

Il luogo delle radici

In alcuni casi, la sintesi per tentativi basata sulla risposta in frequenza potrebbe non essere la via più agevole da seguire per il progetto di un sistema di controllo in controreazione. Questo per esempio capita quando si ha a che fare con un sistema a stabilità non regolare, cioè per esempio nel caso in cui il processo da controllare abbia qualche polo con parte reale positiva.

In questi casi si può fare ricorso ad altri metodi di sintesi, tra i quali troviamo quello basato sul cosiddetto *luogo delle radici*. Si tratta di un metodo che, al pari di quello discusso nelle lezioni precedenti (basato su Nyquist), fa riferimento a un sistema in retroazione come quello mostrato in Fig. 1 e si basa sempre sullo studio della funzione di trasferimento $F(s) = h_0 P(s) C(s)$ in catena aperta. In tale figura al solito $P(s)$ può essere vista come la funzione di trasferimento di un processo da controllare, $C(s)$ come un blocco di controllo (da progettare) e h_0 come la costante di guadagno di un sensore, che misura l'uscita $y(t)$ del processo e la confronta con un segnale di riferimento $r(t)$, la cui trasformata $R(s)$ è indicata in figura. Anche h_0 è un parametro che può essere assegnato dal progettista, così come visto in precedenza.

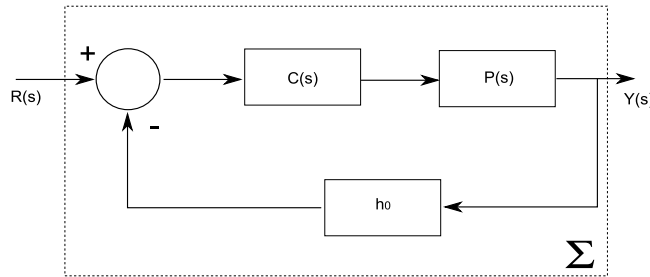


Figure 1: Schema di controllo in catena chiusa (controreazione o retroazione)

Sempre in analogia al criterio di Nyquist, i metodi basati sul luogo delle radici possono essere utilizzati sia per studiare la stabilità di un sistema in controreazione (analisi), sia per avere indicazioni su come progettare il blocco di controllo $C(s)$ che stabilizzi il sistema complessivo (sintesi). In queste pagine ci occuperemo del luogo delle radici utilizzato solo come strumento di analisi lasciando la sintesi a corsi successivi.

Definizioni e nozioni preliminari

Assumeremo nel seguito che la funzione $F(s)$ sia razionale strettamente propria (è questo il caso che nella pratica ha più interesse) e la scriveremo nella seguente forma:

$$F(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad (1)$$

che mette in luce gli zeri z_i e i poli p_j di $F(s)$, ossia le radici (eventualmente complesse) rispettivamente del polinomio a numeratore e a denominatore di $F(s)$. Avendo assunto $F(s)$ strettamente propria, si ha $n > m$. I vari z_i , così come anche i p_j , non sono necessariamente tutti distinti tra loro ma assumeremo sempre, come anche fatto in precedenza, che non ci siano semplificazioni tra numeratore e denominatore (ossia che nessuno zero z_i coincida con qualche polo p_j).

La forma di $F(s)$ riportata in (1) differisce da quella utilizzata per il tracciamento dei diagrammi di Bode in cui i vari fattori avevano termine noto pari a 1. In particolare, nel caso più generale comprendente anche possibili radici complesse, tale forma era del seguente tipo:

$$F(s) = K \frac{(1 \pm s\tau_{n1})(1 \pm s\tau_{n2}) \cdots (1 + \frac{2\zeta_{n1}}{\omega_{nn1}} s + \frac{s^2}{\omega_{nn1}^2})(1 + \frac{2\zeta_{n2}}{\omega_{nn2}} s + \frac{s^2}{\omega_{nn2}^2}) \cdots}{s^{\nu} (1 \pm s\tau_{d1})(1 \pm s\tau_{d2}) \cdots (1 + \frac{2\zeta_{d1}}{\omega_{nd1}} s + \frac{s^2}{\omega_{nd1}^2})(1 + \frac{2\zeta_{d2}}{\omega_{nd2}} s + \frac{s^2}{\omega_{nd2}^2}) \cdots} \quad (2)$$

In effetti questo è il motivo per cui si è introdotta la notazione K' , essendo K il coefficiente di guadagno che appare nella forma utilizzata per i diagrammi di Bode (cioè in (2)). Confrontando le due scritte, è facile vedere come K e K' siano legati (anche nel caso di radici complesse) dalla seguente relazione:

$$K = K' \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j:p_j \neq 0} (-p_j)}.$$

Il coefficiente K' viene spesso detto *coefficiente di guadagno ad alta frequenza*, perché in effetti caratterizza il comportamento del modulo di $F(j\omega)$ quando la pulsazione ω (e quindi la frequenza) tende all'infinito (infatti, ponendo $s = j\omega$ e facendo tendere ω all'infinito, il modulo di $F(j\omega)$ si comporta come $K'\omega^{m-n}$).

Ora, la funzione di trasferimento del sistema complessivo in catena chiusa è data da:

$$W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + h_0 P(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{h_0} F(s)}{1 + F(s)}.$$

Sostituendo in tale espressione la forma di $F(s)$ indicata in (1) e moltiplicando quindi sopra e sotto per il denominatore di $F(s)$, si ottiene:

$$W(s) = \frac{\frac{K'}{h_0} \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)}}{1 + K' \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)}} = \frac{\frac{K'}{h_0} \prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j) + K' \prod_{i=1}^m (s-z_i)}.$$

Dalla precedente si vede come il denominatore di $W(s)$ sia il polinomio

$$f(s, K') = \prod_{j=1}^n (s-p_j) + K' \prod_{i=1}^m (s-z_i). \quad (3)$$

Poiché abbiamo supposto $m < n$, tale polinomio ha grado n (pari a quello del denominatore della $F(s)$) e quindi avrà n radici. Tali radici sono i poli della $W(s)$ e quindi gli autovalori del sistema in catena chiusa: la posizione di tali radici determina quindi la stabilità del sistema retroazionato, che sarà tanto più assicurata quanto più tali radici si trovano in una regione del piano complesso opportunamente a sinistra dell'asse immaginario. È dunque importante avere un metodo per studiare la posizione nel piano complesso delle radici del polinomio $f(s, K')$.

