi di Bode della  $F(s)$ : margini di stabilità  $m_g$  e  $m_\phi$  nel caso di sistema stabile

Nelle figure 7 e 8 viene riportata una visualizzazione grafica dei due margini di stabilità appena definiti nel caso, rispettivamente, di sistema stabile e instabile. La Fig. 7 corrisponde al diagramma polare riportato nel grafico a sinistra della Fig. 9 e corrisponde, come visto in precedenza nella Fig. 6,

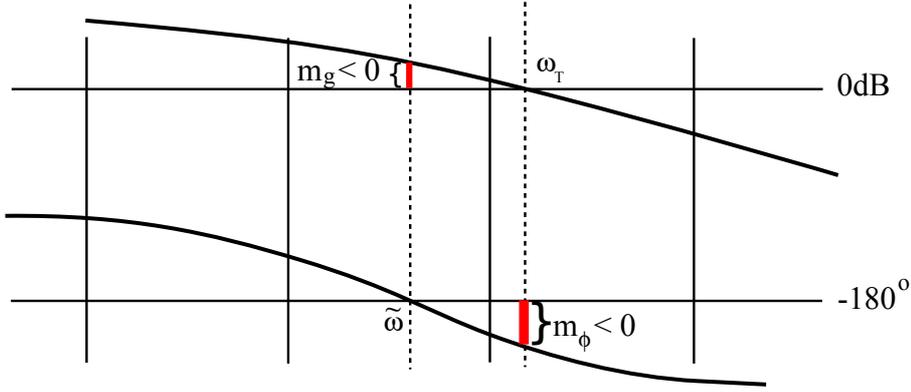


Figure 8: Diagrammi di Bode della  $F(s)$ : margini di stabilità  $m_g$  e  $m_\phi$  nel caso di sistema instabile

a un sistema  $\Sigma$  asintoticamente stabile. Il fatto che in questo caso il margine di guadagno  $m_g$  sia positivo, implica che  $20\log_{10}|F(j\tilde{\omega})| < 0$ , cioè  $|F(j\tilde{\omega})| < 1$ , il che implica che quando il diagramma polare interseca l'asse reale negativo, lo fa a destra di  $-1$ . La Fig. 8 corrisponde invece al diagramma polare riportato nel grafico a destra della Fig. 9 e corrisponde, come visto in precedenza nella Fig. 6, a un sistema  $\Sigma$  instabile. Il fatto che in questo caso il margine di guadagno  $m_g$  sia negativo, implica che  $20\log_{10}|F(j\tilde{\omega})| > 0$ , cioè  $|F(j\tilde{\omega})| > 1$ , il che implica che quando il diagramma polare interseca l'asse reale negativo, lo fa a sinistra di  $-1$ . In Fig. 9 viene anche indicato il margine di fase  $m_\phi$  e il corrispondente naturale  $m_{gn}$  del margine di guadagno  $m_g$ . Il parametro  $m_{gn}$  è definito come  $m_{gn} = 10^{\frac{m_g}{20}} = \frac{1}{|F(j\tilde{\omega})|}$ , ovvero  $m_g = 20\log_{10}(m_{gn})$ .

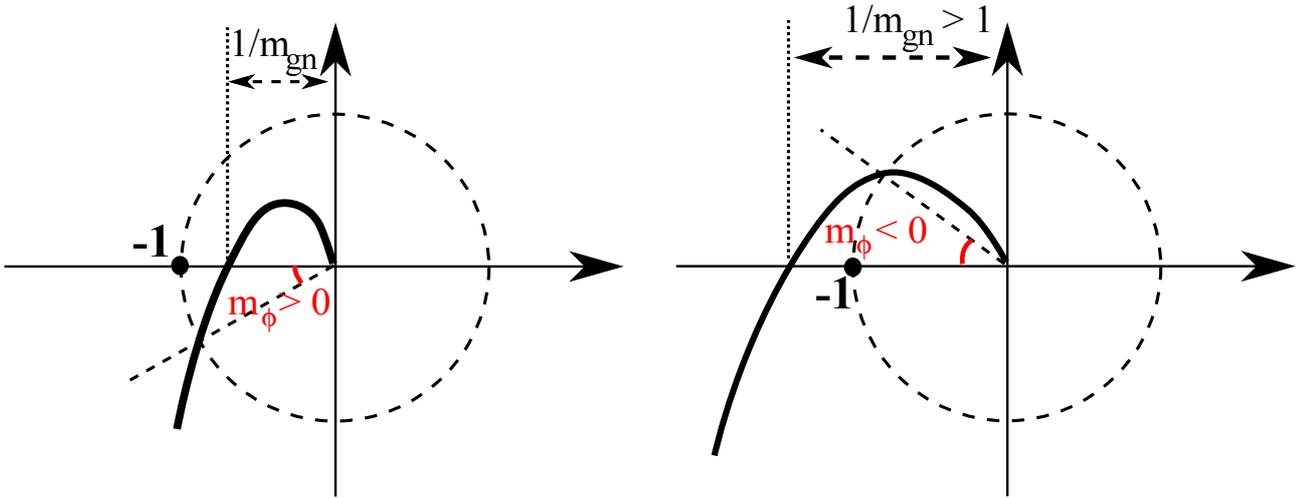


Figure 9: Margini di stabilità nel caso di sistema stabile (a sinistra) e instabile (a destra). Il parametro  $m_{gn}$  è il valore su scala naturale corrispondente a  $m_g$ :  $m_{gn} > 1$  (e quindi  $1/m_{gn} < 1$ ) corrisponde a un margine di guadagno  $m_g > 0$

In base a quanto detto finora, si evince la seguente proprietà.

**Proprietà 1** Per un sistema  $\Sigma$  a stabilità regolare, i margini  $m_g$  e  $m_\phi$  hanno sempre lo stesso segno e il sistema complessivo  $\Sigma$  è asintoticamente stabile se e solo se questi due parametri sono positivi.

I due margini di stabilità appena definiti hanno un significato ben preciso: il margine di guadagno rappresenta (in dB) la massima perturbazione sul coefficiente di guadagno per cui il sistema rimane asintoticamente stabile mentre il margine di fase individua un limite massimo sul ritardo ammissibile nella funzione di trasferimento a catena aperta (tipicamente il ritardo tra la  $C(s)$  e la  $P(s)$ , ovvero il

tempo necessario a far pervenire al processo il segnale di comando calcolato dal controllore). Vediamo con maggiore dettaglio questo fatto.

Sia  $F(s)$  la funzione di trasferimento *nominale* a catena aperta per la quale si è progettato il controllore e sia  $m_g > 0$  il margine di guadagno ottenuto. Sia ora  $F_p(s) = K_{Fp} \cdot F(s)$  la funzione di trasferimento a catena aperta *perturbata*, cioè quella nominale moltiplicata per una costante  $K_{Fp} > 0$  che potrebbe modellare un'incertezza nell'attuatore che agisce sul processo. Tracciando i diagrammi di Bode di  $F_p(s)$ , chiaramente la  $\tilde{\omega}$  rimane quella dei diagrammi della  $F(s)$  (il diagramma delle fasi di  $F_p(s)$  coincide infatti con quello di  $F(s)$  e quindi l'intersezione  $\tilde{\omega}$  di tale diagramma con  $-180^\circ$  non cambia). Il margine di guadagno  $m_{g,p}$  del sistema perturbato è quindi dato da:

$$\begin{aligned} m_{g,p} &= -20 \log_{10} |F_p(j\tilde{\omega})| = -20 \log_{10} |K_{Fp} F(j\tilde{\omega})| \\ &= -20 \log_{10} |K_{Fp}| - 20 \log_{10} |F(j\tilde{\omega})| = -20 \log_{10} |K_{Fp}| + m_g. \end{aligned}$$

Il sistema perturbato rimane asintoticamente stabile se  $m_{g,p} > 0$ , ossia se  $20 \log_{10} |K_{Fp}| < m_g$ , ovvero se  $K_{Fp} < 10^{\frac{m_g}{20}}$ . Pertanto  $m_g$  rappresenta proprio l'estremo superiore in dB delle perturbazioni  $K_{Fp}$  accettabili sul coefficiente di guadagno della  $F(s)$ .