In questo contesto si situa il *luogo delle radici*, che è definito come *il percorso che le radici di $f(s, K')$ fanno nel piano complesso al variare di K'* . In sostanza il luogo delle radici permette di rispondere alla domanda: **per quali valori di K' , se ce ne sono, il sistema in catena chiusa con funzione di trasferimento a catena aperta $F(s)$ è asintoticamente stabile (oppure ha le radici in una certa regione desiderata del piano complesso)?**

In realtà, come accadeva per Nyquist, disegnato il luogo delle radici di una certa $F(s)$, si può fare molto di più: guardando il luogo è possibile intuire quali “aggiunte” in $F(s)$ possono modificare il luogo per fare in modo che, per un certo valore di K' , tutte le radici di $f(s, K')$ si trovino in una certa regione desiderata del piano complesso. In questo modo il **luogo delle radici diventa anche uno strumento di sintesi**, cioè uno strumento per trovare una funzione $C(s)$ che modifichi il luogo nel modo voluto.

Parleremo di *luogo positivo* riferendoci al percorso delle radici di $f(s, K')$ per $K' \geq 0$, cioè per K' che varia da 0 a $+\infty$ e di *luogo negativo* riferendoci al percorso delle radici di $f(s, K')$ per $K' \leq 0$, cioè per K' che varia da $-\infty$ a 0.

Esempio preliminare 1

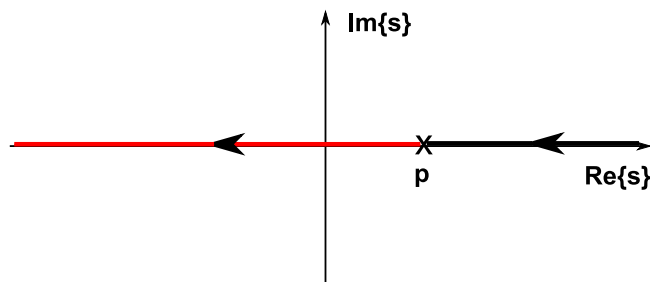


Figure 2: Il luogo delle radici di $F(s) = K' \frac{1}{s-p}$, $p > 0$: in rosso il luogo positivo, in nero quello negativo. Le frecce indicano il verso con cui si muovono le radici per K' crescente. La crocetta rappresenta la posizione del polo a catena aperta

Si consideri la funzione di trasferimento a catena aperta

$$F(s) = K' \frac{1}{s-p},$$

con $p > 0$. Si ha che la funzione:

$$f(s, K') = s - p + K'$$

avrà come unica radice $s = p - K'$. Al variare di K' da 0 a $+\infty$, questa radice si muoverà sull'asse reale da p (polo della funzione a catena aperta $F(s)$) a $-\infty$. Per quanto riguarda i K' negativi, la radice si muoverà da $+\infty$ a p . La radice di $f(s, K')$ è il polo della funzione di trasferimento $W(s)$ a catena chiusa: per i valori di K' per cui questa radice ha parte reale strettamente negativa, il sistema a catena chiusa è asintoticamente stabile. In questo caso ciò capita chiaramente per tutti i valori di $K' > p$. Il luogo delle radici di questa funzione è rappresentato in Fig. 2.

Esempio preliminare 2

Si consideri la funzione di trasferimento a catena aperta

$$F(s) = K' \frac{1}{s(s+p)},$$

con p ancora un numero (reale) positivo. Si ha che la funzione:

$$f(s, K') = s(s+p) + K' = s^2 + ps + K'$$

avrà come radici

$$s_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - K'}.$$

Per $K' \leq p^2/4$ le due radici sono reali e sono disposte simmetricamente rispetto al punto $-\frac{p}{2}$. Per $K' > p^2/4$ le due radici diventano complesse coniugate e hanno parte reale pari a $-\frac{p}{2}$. Si noti come, anche in questo esempio, per $K' = 0$, le due radici di $f(s, K')$ coincidono con i due poli della funzione di trasferimento a catena aperta $F(s)$ (che sono $s = 0$ e $s = -p$). Anche in questo caso (come nell'esempio precedente), quando $|K'|$ va all'infinito le radici vanno all'infinito. Il luogo delle radici di questa funzione è rappresentato in Fig. 3. Si ricorda ancora

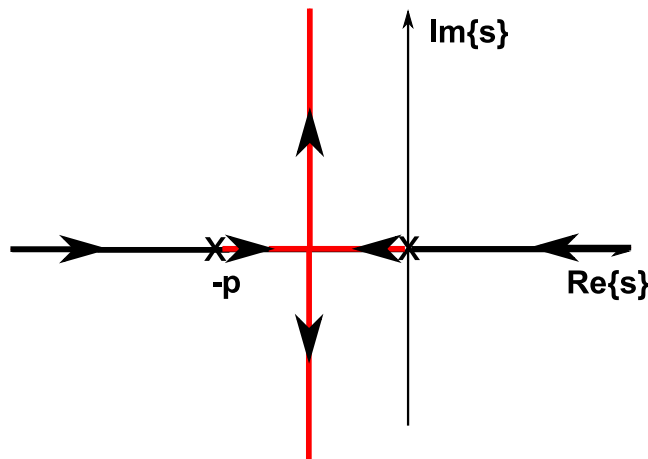


Figure 3: Il luogo delle radici di $F(s) = K' \frac{1}{s(s+p)}$, $p > 0$: in rosso il luogo positivo, in nero quello negativo. Le frecce indicano il verso di K' crescente.

una volta che le radici di $f(s, K')$ sono i poli della funzione di trasferimento $W(s)$ a catena chiusa: per i valori di K' per cui queste radici hanno parte reale strettamente negativa, il sistema a catena chiusa è asintoticamente stabile. Osservando la Fig. 3, si vede chiaramente come il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile per tutti i valori strettamente positivi di K' mentre presenta una radice non negativa per tutti i $K' \leq 0$.

Proprietà

Negli esempi precedenti è stato possibile tracciare il luogo delle radici in quanto era nota la formula che permetteva il calcolo delle radici stesse (equazioni rispettivamente di primo e secondo grado). Nel caso di polinomi di grado maggiore, tuttavia, il tracciamento del luogo non è così semplice. È proprio per questo motivo che nel seguito verranno presentate alcune proprietà generali del luogo delle radici che permetteranno di individuare alcune regole abbastanza semplici di carattere generale che, a loro volta, consentiranno di avere indicazioni molto preziose sul tracciamento del luogo. Procediamo quindi a descrivere alcune proprietà che caratterizzano il luogo delle radici.

- **Proprietà 1: il luogo ha n rami.** Il polinomio $f(s, K')$ per ogni valore di K' ha n radici. Al variare di K' queste n radici si muovono nel piano complesso: il luogo è quindi composto da n rami, dove il ramo

i -esimo è il percorso della radice i -esima al variare di K' . Per $K' = 0$ le radici di $f(s, K')$ sono proprio i poli della funzione a catena aperta $F(s)$. Infatti, se $K' = 0$, la (3) diventa:

$$f(s, K') = \prod_{j=1}^n (s - p_j),$$

e si vede come le radici di tale funzione siano proprio i poli p_j della $F(s)$. Pertanto gli n rami positivi del luogo partiranno dagli n poli p_j di $F(s)$ mentre quelli negativi arriveranno (per $K' \rightarrow 0$) in tali poli. Vedremo più avanti invece dove arrivano i rami positivi (cioè per $K' \rightarrow \infty$) e da dove partono quelli negativi (cioè per $K' \rightarrow -\infty$)

• **Proprietà 2: punti singolari.**

Se per un certo valore di K' la funzione $f(s, K')$ presenta una radice multipla s_0 , questo significa che alcuni rami del luogo si intersecano in s_0 . Sia \bar{K}' il valore di K' per cui la funzione $f(s, K')$ presenta una radice multipla in s_0 . Si ha allora:

$$f(s, \bar{K}') = (s - s_0)^h f_1(s),$$

dove si è supposto che s_0 è una radice di molteplicità $h > 1$ (e $f_1(s_0) \neq 0$). Ora, un punto del luogo dove si intersecano più rami (come s_0 in questo caso) viene detto **punto singolare**. In ogni punto singolare si ha che la derivata rispetto a s di $f(s, \bar{K}')$, calcolata in s_0 , è pari a zero. Infatti,

$$\frac{\partial f(s, \bar{K}')}{\partial s} = h(s - s_0)^{h-1} f_1(s) + (s - s_0)^h f_1'(s),$$

che, per $s = s_0$, è effettivamente pari a 0 (per ogni $h \geq 2$). Le equazioni quindi per trovare un punto singolare sono le seguenti:

$$f(s, K') = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial f(s, K')}{\partial s} = 0, \tag{5}$$

dove la prima equazione vale per tutti i punti del luogo e la seconda è quella appena discussa. Tutti i punti singolari (cioè di intersezione di due o più rami del luogo) sono le soluzioni (s_0, \bar{K}') delle due equazioni precedenti.

Ricavando K' dalla prima delle precedenti:

$$K' = -\frac{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}, \tag{6}$$

e sostituendolo nella seconda si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(s, K')}{\partial s} &= \frac{d}{ds} \left(\prod_{j=1}^n (s - p_j) \right) + K' \left(\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i) \right) = \\ &= \frac{d}{ds} \left(\prod_{j=1}^n (s - p_j) \right) - \frac{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}{\prod_{i=1}^m (s - z_i)} \frac{d}{ds} \left(\prod_{i=1}^m (s - z_i) \right) = 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando per $\prod_{i=1}^m (s - z_i)$ si ottiene infine:

$$\frac{d}{ds} \left(\prod_{j=1}^n (s - p_j) \right) \prod_{i=1}^m (s - z_i) - \prod_{j=1}^n (s - p_j) \frac{d}{ds} \left(\prod_{i=1}^m (s - z_i) \right) = 0. \tag{7}$$

È facile vedere che il membro a sinistra della precedente è un polinomio di grado $n + m - 1$ ed ammette quindi $n + m - 1$ radici. Non tutte queste radici saranno punti singolari: infatti, i valori s_0 per cui la (6) fornisce un valore di K' non reale vanno esclusi. Questo ci dice che il luogo delle radici potrà presentare al più $m + n - 1$ punti singolari che sono alcune delle radici della (7). Saranno pertanto al più $n + m - 1$ i possibili punti di intersezione di più rami. Si noti che un polo p_j (o uno zero z_i) con molteplicità maggiore di uno soddisfa la (7): sostituendo quindi tale polo (o zero) nella (6) si nota che $K' = 0$ ($K' = \infty$), che è un valore ammissibile per K' (in quanto reale). In effetti si è appena detto che per $K' = 0$ le radici sono nei poli p_j : se un polo ha molteplicità maggiore di uno, da esso partiranno più rami positivi (tanti rami

quanto è la sua molteplicità). Si vedrà più avanti che gli zeri z_i vengono raggiunti dai rami positivi per K' che tende all'infinito, a conferma di quanto detto pocanzi. Quindi anche i poli e gli zeri possono essere punti singolari del luogo (cioè punti dove passano più rami).

La (7) si può ulteriormente sviluppare notando che la derivata di ciascun termine tra parentesi, essendo un prodotto, è la somma delle derivate fatte ciascuna volta rispetto a un fattore diverso. Ciascuno di questi fattori ha derivata uno. Introducendo la notazione: $Q_p(s) = \prod_{j=1}^n (s - p_j)$ e $Q_z(s) = \prod_{i=1}^m (s - z_i)$, si ha che la derivata per esempio di $Q_p(s)$ rispetto al fattore $(s - p_k)$ sarà del tipo $Q_p(s)/(s - p_k)$ e, analogamente, la derivata di $Q_z(s)$ rispetto al fattore $(s - z_\ell)$ sarà del tipo $Q_z(s)/(s - z_\ell)$. Pertanto, la (7) è equivalente a:

$$Q_z(s) \sum_{j=1}^n \frac{Q_p(s)}{s - p_j} - Q_p(s) \sum_{i=1}^m \frac{Q_z(s)}{s - z_i} = 0,$$

cioè a:

$$Q_p(s)Q_z(s) \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} \right] = 0.$$

Mettendo a denominatore comune i termini tra parentesi quadre della precedente, si nota che eventuali zeri z_i e poli p_j con molteplicità $\nu > 1$ (che appaiono con potenza unitaria a denominatore) non cancellano completamente i termini rispettivamente $(s - z_i)^\nu$ e $(s - p_j)^\nu$ presenti in $Q_z(s)$ e $Q_p(s)$. Quindi tutti i poli e gli zeri multipli sono punti singolari e i punti singolari che non siano zeri o poli di $F(s)$ sono tutte o alcune tra le soluzioni dell'equazione:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} = 0. \quad (8)$$

- **Proprietà 3: il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale**

Questa proprietà segue banalmente dal fatto che $f(s, K')$, per ogni valore di K' reale, presenta radici che sono o reali o complesse coniugate. Pertanto, se un certo s_0 appartiene al luogo per un dato valore di K' , o $s_0 \in \mathbb{R}$ o anche s_0^* appartiene al luogo, rispettando in ogni caso la simmetria rispetto all'asse reale.