Analogamente, sia  $m_\phi > 0$  il margine di fase ottenuto con il controllore progettato per la  $F(s)$  nominale. Sia ora  $F_p(s) = e^{-s\tau} F(s)$  la funzione di trasferimento a catena aperta perturbata, che è quindi quella nominale moltiplicata per l'esponenziale complesso  $e^{-s\tau}$ . Tale termine esponenziale corrisponde a un ritardo  $\tau$  presente nella funzione di trasferimento a catena aperta, per esempio, come anticipato, tra il blocco di controllo  $C(s)$  e il processo  $P(s)$  (questo può accadere in applicazioni in cui il segnale di controllo arriva al processo tramite un sistema di telecomunicazioni soggetto a ritardi di trasmissione non del tutto prevedibili). Tracciando i diagrammi di Bode di  $F_p(s)$ , chiaramente la  $\omega_T$  rimane quella dei diagrammi della  $F(s)$  (il diagramma dei moduli di  $F_p(s)$  coincide infatti con quello di  $F(s)$ , essendo  $|e^{j\omega\tau}| = 1$  per ogni  $\omega$ , e quindi l'intersezione  $\omega_T$  di tale diagramma con  $0dB$  non cambia). Indicando rispettivamente con  $\phi_p(\omega)$  e con  $\phi(\omega)$  la fase di  $F_p(j\omega)$  e di  $F(j\omega)$ , si ha:

$$\phi_p(\omega) = \phi(\omega) - \omega\tau,$$

essendo la fase del prodotto data dalla somma della fasi e la fase di  $e^{-j\omega\tau}$  pari a  $-\omega\tau$ . Ne segue quindi che il margine di fase  $m_{\phi,p}$  del sistema perturbato sarà dato da:

$$m_{\phi,p} = \phi_p(\omega_T) - (-180^\circ) = \phi(\omega_T) - \omega_T\tau - (-180^\circ) = \phi(\omega_T) - (-180^\circ) - \omega_T\tau = m_\phi - \omega_T\tau.$$

Il sistema perturbato rimane asintoticamente stabile se  $m_{\phi,p} > 0$ , ossia se  $\omega_T\tau < m_\phi$ , ovvero se  $\tau < \frac{m_\phi}{\omega_T}$ . Pertanto il margine di fase  $m_\phi$ , diviso per la pulsazione di taglio  $\omega_T$ , rappresenta proprio l'estremo superiore sui ritardi accettabili  $\tau$ .

Sebbene dunque i due margini appena definiti abbiano un significato ben preciso in termini di robustezza rispetto a perturbazioni specifiche (guadagno e ritardo), essi però vanno a caratterizzare genericamente la distanza che intercorre tra il diagramma polare e il punto  $-1$ : in generale, per i sistemi a stabilità regolare, eccettuate situazioni patologiche cui si farà cenno tra breve, valori sufficientemente elevati di questi due margini stanno ad indicare una buona distanza del diagramma polare dal punto  $-1$  e, quindi, di conseguenza, una buona robustezza della proprietà di stabilità a fronte di variazioni generiche dei parametri (quindi non solo guadagno e ritardo) e un buon comportamento transitorio (in termini di sovraelongazione contenuta).

Prima di fare cenno ai casi patologici richiamati pocanzi, si vuole illustrare quanto detto con un esempio numerico.

## 2.4 Margini di stabilità e comportamento transitorio: uno studio numerico

In base alle definizioni appena viste e a quanto richiamato in precedenza, per un sistema a stabilità regolare, un margine di fase (più usato rispetto al margine di guadagno) positivo e molto ampio assicura non solo la stabilità con un buon margine (ossia anche a fronte di incertezze o perturbazioni parametriche) ma anche una sovraelongazione contenuta. Visualizziamo questo riportando i grafici

della risposta al gradino (cioè per  $r(t) = \delta_{-1}(t)$ ), con  $K_d = 1$ , per un sistema in controreazione a stabilità regolare al variare del suo margine di fase (il sistema è quello della sintesi che verrà considerato tra qualche lezione, in cui  $P(s) = 1/((s+1)(s/3+1))$  e il controllore viene scelto opportunamente). Assicurando un margine di fase  $m_\phi = 50$  gradi, si ottiene una sovralongazione di circa il 20% (vedasi grafico di sinistra della Fig. 10). Con un margine di fase  $m_\phi = 30$  gradi, si ottiene una sovralongazione di circa il 45% (vedasi grafico al centro della Fig. 10). Infine, con un margine di fase  $m_\phi = 4$  gradi (quindi ai limiti di stabilità), si ottiene una sovralongazione di oltre il 90% (vedasi il grafico a destra della Fig. 10): la risposta sta quasi per divenire divergente. Da tutto questo discorso emerge che la

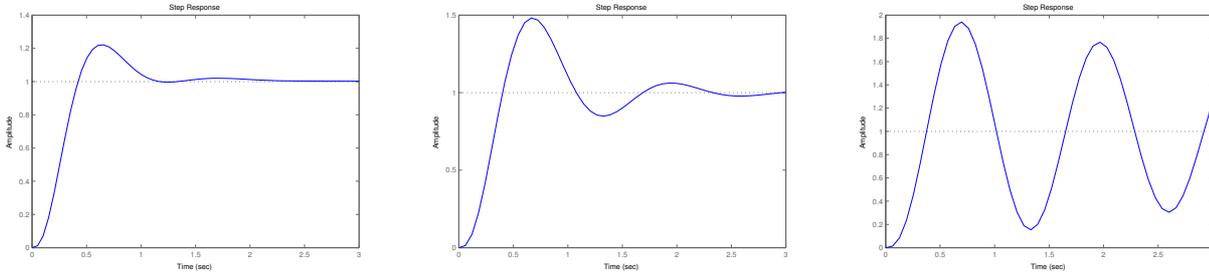


Figure 10: Risposta al gradino del sistema a stabilità regolare considerato come esempio nella sezione 2.4 nel caso di margine di fase pari a 50 gradi (a sinistra), 30 gradi (al centro) e 4 gradi (a destra): si nota come la sovralongazione aumenti al diminuire del margine di fase

specifica sul margine di fase

$$m_\phi \geq m_\phi^*$$

garantirà per un sistema a stabilità regolare sia la stabilità asintotica (con un certo margine di robustezza) sia la specifica sulla sovralongazione

$$\hat{s} \leq \hat{s}^*.$$

## 2.5 Il tempo di salita

Continuando l'esempio numerico della sezione precedente, è possibile osservare, in termini qualitativi, come il tempo di salita  $t_s$  sia tanto più piccolo quanto più grande è la *pulsazione di attraversamento*  $\omega_T$  (definita sopra). Per esempio, la pulsazione di attraversamento  $\omega_T$  per la risposta nel grafico di sinistra della Fig. 10, in cui il tempo di salita  $t_s$  vale circa 0.4 sec, risulta pari a 4.3 rad/sec. Riducendo di circa 10 volte la pulsazione di attraversamento, cioè utilizzando un controllore  $C(s)$  che fornisca una  $\omega_T = 0.4$  rad/sec (ma lasciando pressoché invariato il margine di fase), si ottiene un tempo di salita  $t_s$  10 volte maggiore, circa pari a 4.2 sec (vedasi Fig. 11).

In generale, la specifica sul tempo di salita si traduce nel fissare la pulsazione di attraversamento  $\omega_T$  a un valore  $\omega_T^*$ .

## 2.6 Le specifiche sul transitorio e di stabilità asintotica nel dominio della frequenza

Quanto visto su un esempio numerico nelle sezioni precedenti vale in effetti in generale: ciò può essere mostrato notando che qualsiasi sistema è riconducibile con buona approssimazione a un sistema caratterizzato da un polo reale dominante o da una coppia di poli complessi dominanti per i quali le proprietà viste risultano verificabili con relativa facilità. In conclusione, almeno per i sistemi a stabilità regolare, le specifiche di stabilità asintotica e sul transitorio si traducono nelle seguenti specifiche sui diagrammi di Bode della funzione di trasferimento a catena aperta  $F(s)$ :

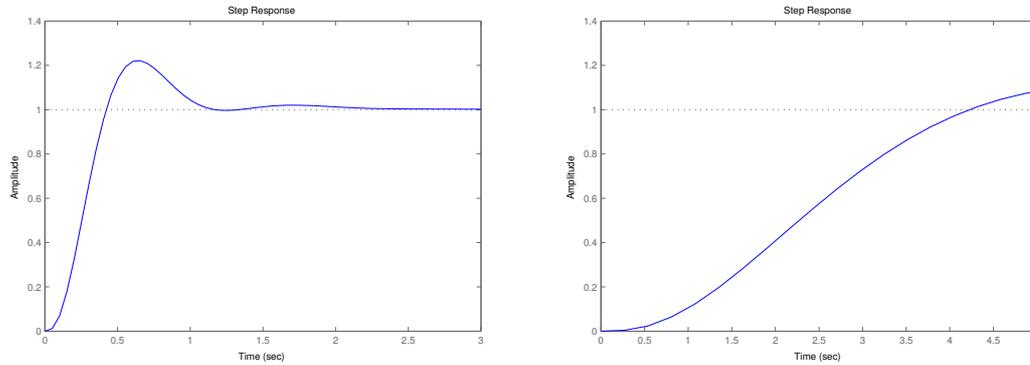


Figure 11: Nel grafico a destra viene riportata la risposta al gradino del sistema a stabilità regolare considerato come esempio nella sezione 2.4 riducendo di circa 10 volte rispetto alla situazione del grafico a sinistra della Fig. 10 (che qui si riporta a sinistra per comodità) la pulsazione di attraversamento  $\omega_T$

Specifiche di STAB. ASINTOTICA e sul TRANSITORIO per un sistema a stabilità regolare
--------------------------------------------------------------------------------------

$\omega_T \approx \omega_T^*$ (riferita alla specifica $t_s \approx t_s^*$ )
------------------------------------------------------------------------------

$m_\phi \geq m_\phi^*$ (che garantisce nel caso di stabilità regolare la stabilità asintotica e $\hat{s} \leq \hat{s}^*$ )
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Si noti come la prima specifica sia facoltativa se non si è interessati a fissare il tempo di salita. La seconda specifica invece è obbligatoria in quanto non si può prescindere mai dalla stabilità asintotica.

Il progetto quindi viene ultimato introducendo nel controllore  $C(s)$  una funzione  $C_2(s)$  del tipo indicato in precedenza (cioè rapporto di due polinomi in  $s$  con termine noto unitario) in modo da modificare i diagrammi di Bode della  $F(s)$  per ottenere il margine di fase e, nel caso sia presente, la pulsazione di attraversamento richiesti. A tal fine la  $C_2(s)$  sarà ottenuta come prodotto di opportune reti correttive (dette ritardatrici e anticipatrici) che verranno definite nel seguito.

Si fa notare infine come il passaggio dalle specifiche nel tempo  $t_s \approx t_s^*$  e  $\hat{s} \leq \hat{s}^*$  alle corrispondenti specifiche in frequenza  $\omega_T \approx \omega_T^*$  e  $m_\phi \geq m_\phi^*$  (ossia dalle quantità  $t_s^*$  e  $\hat{s}^*$  alle quantità  $\omega_T^*$  e  $m_\phi^*$ ) viene generalmente fatto in modo approssimativo mediante alcune relazioni empiriche (non presentate in questo corso). Questo significa che, a progetto ultimato, la scelta di  $m_\phi^*$  e  $\omega_T^*$  potrebbe non produrre la sovraelongazione e il tempo di salita desiderati. In questo caso si agisce di conseguenza: se il tempo di salita ottenuto è sensibilmente maggiore di  $t_s^*$  si aumenta  $\omega_T^*$  mentre se il tempo di salita ottenuto è sensibilmente minore di  $t_s^*$  si diminuisce  $\omega_T^*$ , riprogettando di conseguenza il controllore. Analogamente, se la sovraelongazione ottenuta è sensibilmente maggiore di  $\hat{s}^*$ , si aumenta il margine di fase  $m_\phi^*$ , riprogettando di conseguenza il controllore (si ricorda che la specifica sulla sovraelongazione è  $\hat{s} \leq \hat{s}^*$  e pertanto, se si ottiene una sovraelongazione minore di quella richiesta, il progetto è comunque corretto). Questa serie di tentativi per l'individuazione dei valori corretti di  $m_\phi^*$  e  $\omega_T^*$  (tali da garantire le specifiche su sovraelongazione e tempo di salita) richiede una certa esperienza e giustifica il nome di queste tecniche di sintesi del controllore  $C(s)$ , che vengono infatti dette *tecniche di sintesi per tentativi*. Si fa comunque notare che il modo quantitativo di passare dalle specifiche nel tempo  $t_s^*$  e  $\hat{s}^*$  a quelle in frequenza  $\omega_T^*$  e  $m_\phi^*$  non riguarda le prove di esame dove partiremo direttamente dalle specifiche su  $\omega_T$  e  $m_\phi$ .

## 2.7 Limiti di utilizzo dei margini di stabilità: casi patologici e sistemi a stabilità non regolare

Si è detto che la specifica sul margine di fase assicura con una certa robustezza la stabilità asintotica di  $\Sigma$  nel caso di sistemi a stabilità regolare. Se il sistema non dovesse essere a stabilità regolare (cioè se non soddisfa tutte le proprietà evidenziate in precedenza), la specifica sul margine di fase potrebbe non garantire la stabilità. Nella Fig. 12 per esempio, si fa osservare come, per un sistema a stabilità

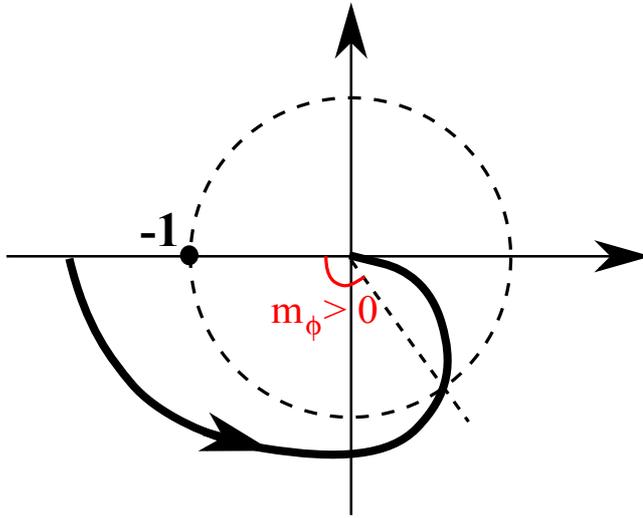


Figure 12: Sistema a stabilità non regolare: qui  $F(s) = -\frac{K}{(1-s\tau)^2}$ , con  $K > 1$ . Il sistema non è a stabilità regolare in quanto ha un coefficiente di guadagno negativo e un polo doppio con parte reale positiva (cioè  $P_p = 2$ ). Il diagramma polare della  $F(s)$  evidenzia un margine di fase positivo, tuttavia  $N = 1$  mentre  $P_p = 2$ , il che, per Nyquist, implica che il sistema  $\Sigma$  che ha  $F(s)$  come funzione di trasferimento a catena aperta, non è asintoticamente stabile

non regolare, un margine di fase positivo non implichi la stabilità asintotica.

Ci sono poi casi in cui i due margini (uno o entrambi) potrebbero non essere ben definiti, o perché non esistenti (in quanto manca l'intersezione del diagramma polare con il cerchio unitario e/o con l'asse reale negativo, vedasi Fig. 13) oppure in quanto non univocamente determinabili (nel caso di intersezioni multiple del diagramma polare col cerchio unitario e/o con l'asse reale negativo, vedasi Fig. 14).

Anche nell'ambito della stabilità regolare, i due margini potrebbero non dare una misura attendibile della distanza del diagramma dal punto  $-1$  e quindi non definire in modo affidabile la specifica di stabilità robusta e quella sulla sovralongazione (si veda la Fig. 15).

In tutti i casi problematici qui esaminati, il problema si risolve ispezionando direttamente il diagramma polare della  $F(s)$  e definendo in modo opportuno dei margini di stabilità che quantifichino in qualche modo la distanza del diagramma polare dal punto  $-1$  (nel caso della Fig. 14 questo per esempio è stato già fatto). Questo esula però dagli scopi di questo corso dove si considereranno per la sintesi del controllore esclusivamente sistemi a stabilità regolare per i quali ha senso considerare i margini di fase e di ampiezza definiti sopra.