- **Proprietà 4: condizione delle fasi e dei moduli**

Il luogo delle radici è, come detto, il percorso delle radici del polinomio $f(s, K')$ (definito in (3)) al variare di K' . Per un dato valore di K' , le radici di $f(s, K')$ sono le n soluzioni s dell'equazione $f(s, K') = 0$. Tenendo conto della (3), si ha:

$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0,$$

cioè

$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) = -K' \prod_{i=1}^m (s - z_i).$$

La precedente è la relazione di uguaglianza tra due numeri complessi, che vale quando questi numeri complessi hanno lo stesso modulo e la stessa fase. Uguagliando quindi le fasi dei due numeri complessi nell'equazione precedente si ottiene la cosiddetta **condizione delle fasi**. Dal fatto che la fase del prodotto è pari alla somma delle fasi, si ottiene:

$$\sum_{j=1}^n \arg(s - p_j) = \pi + \arg(K') + \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i), \quad (9)$$

dove la funzione $\arg(z)$ di un numero complesso z indica la fase di z . Essendo K' reale, $\arg(K')$ sarà π nel caso di $K' < 0$ (luogo negativo) e sarà 0 nel caso di $K' > 0$ (luogo positivo). Si noti che due angoli sono uguali anche se differiscono di un multiplo di 2π . Per questo motivo, la condizione delle fasi, più correttamente, va scritta nel seguente modo:

$$\sum_{j=1}^n \arg(s - p_j) = \pi + \arg(K') + \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i) + 2h\pi, \quad (10)$$

essendo $h \in \mathbb{N}$ un qualsiasi numero intero. Per quanto riguarda i moduli, si ha invece:

$$\prod_{j=1}^n |s - p_j| = |K'| \prod_{i=1}^m |s - z_i|. \quad (11)$$

• **Proprietà 5: l'asse reale**

La condizione delle fasi permette facilmente di capire cosa succede sull'asse reale. Consideriamo un punto s sull'asse reale a destra di tutti i poli e di tutti gli zeri giacenti sull'asse reale. Si nota che un siffatto s è tale che la fase di $s - z_i$ e la fase di $s - p_j$ è nulla per ogni z_i e p_j reale. Per quanto riguarda i poli e gli zeri complessi, il fatto che sono a coppie coniugate fa sì che in ogni caso la somma della fase di $s - z_i$ e della fase di $s - z_i^*$ è anch'essa nulla. Pertanto la (9) diviene:

$$0 = \pi + \arg(K') + 0,$$

cioè

$$\arg(K') = -\pi,$$

cioè $K' < 0$. Pertanto, **tutti i punti dell'asse reale a destra di tutti i poli e di tutti gli zeri reali appartengono al luogo negativo.**

Andando verso sinistra lungo l'asse reale, quando s scavalca uno zero z_i (o un polo p_j) si ha che la fase di $s - z_i$ (o di $s - p_j$) diventa π . Pertanto, ogni volta che si scavalca uno zero o un polo, cambia il segno di K' necessario per soddisfare la (9): il luogo positivo e negativo si alternano ogni volta che si scavalca uno zero o un polo. Però attenzione: se lo zero o il polo è doppio, il contributo alla fase è doppio anch'esso e quindi il segno di K' non cambia. In conclusione **tutti i punti dell'asse reale che hanno alla loro destra un numero complessivo dispari tra zeri e poli reali (contati con le loro molteplicità) appartengono al luogo positivo, i restanti al luogo negativo.**

• **Proprietà 6: in un polo (o in uno zero) di molteplicità ν convergono ν rami del luogo positivo e ν rami del luogo negativo che dividono lo spazio in settori uguali**

Sfruttando la condizione delle fasi e quella dei moduli, si può dimostrare che in un polo di molteplicità ν convergono, al tendere di K' a zero da destra, ν rami del luogo positivo e, al tendere di K' a zero da sinistra, ν rami del luogo negativo. Analogamente, in uno zero di molteplicità ν , convergono, per K' che tende a $+\infty$, ν rami del luogo positivo e, per K' che tende a $-\infty$, ν rami del luogo negativo.

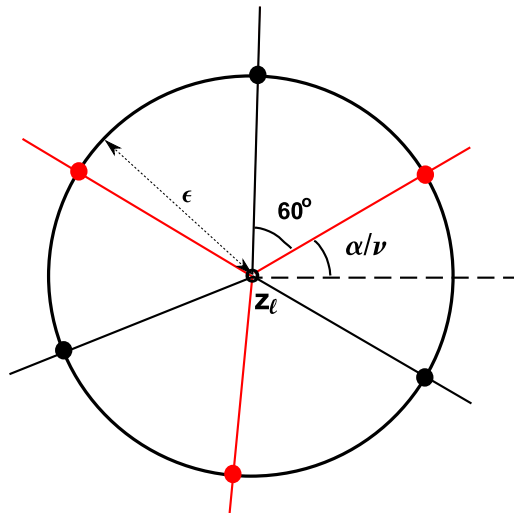


Figure 4: Cerchietto intorno a uno zero z_ℓ di $F(s)$: il raggio ϵ è piccolo nel senso che è molto minore della distanza di z_ℓ da tutti gli altri zeri e poli di $F(s)$. Sono anche riportati i punti del cerchio appartenenti al luogo positivo (cerchietti rossi) e quelli del luogo negativo (cerchietti neri) supponendo $\nu = 3$

Vediamo prima il caso di uno zero z_ℓ di molteplicità ν . Consideriamo a tal fine un cerchietto di raggio piccolo ϵ attorno a z_ℓ (si veda la Fig. 4). Ci chiediamo: ci sono punti sulla circonferenza di questo cerchio che appartengono al luogo positivo o negativo per qualche valore di K' ? Se sì, quanti e dove sono?