## 2.8 Le reti correttrici

Per poter assicurare le specifiche in frequenza sul margine di fase  $m_\phi$  e sulla pulsazione di taglio  $\omega_T$  (che come visto nel caso a stabilità regolare corrispondono a garantire la stabilità asintotica del sistema e un buon comportamento transitorio in termini di velocità e sovralongazione), è necessario agire sui diagrammi di Bode della funzione di trasferimento a catena aperta  $F(s)$  modificandone eventualmente l'andamento. A tal fine si agisce con il blocco di controllo indicato in precedenza con  $C_2(s)$ , il quale, come già osservato, deve avere guadagno unitario in modo da non interferire con la specifica di precisione. Tale blocco viene realizzato componendo, nel modo che si vedrà, dei blocchi elementari detti *reti correttrici*. Questi sono di due tipi:

- a) la *rete anticipatrice*, detta così perché attua un anticipo di fase e viene utilizzata per alzare, se necessario, il diagramma delle fasi della  $F(s)$  in modo da incrementarne il margine di fase fino al valore desiderato;
- b) la *rete ritardatrice*, detta così perché attua un ritardo di fase e viene utilizzata per abbassare, se necessario, il diagramma dei moduli della  $F(s)$  in modo da ottenere la  $\omega_T$  desiderata.

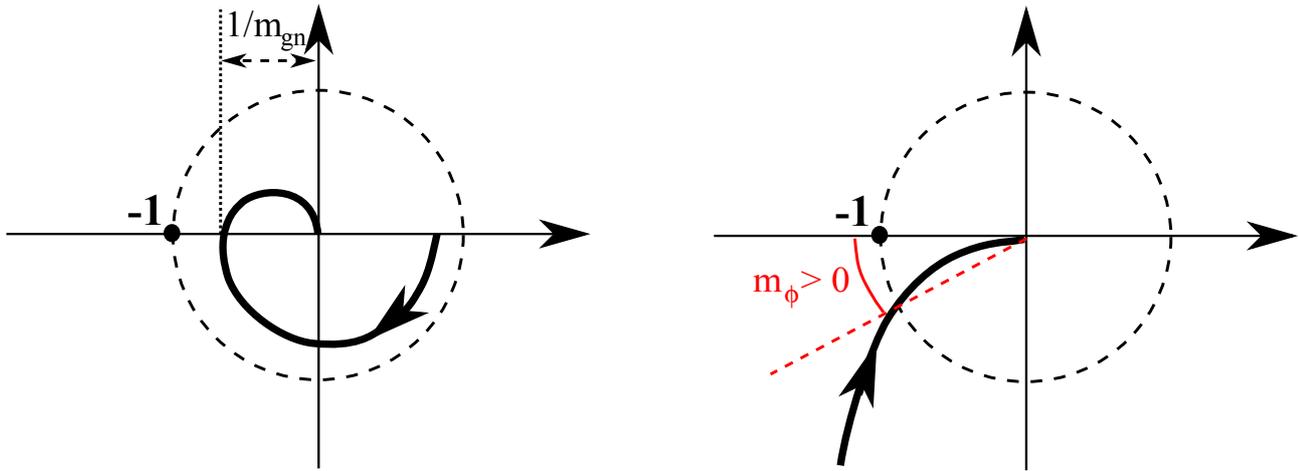


Figure 13: Casi di margini non definiti: a sinistra il margine di guadagno è positivo (cioè il corrispettivo naturale  $m_{gn} > 1$ ) ma non è definito il margine di fase, in quanto manca l'intersezione del diagramma polare col cerchio unitario e quindi non è definita la pulsazione  $\omega_T$  (in realtà, se  $K_F > 0$  e  $P_p = 0$ , questa situazione si può far rientrare nella categoria dei sistemi a stabilità regolare considerando infinito il margine di fase), a destra il margine di fase è positivo ma non è definito il margine di ampiezza, in quanto manca l'intersezione con l'asse reale negativo e quindi non è definita la pulsazione  $\tilde{\omega}$  (in realtà, se  $K_F > 0$  e  $P_p = 0$ , questa situazione si può far rientrare nella categoria dei sistemi a stabilità regolare considerando infinito il margine di ampiezza)

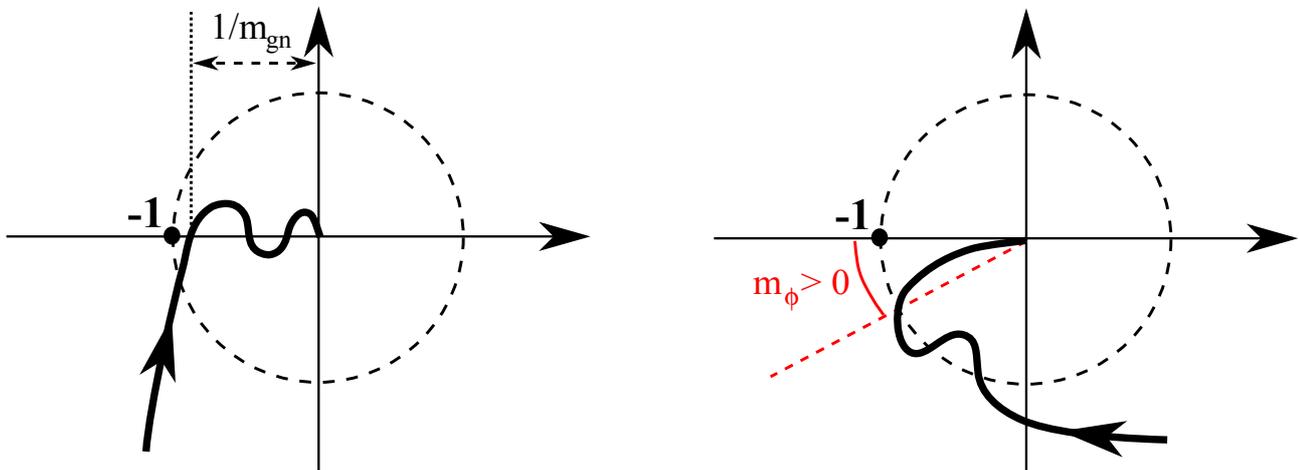


Figure 14: Casi di margini non definiti univocamente: a sinistra il diagramma polare presenta diverse intersezioni con l'asse reale negativo ( $\tilde{\omega}$  non univocamente definita), a destra il diagramma polare presenta diverse intersezioni con il cerchio unitario ( $\omega_T$  non univocamente definita). Questi casi si risolvono facilmente prendendo, nel caso il diagramma sia percorso nel verso indicato in figura, come  $\tilde{\omega}$  la  $\omega$  della prima intersezione con l'asse reale negativo (a sinistra) e come  $\omega_T$  la  $\omega$  dell'ultima intersezione con il cerchio unitario (a destra), definendo di conseguenza i margini come indicato in figura

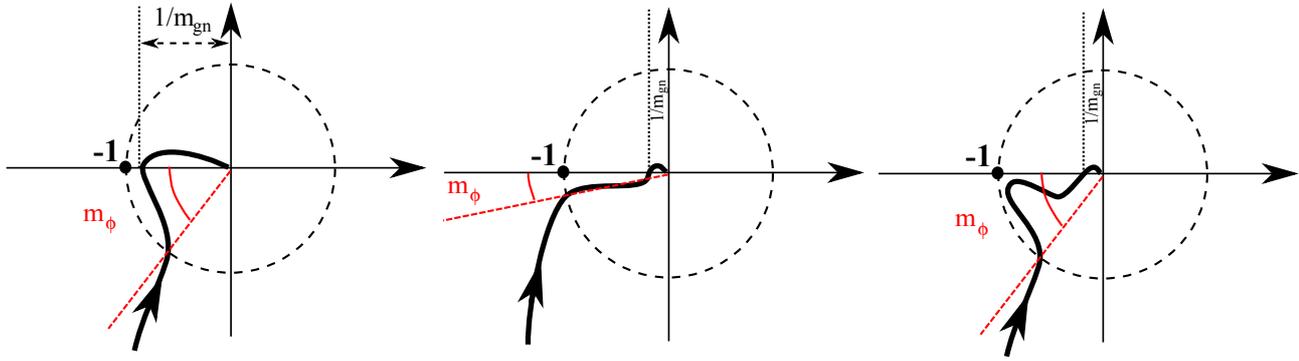


Figure 15: Alcuni casi critici nell'uso dei margini per sistemi a stabilità regolare: a sinistra, pur essendo il margine di fase grande, il diagramma polare passa vicino al punto  $-1$  (ma il margine di guadagno, piccolo in questo caso, mette in luce questo fatto); al centro, pur essendo il margine di guadagno grande, il diagramma polare passa vicino al punto  $-1$  (ma il margine di fase, piccolo in questo caso, mette in luce questo fatto); a destra, pur essendo entrambi i margini grandi, il diagramma polare passa vicino al punto  $-1$

Si noti che normalmente non si ha necessità di abbassare le fasi (in quanto la specifica sul margine di fase richiede che le fasi siano sufficientemente alte) mentre se dovesse essere necessario innalzare i moduli conviene agire aumentando il guadagno  $K_c$  del blocco  $C_1(s)$ , aumento che normalmente comporta anche un miglioramento alla precisione del sistema (quindi generalmente si tenderà a non usare mai una rete ritardatrice per abbassare le fasi né una rete anticipatrice per alzare i moduli).

### 2.8.1 La rete anticipatrice

La funzione di trasferimento di una rete anticipatrice è data da:

$$C_a(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s},$$

dove  $\tau_a > 0$  è una costante di tempo e  $m_a > 1$  un parametro reale. Nel grafico a sinistra della Fig. 16 sono riportati i diagrammi di Bode asintotici della funzione  $C_a(s)$  nell'ipotesi  $m_a < 10$  (per il progetto conviene però avvalersi dei diagrammi esatti riportati sul sito del corso). Si osservi come il massimo del diagramma delle fasi (che nel diagramma asintotico vale  $45 \cdot \log_{10}(m_a)$  gradi) aumenti all'aumentare di  $m_a$  arrivando ad un massimo di  $90^\circ$  quando  $m_a$  supera 100. Aumentando ulteriormente  $m_a$  il massimo rimane comunque a  $90^\circ$ . Se ne deduce che se si vuole alzare la fase per più di  $90^\circ$ , occorrerà utilizzare più di una rete anticipatrice (in realtà, poiché i diagrammi esatti della rete anticipatrice riportati sul sito coprono valori di  $m_a$  fino a 16, cui corrisponde un massimo della fasi pari a circa  $62^\circ$ , risulterà necessario usare due o più reti già a partire da questo valore). Si nota inoltre come l'effetto sui moduli sia permanente (cioè l'innalzamento dei moduli permane per tutte le  $\omega$  maggiori di  $m_a/\tau_a$ ) mentre le fasi tornano a 0.

### 2.8.2 La rete ritardatrice

La funzione di trasferimento di una rete ritardatrice è data da:

$$C_r(s) = \frac{1 + \frac{\tau_r}{m_r} s}{1 + \tau_r s},$$

dove  $\tau_r > 0$  è una costante di tempo e  $m_r > 1$  un parametro reale. Dal confronto tra  $C_a(s)$  e  $C_r(s)$  si comprende anche il motivo per cui si è richiesto  $m_a$  e  $m_r$  maggiori di uno: se  $m_a$  infatti fosse minore di uno, la  $C_a(s)$  sarebbe in realtà una rete ritardatrice (e analogamente la  $C_r(s)$  sarebbe una rete anticipatrice se  $m_r$  fosse minore di uno). Nel grafico a destra della Fig. 16 sono riportati i diagrammi di Bode asintotici della funzione  $C_r(s)$  nell'ipotesi  $m_r < 10$ . Si osserva come l'abbassamento finale

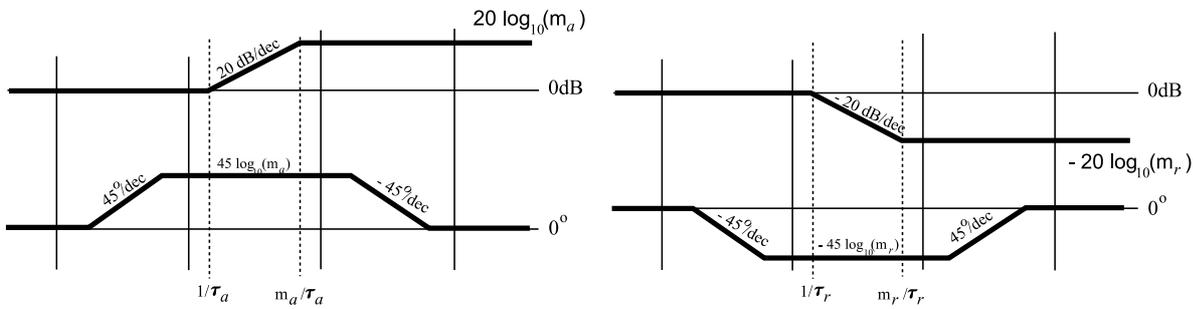


Figure 16: Diagramma di Bode asintotico di una rete anticipatrice con  $m_a < 10$  (a sinistra) e di una rete ritardatrice con  $m_r < 10$  (a destra)

(cioè per  $\omega$  grandi) sui moduli (che, come si vedrà, è quello che serve in sede di progetto) è pari a  $20 \cdot \log_{10}(m_r)$  dB. Questo valore aumenta all'aumentare di  $m_r$ , in questo caso senza limiti. In generale la rete ritardatrice si usa per abbassare i moduli e, se l'abbassamento desiderato risulta pari a  $\Delta M$ , il valore di  $m_r$  si sceglie imponendo  $\Delta M = 20 \cdot \log_{10}(m_r)$ , ossia prendendo  $m_r = 10^{\Delta M/20}$ . In alternativa si possono usare i diagrammi esatti delle reti anticipatrici riportati sul sito cambiando di segno all'asse delle ordinate per ottenere i diagrammi esatti di una rete ritardatrice.

In ogni caso, il modo con cui si utilizzano queste reti è illustrato nell'esempio riportato nelle pagine seguenti, che rappresenta anche il caso più completo di sintesi dal momento che sono presenti entrambe le specifiche (su  $m_\phi$  e su  $\omega_T$ ) e occorre sia alzare le fasi sia abbassare i moduli. In generale in un progetto non tutti questi passi sono richiesti con la conseguenza che il lavoro necessario risulta in molti casi ridotto.

## Esercizio di sintesi per tentativi.

①

Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{1}{(1+s)(1+s/3)}$$

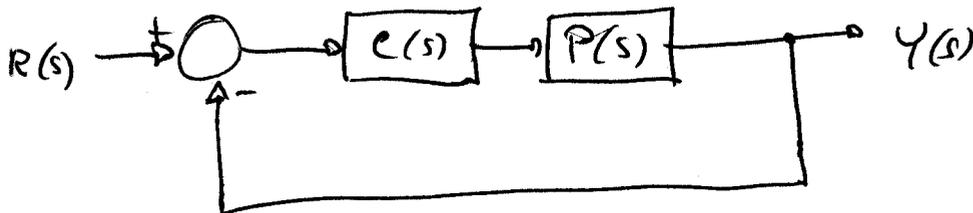
progettare un controllore affinché si abbia:

- una precisione rispetto a un riferimento  $r(t) = t$ , con  $K_d = 1$ , pari a  $E_{\infty} \leq 0.05$
- $m_{\phi} \geq 50^\circ$
- $\omega_T \approx 5$  rad/sec

N.B. La specifica sul margine di fase assicura l'as. stab e una sovraccoscillazione  $\hat{\sigma}$  contenuta ( $\hat{\sigma} \leq \hat{\sigma}^*$ );  $\omega_T$  vincola invece il tempo di salita  $t_s$ .

## Soluzione

Utilizziamo lo schema in contrazione dove  $h_0 = 1/K_d = 1$ .