Un qualsiasi punto s_c sulla circonferenza del cerchietto può essere parametrizzato mediante la scrittura $s_c = s_c(\phi) = z_\ell + \epsilon e^{j\phi}$, dove ϕ varia da $-\pi$ a π . Esiste un punto del cerchietto che appartiene per esempio al luogo positivo se è possibile trovare un valore di ϕ e di $K' > 0$ per cui la condizione delle fasi (10) e quella dei moduli (11) sono soddisfatte. Partiamo dalla condizione delle fasi. Si ha:

$$\sum_{j=1}^n \arg(s_c - p_j) = \pi + \arg(K') + \sum_{i=1}^m \arg(s_c - z_i) + 2h\pi. \quad (12)$$

Consideriamo dapprima il luogo positivo, per cui $K' > 0$ e $\arg(K') = 0$. Si nota che se ε è molto minore della distanza di z_ℓ dallo zero o dal polo più vicino, i termini $\arg(s_c - p_j)$ e $\arg(s_c - z_i)$ per gli $z_i \neq z_\ell$ sono praticamente costanti su tutto il cerchietto, non dipendono cioè dal particolare punto s_c considerato e sono molto vicini rispettivamente a $\arg(z_\ell - p_j)$ e ad $\arg(z_\ell - z_i)$. Introduciamo quindi la notazione:

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \arg(z_\ell - p_j) - \sum_{i: z_i \neq z_\ell} \arg(z_\ell - z_i) - \pi. \quad (13)$$

Se z_ℓ ha molteplicità ν , si ha

$$\sum_{i: z_i = z_\ell} \arg(s_c - z_i) = \nu\phi.$$

La (12) può quindi essere riscritta nella seguente forma:

$$\nu\phi \approx \alpha + 2h\pi, \quad (14)$$

dove si è usato il \approx perché, come detto, si è introdotta un'approssimazione, che è tanto più buona quanto più ε è piccolo (e la precedente vale con l'uguale esatto quando ε tende a zero). Dalla (14), che vale per qualsiasi h intero, scaturiscono ν soluzioni distinte:

$$\phi_h = \frac{\alpha}{\nu} + \frac{2h\pi}{\nu}, \quad h = 0, 1, \dots, \nu - 1. \quad (15)$$

È facile verificare che per $h = \nu$ si riottiene il valore iniziale, cioè $\phi_\nu \equiv \phi_0$ e la serie di angoli si ripete ciclicamente.

La precedente ci dice che esistono ben ν punti s_c sulla circonferenza del cerchietto di raggio ε che abbiamo considerato che appartengono al luogo positivo e che sono equispaziati tra loro formando un angolo col ramo vicino pari a $\frac{2\pi}{\nu}$ (per esempio, se $\nu = 3$, ci saranno tre rami che dividono l'angolo giro in tre parti uguali, cioè in settori di 120° , come mostrato in Fig. 4).

Se andiamo a guardare la condizione dei moduli (11), scopriamo che questi rami passano per i punti del cerchietto che abbiamo individuato, per valori di K' molto grandi (sostituendo infatti $z_\ell + \varepsilon e^{j\phi}$ al posto di s nella (11) e andando a ricavare K' , si vede come questo tenda all'infinito al tendere di ε a zero). Pertanto possiamo concludere che ν rami del luogo positivo convergono a z_ℓ al tendere di K' all'infinito e lo fanno formando una stella con raggi equispaziati di un angolo $\frac{2\pi}{\nu}$.

Se andiamo a considerare il luogo negativo, cioè $K' < 0$, nella (12) avremo $\arg(K') = \pi$ anziché zero e pertanto gli angoli saranno

$$\phi_h = \frac{\alpha}{\nu} + \frac{\pi}{\nu} + \frac{2h\pi}{\nu}, \quad h = 0, 1, \dots, \nu - 1, \quad (16)$$

presenteranno cioè un contributo aggiuntivo di π/ν . Siccome i rami del luogo positivo formano settori con angolo $\frac{2\pi}{\nu}$, quelli del luogo negativo divideranno a metà questi settori, così come rappresentato in Fig. 4.

Un discorso del tutto equivalente si può fare per i poli. Considerando anche qui un cerchietto di raggio ε attorno a un generico polo p_ℓ avente molteplicità ν , si può mostrare come in tale polo convergano ν rami del luogo positivo e ν rami del luogo negativo, i quali divideranno il piano in settori uguali così come visto per gli zeri.

I valori di K' per cui avviene l'avvicinamento ad un polo sono però diversi da quelli per cui ci avviciniamo ad uno zero. Infatti, se andiamo a guardare la condizione dei moduli (11), scopriamo che, nel caso dei poli, i rami passano per i punti del cerchietto di raggio ε per valori di K' molto piccoli (sostituendo $p_\ell + \varepsilon e^{j\phi}$ al posto di s nella (11) si vede come K' tende a zero al tendere di ε a zero). Pertanto possiamo concludere che ν rami del luogo positivo convergono a p_ℓ al tendere di K' a zero da destra e ν rami del luogo negativo convergono a p_ℓ al tendere di K' a zero da sinistra.

Oltre a dimostrare la Proprietà 6, il ragionamento riportato sopra permette anche di calcolare gli angoli con cui i vari rami del luogo positivo (negativo) lasciano (raggiungono) i poli o raggiungono (lasciano) gli zeri.

• Proprietà 7: rami del luogo all'infinito e loro asintoti

Si è appena visto che, per esempio nel caso di luogo positivo, da ogni polo parte un numero di rami pari alla molteplicità del polo stesso. Quindi tutti gli n rami del luogo positivo partono da un qualche polo (in effetti, come detto in precedenza, i poli sono le radici di $f(s, K')$ per $K' = 0$). Sappiamo anche che in ogni zero, per K' che tende all'infinito, tende un numero di rami pari alla molteplicità dello zero in questione. Ma se sommiamo tutte queste molteplicità arriviamo a m , il grado del polinomio a numeratore di $F(s)$,

e $m < n$. Quindi gli n rami del luogo partono tutti da qualche polo ma solo m arrivano in uno zero. Che fine fanno, quando K' tende all'infinito, gli altri $n - m$ rami?

Prima di rispondere in modo rigoroso a questa domanda, è interessante notare come la funzione $F(s)$ abbia a tutti gli effetti uno zero all'infinito di molteplicità $n - m$. Per vedere questo, si consideri dapprima uno zero al finito z_ℓ di molteplicità ν di $F(s)$. Si può scrivere

$$F(s) = K' \frac{(s - z_\ell)^\nu N_\ell(s)}{D(s)}, \quad (17)$$

dove $N_\ell(s)$ e $D(s)$ sono due polinomi che non si annullano per $s = z_\ell$ (cioè $N_\ell(z_\ell) \neq 0$ e $D(z_\ell) \neq 0$).