Essendo il riferimento di tipo  $K=1$ , il sistema dovrà essere di tipo  $\nu=1$  per avere un errore a regime finito

$$\Rightarrow C(s) = \frac{K_c}{s}$$

L'errore a regime  $\bar{e}$  dato da

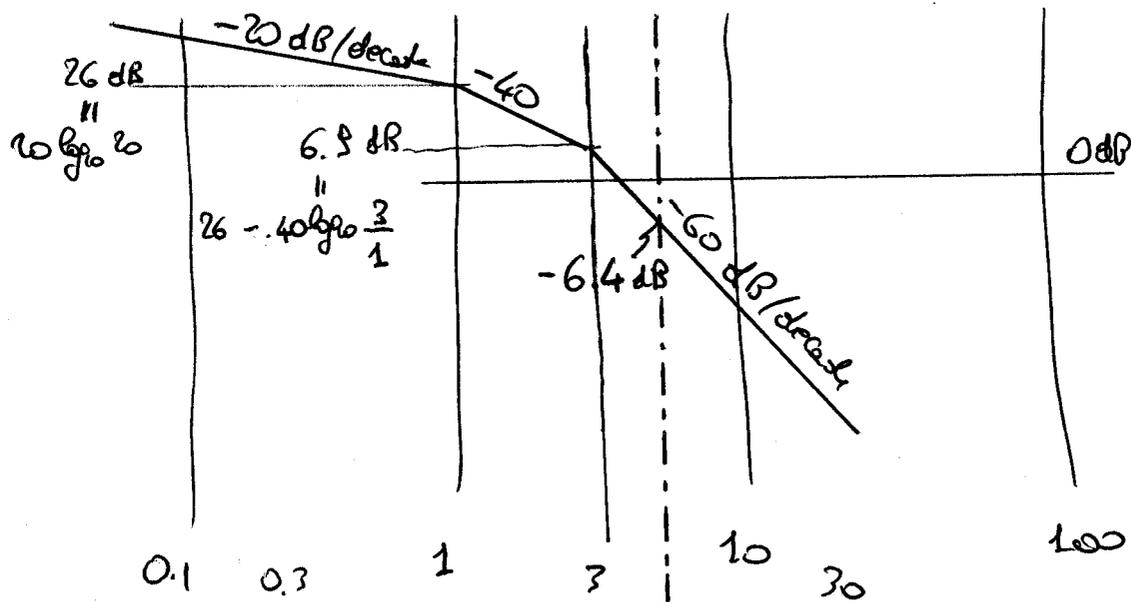
$$E_{\infty} = \frac{K_d^2}{K_G} = \frac{1}{K_c \cdot K_p} = \frac{1}{K_c} \leq 0.05$$

$$\Rightarrow K_c \geq 20 \rightarrow \boxed{K_c = 20}$$

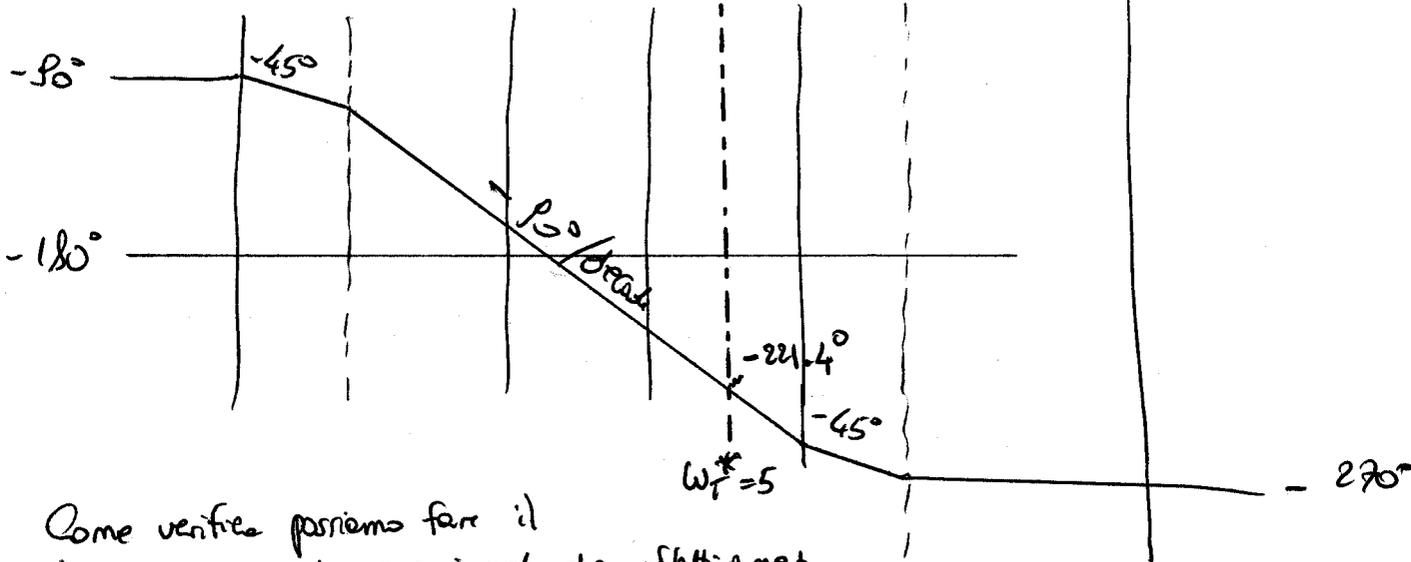
# Il controllore

$$C(s) = \frac{20}{s}$$

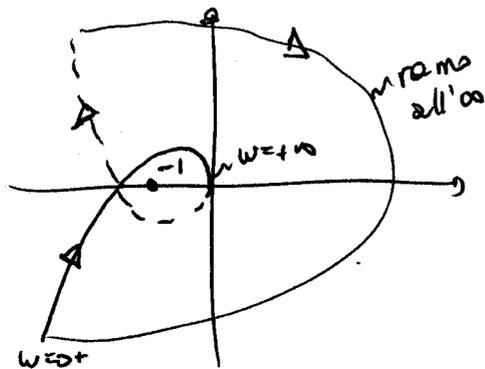
esaminare la specifica di precisione. Occorre completarlo per assicurare anche le altre specifiche (che hanno senso perché il sistema è a stab regolare).  
 Facciamo i diagrammi di Bode di  $C(s) \cdot P(s) = \frac{20}{s(1+s)(1+s/3)}$



$\tau_1 = 1$   
 $\tau_2 = 1/3$   
 $\downarrow$   
 $-\frac{1}{\tau_1} = -1$   
 $-\frac{1}{\tau_2} = -3$



Come verifica possiamo fare il diagramma polare, da cui si vede che effettivamente il sistema è a stab regolare:



A  $w = w_c^* = 5$ , pulsazione di attraversamento desiderato,  $\phi(w_c^*) = -221.4^\circ$ , mentre, per soddisfare la specifica su  $m_p$ , dovrebbe essere  $-180 + 50 = -130^\circ$  (almeno)

Occorre alzare la fase di circa  $90^\circ$ , perché occorra portarla da  $-221.4^\circ$  a  $-130^\circ$ .

Usiamo due reti anticipatrici (una non basta), del tipo:  
perché  $m_a \leq 20$  circa

$$C_a(s) = \frac{1 + T_a s}{1 + \frac{T_a s}{m_a}}$$

Per scegliere  $T_a$  e  $m_a$ , dal diagramma delle ~~moduli~~ <sup>fasi</sup> delle reti correttive si vede che con  $m_a = 6$  ha un innalzamento max della fase pari a circa  $45^\circ$ , quindi con due reti in cascata otterremo l'effetto voluto di <sup>circa</sup>  $90^\circ$ .  $T_a$  deve essere scelto in modo che il max si abbia per  $\omega = \omega_T^* \approx 5$ . Nell'ascissa delle reti correttive si legge che il max si ha per  $\omega T_a = 2.5$  circa. Imponiamo pertanto

$$\omega_T^* T_a = 2.5 \implies T_a = \frac{2.5}{\omega_T^*} = \frac{2.5}{5} = 0.5$$

Quindi:  $m_a = 6$        $T_a = 0.5$

Il problema è che le reti anticipatrici oltre anche i moduli. In corrispondenza di  $\omega_T^* = 5$ , l'innalzamento è pari a

$2 \times 8 \text{ dB}$   
2 reti anticipatrici:  $\implies$  dal diagramma dei moduli delle reti correttive con  $\omega T_a = 2.5$  e  $m_a = 6$

Quindi il diagramma dei moduli passa da  $-6.4 \text{ dB}$  a  $-6.4 + 2 \times 8 = 9.6 \text{ dB}$ .