Ora, si consideri il cambio di variabile $\sigma = \frac{1}{s}$. Dall'espressione generale (1) di $F(s)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= K' \frac{\prod_{i=1}^m (\frac{1}{\sigma} - z_i)}{\prod_{j=1}^n (\frac{1}{\sigma} - p_j)} = K' \frac{\frac{1}{\sigma^m} + b_{m-1} \frac{1}{\sigma^{m-1}} + \dots + b_0}{\frac{1}{\sigma^n} + a_{n-1} \frac{1}{\sigma^{n-1}} + \dots + a_0} \\ &= K' \frac{\sigma^{n-m} + b_{m-1} \sigma^{n-m+1} + \dots + b_0 \sigma^n}{1 + a_{n-1} \sigma + \dots + a_0 \sigma^n} \\ &= K' \sigma^{n-m} \frac{N_\sigma(\sigma)}{D(\sigma)}, \end{aligned} \quad (18)$$

con $N_\sigma(0) = 1 \neq 0$ e $D(0) = 1 \neq 0$ (cioè $\sigma = 0$ non è radice di N_σ e di D). Ora, confrontando la (17) con la (18), si vede come $F(\sigma)$ presenti uno zero in $\sigma = 0$ di molteplicità $\nu = n - m$. Essendo $\sigma = \frac{1}{s}$, questo significa che il punto all'infinito del piano complesso dove vive s (detto *punto improprio*) è uno zero di molteplicità $n - m$. Nel punto improprio finiranno quindi, per K' che tende all'infinito, gli $n - m$ rami che non finiscono in nessuno zero finito z_i .

Per giustificare questo fatto in modo più rigoroso, ma anche per capire in che modo vanno all'infinito i suddetti $n - m$ rami, riscriviamo la (1) dopo aver sviluppato i prodotti:

$$F(s) = K' \frac{s^m - s^{m-1} \sum_{i=1}^m z_i + \dots}{s^n - s^{n-1} \sum_{j=1}^n p_j + \dots},$$

dove i puntini indicano termini polinomiali in s di grado inferiore rispetto a quello dei termini riportati nella precedente. Dividendo il polinomio a denominatore per quello a numeratore si ottiene:

$$F(s) = K' \frac{1}{s^{n-m} - \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{n-m-1} + \dots},$$

dove i puntini indicano termini (polinomiali ma anche fratti) in s che, per s che tende all'infinito, divengono trascurabili rispetto ai due indicati nella precedente. Per s che tende all'infinito, la precedente può quindi essere approssimata da:

$$F(s) \approx K' \frac{1}{(s - \sigma_a)^{n-m}},$$

avendo introdotto la notazione

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right). \quad (19)$$

Ora, sfruttando la precedente approssimazione (tanto più esatta quanto più s tende al punto improprio, cioè all'infinito), le radici del polinomio a denominatore di $W(s)$ (di cui in questo capitolo stiamo tracciando il luogo) sono le radici dell'equazione:

$$(s - \sigma_a)^{n-m} + K' = 0,$$

cioè dell'equazione

$$(s - \sigma_a)^{n-m} = -K'. \quad (20)$$

Parametizziamo ora i punti del piano complesso s che si trovano su un cerchio molto grande (che circonda idealmente il punto improprio così come i cerchietti scelti in precedenza circondavano gli zeri al finito) definendo

$$s = \sigma_a + \rho e^{j\theta}, \quad (21)$$

con ρ quindi molto grande e $\theta \in (-\pi, \pi)$. Per ogni valore di θ abbiamo un possibile punto del cerchio. Sostituendo tale parametrizzazione nella (20), si ha:

$$\rho^{n-m} e^{j\theta(n-m)} = -K',$$

ossia, passando ai moduli e alle fasi e supponendo di considerare il luogo positivo ($K' > 0$):

$$\begin{aligned} K' &= \rho^{n-m} \\ \theta &= \frac{\pi + 2h\pi}{n-m}, \quad h = 0, 1, \dots, n-m-1. \end{aligned}$$

La prima ci dice che al tendere di ρ all'infinito anche K' diverge ($n > m$): alcuni rami del luogo positivo tendono all'infinito al crescere di K' . La seconda condizione ci dice che sul cerchio di raggio ρ tendente all'infinito ci sono $n-m$ rami (infatti per $h \geq n-m$ si riottengono ciclicamente gli angoli precedenti) disposti a formare una stella con angoli tra di loro pari a $\frac{2\pi}{n-m}$. Il centro della stella, in accordo con la (21), è il punto $(\sigma_a, 0)$ che rappresenta quindi il centro degli asintoti.

Regole per il tracciamento del luogo delle radici

Sulla base delle proprietà appena descritte, è possibile stilare una lista di regole per il tracciamento del luogo delle radici.

- **Regola 1.** Si scriva innanzitutto la $F(s)$ come riportato in (1), individuando quindi zeri e poli della funzione. Si riportino nel piano complesso questi zeri e questi poli, utilizzando un qualche espediente per segnalarne la molteplicità (usualmente i poli vengono rappresentati mediante crocette e gli zeri mediante cerchietti).
- **Regola 2.** Individuare sull'asse reale i punti che appartengono al luogo positivo e quelli che appartengono al luogo negativo sfruttando la Proprietà 5.
- **Regola 3.** Il luogo positivo è composto da n rami, ognuno dei quali parte da qualche polo. Solo m rami finiranno negli zeri mentre $n-m$ rami se ne andranno all'infinito. Per capire come, calcolare il centro degli asintoti $(\sigma_a, 0)$ e determinare gli asintoti stessi, così come spiegato nella Proprietà 7. La stessa cosa vale per il luogo negativo dove in questo caso i rami tendono ai poli per K' che tende a zero e provengono (per K' che viene da meno infinito) o dagli zeri o dal punto improprio. In generale la stella degli asintoti si determina facilmente essendo l'asse reale sempre un asintoto per uno o per entrambi i luoghi positivo e negativo.
- **Regola 4.** Provare a tracciare i vari rami, sia per $K' > 0$ sia per $K' < 0$, sapendo, come detto, che ogni ramo per $K' > 0$ parte da un polo e finisce in uno zero o nel punto improprio mentre per $K' < 0$ i rami provengono dagli zeri o dal punto improprio e tendono ai poli. Per il tracciamento dei rami è importante anche individuare la presenza e l'ubicazione di eventuali punti singolari (che sono al più $n+m-1$), cioè dei punti dove si intersecano due o più rami (si veda in proposito la Proprietà 2). Si tenga anche conto della simmetria del luogo rispetto all'asse reale (Proprietà 3).
- **Regola 5.** Il criterio di Routh può aiutare a capire per quali valori di K' i vari rami intersecano l'asse immaginario: basta vedere infatti per quali valori di K' il criterio di Routh, applicato al polinomio $f(s, K')$ definito nella (3), non è più verificato o, più in generale, utilizzando la forma completa del criterio, per quali valori di K' cambia il numero di radici con parte reale negativa, nulla o positiva.
- **Regola 6.** Le formule degli angoli con cui i rami raggiungono uno zero o un polo (si veda la Proprietà 6) possono migliorare la qualità del disegno del luogo che rimane comunque qualitativo se tracciato senza l'ausilio di strumenti di calcolo adeguati.

Esempio 1

Si consideri la funzione $P_1(s)$ (già considerata nella sezione degli esercizi per il tracciamento dei diagrammi di Bode):

$$P_1(s) = \frac{12}{s(s+2)(s+4)}.$$

Seguendo le regole riportate pocanzi, innanzitutto scriviamo $P_1(s)$ nella forma indicata in (1):

$$P_1(s) = K' \frac{1}{s(s+2)(s+4)}.$$

Ci sono $n = 3$ rami che, non essendoci zeri ($m = 0$), vanno tutti all'infinito. Gli asintoti hanno centro nel punto $(\sigma_a, 0)$ dove σ_a , in base alla (19), è dato da:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(0 - 2 - 4) = -2.$$

Il luogo positivo ha un asintoto sull'asse reale negativo, pertanto gli altri due asintoti saranno obliqui e tali da dividere il piano in settori di 120° . Per lo stesso motivo, il luogo negativo ha come asintoti l'asse reale positivo e due asintoti obliqui, prosecuzione di quelli obliqui del luogo positivo.

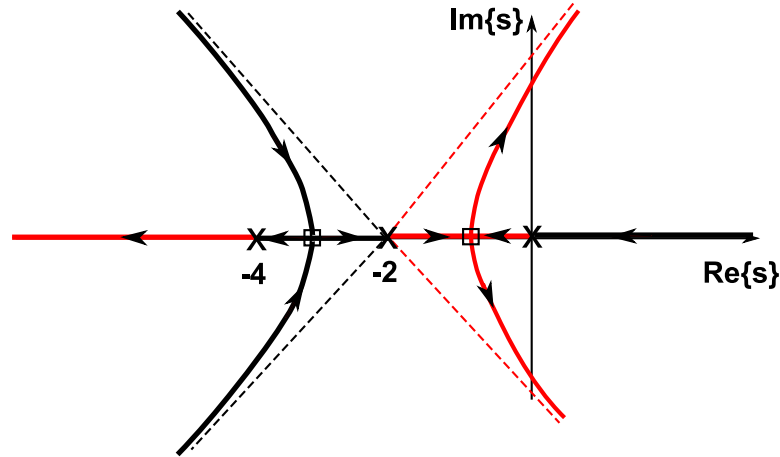


Figure 5: Il luogo delle radici dell'esempio 1: in rosso il luogo positivo e in nero quello negativo. I quadratini rappresentano i punti singolari

Già tracciando il luogo si vede che sull'asse reale ci sono tre poli consecutivi: questo è indice che ci devono essere tra questi poli dei punti singolari. In effetti, dalla (8), si ricava la seguente equazione di secondo grado:

$$3s^2 + 12s + 8 = 0,$$

che ha per radici

$$s_{1,2} = -2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \{-3.15; -0.85\}.$$

In definitiva il luogo ha la forma riportata in Fig. 5.

Applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso $W(s)$, dato da:

$$den_W(s) = s(s+2)(s+4) + K' = s^3 + 6s^2 + 8s + K',$$

si possono determinare i valori di K' per cui il sistema è asintoticamente stabile. Innanzitutto si vede, in base a Routh, che K' deve essere positivo: se $K' \leq 0$ i coefficienti di $den_W(s)$ non sono tutti positivi. Questo è in accordo col luogo riportato in Fig. 5, dove si vede che il luogo negativo ha sempre una radice con parte reale positiva per qualsiasi valore di K' .

Costruendo la tabella di Routh, è possibile trovare anche per quale valore di K' i due rami positivi complessi intersecano l'asse immaginario. Si ha infatti:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 8 \\ 6 \quad K' \\ 48 - K' \\ K' \end{array}$$

Si vede come il criterio di Routh non è più verificato quando K' supera 48, che pertanto è il valore di K' per cui i due rami complessi del luogo positivo intersecano l'asse immaginario. Il sistema a ciclo chiuso risulta quindi asintoticamente stabile per ogni $K' \in (0, 48)$ (estremi esclusi).

Esempio 2

Si consideri la funzione

$$P_2(s) = \frac{1500(2s+1)}{(s+2)(s+5)}.$$

Seguendo le regole riportate in precedenza, innanzitutto scriviamo $P_2(s)$ nella forma indicata in (1):

$$P_2(s) = K' \frac{(s + 0.5)}{(s + 2)(s + 5)}.$$

Per ciascun luogo, positivo e negativo, ci sono $n = 2$ rami di cui uno va all'infinito ($n = 2, m = 1$). Poiché l'asse reale è un asintoto del luogo sia positivo sia negativo, non ci sono altri asintoti.

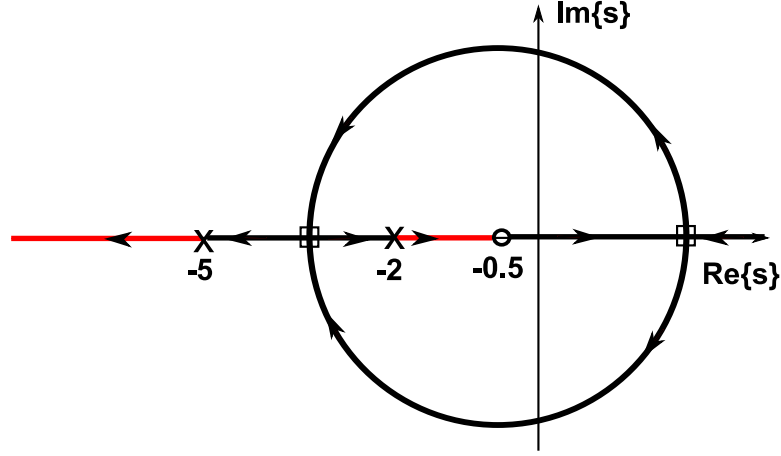


Figure 6: Il luogo delle radici dell'esempio 2: in rosso il luogo positivo e in nero quello negativo. I quadratini rappresentano i punti singolari