Siccome  $\omega_T^*$  deve essere la freq. di attraversamento occorre abbassare il diagramma dei moduli di  $9.6 \text{ dB}$ . Non si può fare col  $K_c$ , perché questo ridurrebbe la precisione, usiamo una rete retardatrice:

$$C_R(s) = \frac{1 + \frac{\tau_R}{m_R} s}{1 + \tau_R s}$$

$m_R$  si sceglie dal diagramma dei moduli delle reti connette (cambiato di segno) in modo che il max dell'inaltamento del modulo (pari a  $20 \log_{10} m_R$ ) sia pari a  $\approx 9.6 \text{ dB} \Rightarrow \boxed{m_R \approx 3}$

$\tau_R$  è tale che le fasi intorno a  $\omega_T^*$  restino come prima.   
~~Or,~~ l'effetto sulle fasi si esaurisce in 2 o 3 decade, sceglieremo  $\tau_R$  in modo che  $\frac{1}{\tau_R} \ll \omega_T^*$  (due o 3 ordini di grandezza più piccolo)

Per esempio  $\boxed{\tau_R = 1000}$

Il controller complesso è:

$$C(s) = \frac{20}{s} \left( \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s} \right)^2 \frac{1 + \frac{\tau_R}{m_R} s}{1 + \tau_R s}$$

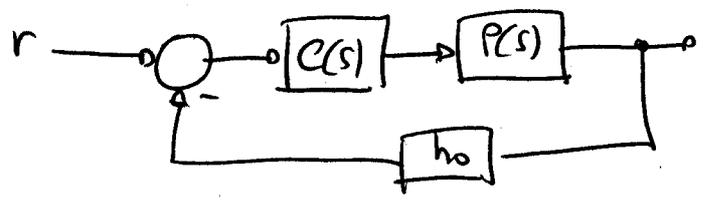
Con  $\tau_a = 0.5$ ,  $m_a = 6$ ,  $\tau_R = 1000$ ,  $m_R = 3$ .

N.B. Esercizi svolti di questo tipo possono essere trovati nel testo di esercizi Tornambò Vitelli Volgi disponibili in biblioteca. Se le specifiche nel testo sono date in termini di banda passante ( $B_p$ ) e modulo alla risonanza ( $M_R$ ) è sufficiente svolgere l'esercizio a partire dal punto in cui queste specifiche sono tradotte in  $\omega_T$  e  $m$ .

N.B. La scelta di  $C(s)$  non è chiaramente l'unica possibile.

Sintesi di un controller dipendente da un parametro  $K$  con Routh.

Esempio



$$P(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$r(t) = \frac{t^2}{2}, \quad K_d = 4$$

Progettare  $C(s)$ , del tipo  $\frac{K_c}{s^2}$ , in modo che:

- $E_{ss} \leq 0.01$
- a.s. stabilità

Soluzione

$$K_d = 4 \rightarrow h_0 = 1/4$$

$K_c = 2$  (rif. di tipo 2)  $\rightarrow v = 2 \rightarrow d = 1$  (un polo in  $\phi$  l'ha già  $P(s)$ )

$$E_{ss} = \frac{K_d^2}{K_G} = \frac{16}{K_c} \leq 0.01 \Rightarrow \boxed{K_c \geq 1600} \quad (2)$$

Per l'as. stab. applica Routh al denominatore di  $W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+h_0 P(s)C(s)}$

che vale

$$\text{den. } W(s) = s^2(s^2+1) + 0.25 K_c = s^4 + s^2 + 0.25 K_c$$

Poiché i coeff. di  $s^3$  e  $s^1$  sono  $\phi$ ,  $\nexists$  nessun  $K_c$  ~~positivo~~ che dia l'as. stab.

$\Rightarrow$  Non ha soluzione. (cioè non lo si può stab. con un controller del tipo  $\frac{K_c}{s^2}$ )

Nota Se da Routh venisse un'altra condiz. su  $K_c$ , questa andrebbe messa a sistema con la (2). Come p.es.:

$$\left. \begin{array}{l} K_c \geq K_{c0} \text{ per la precisione} \\ K_c \leq K_{c1} \text{ per Routh} \end{array} \right\} K_{c0} \leq K_c \leq K_{c1}$$

# Esempio diagramma polare

(4)

$$P_{12}(s) = \frac{32(s+0.5)}{s(s+1)(s^2+4)} = 4 \frac{1+2s}{s(1+s)(1+s^2/4)}$$

$$\tau_n = 2 \rightarrow 1/\tau_n = 0.5$$

$$\tau_d = 1 \rightarrow 1/\tau_d = 1$$

$$\omega_n = 2, \zeta = 0^+$$

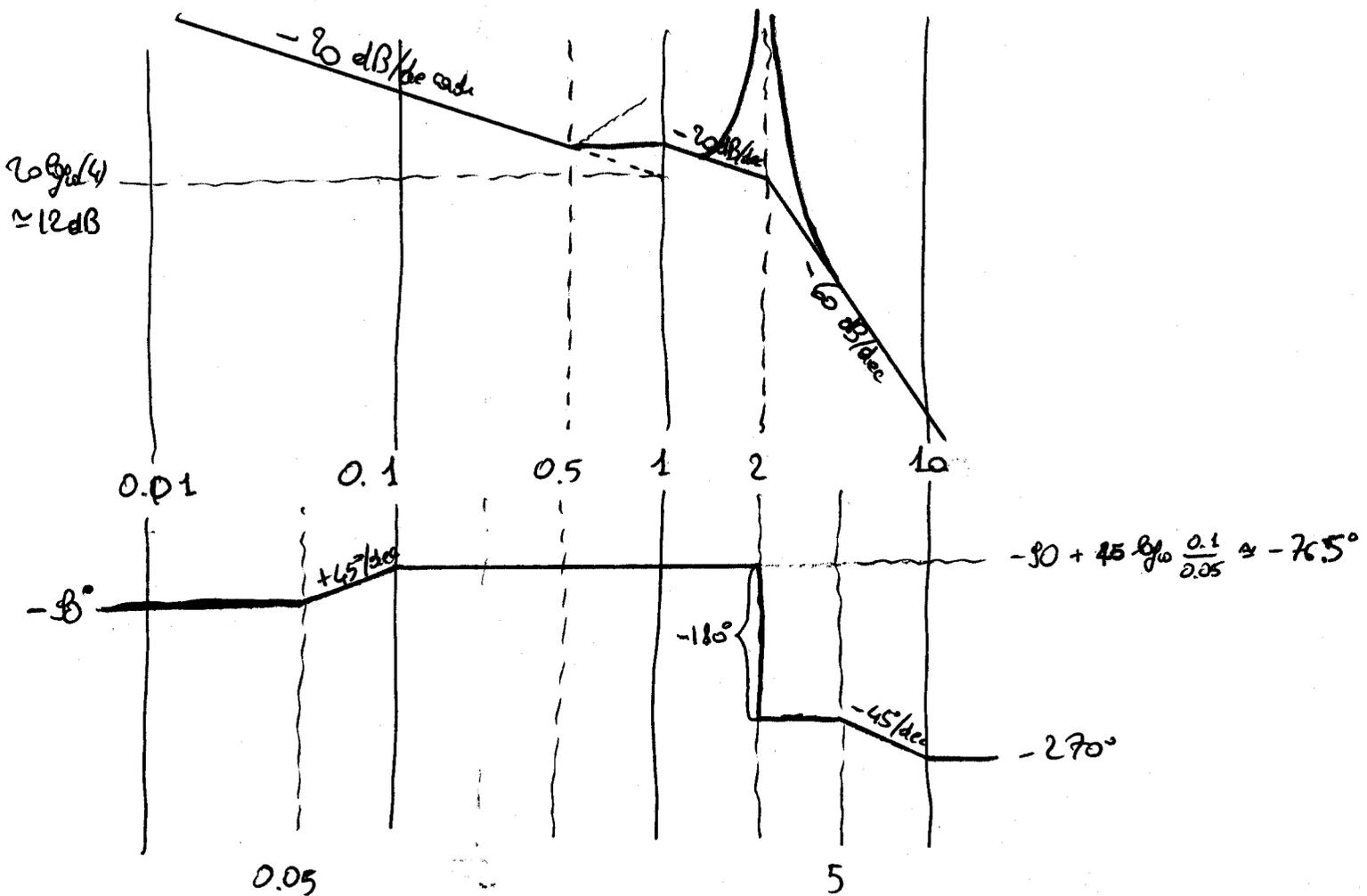
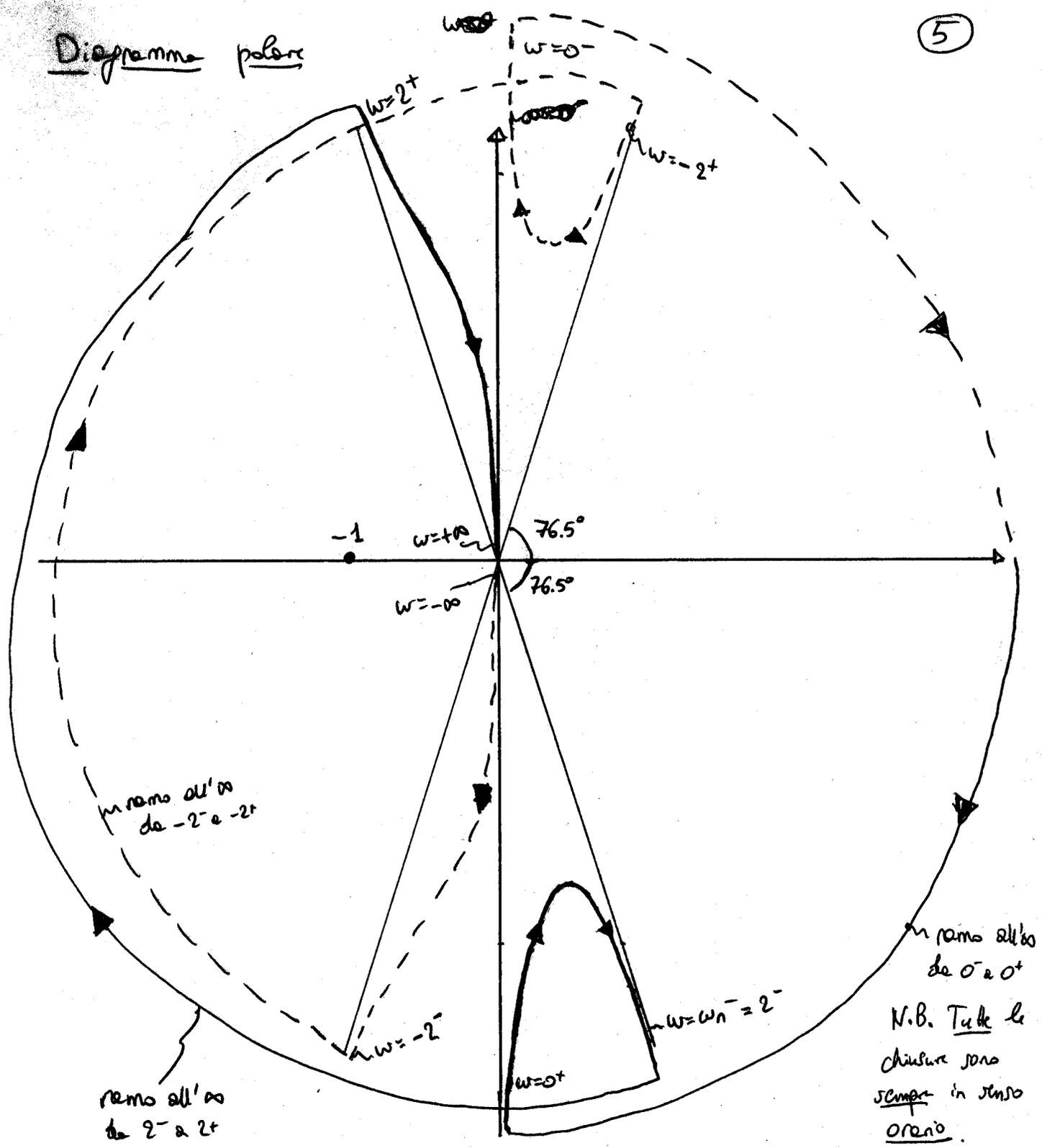
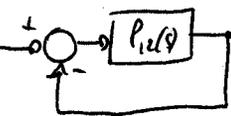


Diagramma polo



$N = -2$  (due poli reali attorno a  $-1$ )

$P_p = 0$

$\Rightarrow N \neq P_p \Rightarrow$  INSTABILE (il sistema  è instabile)

N.B. Un sistema di questo esercizio non è a stato regolare.

Esempio di diagramma polare

$$P_f(s) = \frac{s-2}{(s+2)(s^2+1000)} = - \frac{0.001 (1-s/2)}{(1+s/2)(1+s^2/1000)}$$

$\tau_n = 0.5 \rightarrow 1/\tau_n = 2$   
 $T_d = 0.5 \rightarrow 1/T_d = 2$   
 $\omega_n = \sqrt{1000} \approx 31.6, \quad \zeta = 0^+$

$20 \log_{10}(0.001) = -60 \text{ dB}$

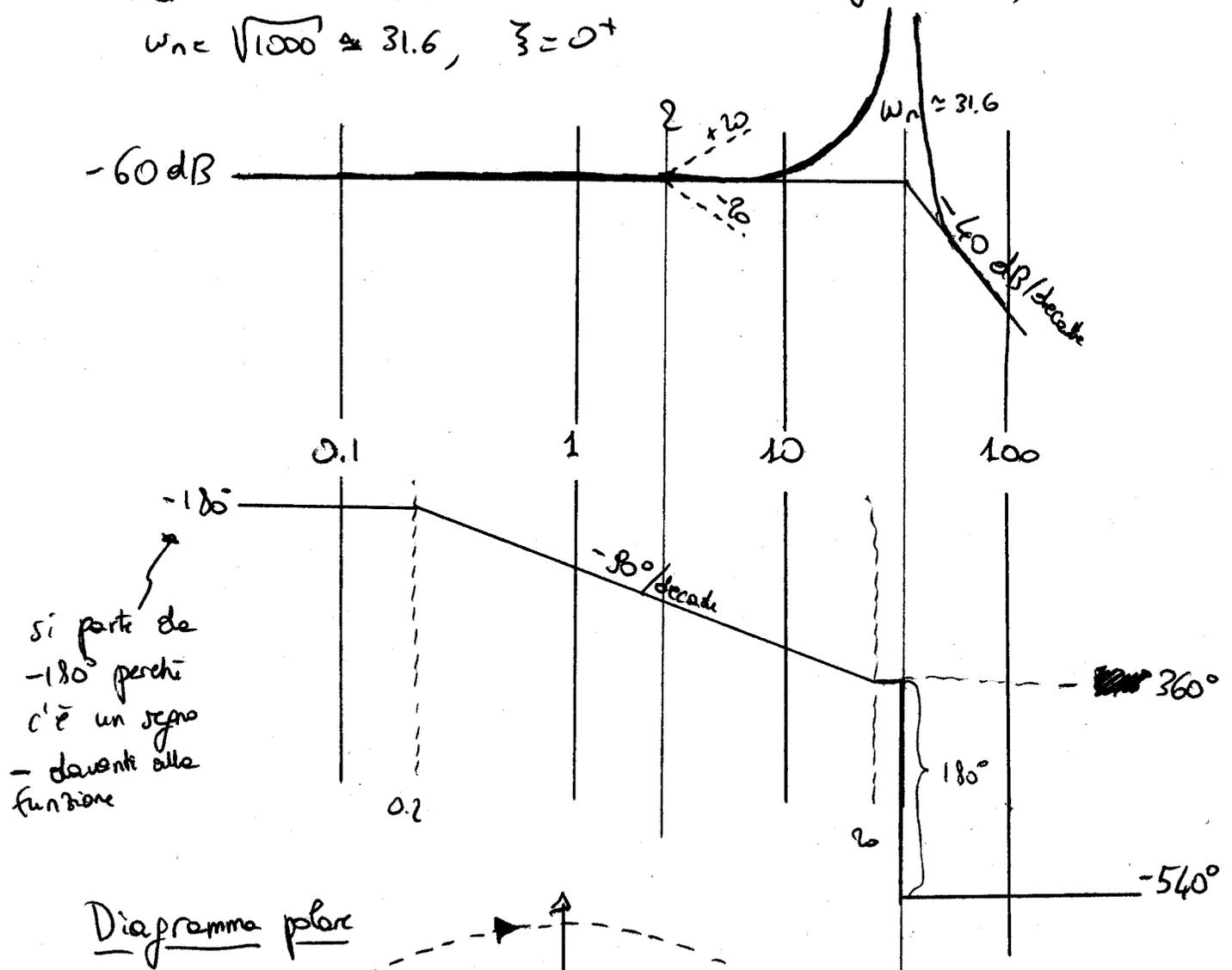


Diagramma polare