Tracciando il luogo si vede come sull'asse reale ci siano due poli consecutivi e inoltre il ramo del luogo negativo proveniente dall'asse reale positivo non può terminare in $s = -0.5$, da dove in effetti parte un altro ramo del luogo negativo (essendo $s = -0.5$ uno zero della funzione): questo è indice che ci devono essere due punti singolari, uno tra -5 e -2 e uno tra -0.5 e $+\infty$. In effetti, dalla (8), si ricava la seguente equazione di secondo grado:

$$s^2 + s - 6.5 = 0,$$

che ha per radici

$$\begin{aligned} s_1 &\approx -3.1, \\ s_2 &\approx 2.1. \end{aligned}$$

In definitiva il luogo ha la forma riportata in Fig. 6. Il tratto circolare che si vede nella figura è in effetti un cerchio centrato in $C = (-0.5, 0)$ con raggio $R = |s_2 - C| \approx 2.6$. Per rendersene conto, basta scrivere l'espressione parametrica in K' delle due radici s_a e s_b di $f(s, K')$, cosa che è possibile fare in modo relativamente facile essendo in questo caso $f(s, K')$ un polinomio di secondo grado:

$$f(s, K') = (s + 2)(s + 5) + K'(s + 0.5) = s^2 + (K' + 7)s + 10 + 0.5K'.$$

Si ha:

$$s_{a,b} = \frac{-(K' + 7) \pm \sqrt{(K' + 7)^2 - 40 - 2K'}}{2}.$$

Tali radici sono complesse (cioè stanno sul cerchio) quando il termine sotto radice è negativo. Questo capita (come è facile verificare discutendo il segno dell'equazione di secondo grado in K' sotto radice) per $K' \in (-11.2, -0.8)$. Per tali valori di K' si può quindi scrivere:

$$s_{a,b} = \frac{-(K' + 7) \pm j\sqrt{40 + 2K' - (K' + 7)^2}}{2}.$$

È ora facile verificare che la distanza di queste radici dal punto C è una costante indipendente da K' e pari esattamente al raggio R dianzi indicato. Si ha infatti, indifferentemente per s_a e s_b :

$$\begin{aligned} |s_{a,b} - C|^2 &= \left| \frac{-(K' + 7) \pm j\sqrt{40 + 2K' - (K' + 7)^2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right|^2 = \left| \frac{-K' - 6 \pm j\sqrt{40 + 2K' - (K' + 7)^2}}{2} \right|^2 \\ &= \frac{(K' + 6)^2 + 40 + 2K' - (K' + 7)^2}{4} = \frac{27}{4} = R^2. \end{aligned}$$

Contorno delle radici

Il luogo delle radici può essere usato anche per studiare la stabilità del sistema a ciclo chiuso al variare di qualche altro parametro di $F(s)$, come per esempio la posizione di qualche zero o polo. Il percorso delle radici a ciclo chiuso al variare di questo parametro viene detto *contorno delle radici* e può essere di grande utilità nella pratica. Verrà tuttavia omissa in questa trattazione.

Un cenno all'uso del luogo delle radici per la sintesi del controllore

Il luogo delle radici, oltre a fornire un metodo per valutare la stabilità di un sistema ad anello chiuso al variare del guadagno, rappresenta, come detto all'inizio, anche uno strumento molto utile per la sintesi del sistema di controllo, specie laddove le tecniche viste in precedenza (per esempio la sintesi per tentativi basata sulla risposta in frequenza e sul criterio di Nyquist) possono essere di non facile applicazione. È questo per esempio il caso, come detto all'inizio, di sistemi che non siano a stabilità regolare, cioè per esempio aventi poli in catena aperta con parte reale positiva. In questi casi, un'ispezione del luogo permette di capire se il sistema innanzitutto può essere stabilizzato con un opportuno valore del guadagno. Se non lo è, l'aggiunta di poli e di zeri può modificare il luogo (spostando per esempio il centro degli asintoti ma anche modificando il percorso stesso dei rami) in modo da far sì che, per opportuni valori di K' , tutte le radici abbiano parte reale negativa o, più opportunamente, appartengano a una regione del piano complesso ritenuta desiderabile. In generale tale regione è un sottoinsieme del piano complesso negativo ed è scelta in modo tale che, se i poli a ciclo chiuso appartengono a questa regione, la parte transitoria della risposta del sistema vada a zero in modo sufficientemente rapido con oscillazioni contenute. È possibile dimostrare, partendo dall'analisi delle risposte libere di un sistema con due poli complessi coniugati (che è un caso significativo in quanto praticamente qualsiasi sistema a ciclo chiuso si comporta con buona approssimazione secondo la dinamica di una coppia complessa presente tra i suoi poli detta *dominante*), che la regione desiderabile del piano complesso ha una forma del tipo indicato in Fig. 7: il fatto che la parte reale dei poli debba essere minore di una certa quantità negativa garantisce una buona rapidità di risposta mentre l'appartenenza al cono rivolto verso sinistra con vertice nell'origine comporta una sovraelongazione contenuta. L'appartenenza dei poli a questa regione, oltre a garantire un buon comportamento transitorio conferisce anche, come già si è osservato in precedenza, un buon margine di stabilità al sistema e quindi un certo grado di robustezza alla proprietà di stabilità asintotica del sistema rispetto a incertezze sui parametri. È evidente che un metodo di sintesi basato sul luogo delle radici va a sostituire quello basato sul criterio di Nyquist (descritto in precedenza) per quanto attiene il progetto di $C_2(s)$ (la parte del controllore che tiene conto delle specifiche di stabilità asintotica e sul transitorio), mentre la scelta di $C_1(s) = \frac{K_c}{s^\alpha}$ rimane sempre la stessa e viene effettuata in relazione alla specifica di precisione. Scelte h_0 e $C_1(s)$, il progetto di $C_2(s)$ si baserà sul luogo delle radici della funzione di trasferimento a catena aperta $F(s) = h_0 P(s) C_1(s)$.

Maggiori dettagli su come può essere effettuata la sintesi mediante il luogo delle radici vengono omissi in questa sede: saranno argomento di corsi successivi.

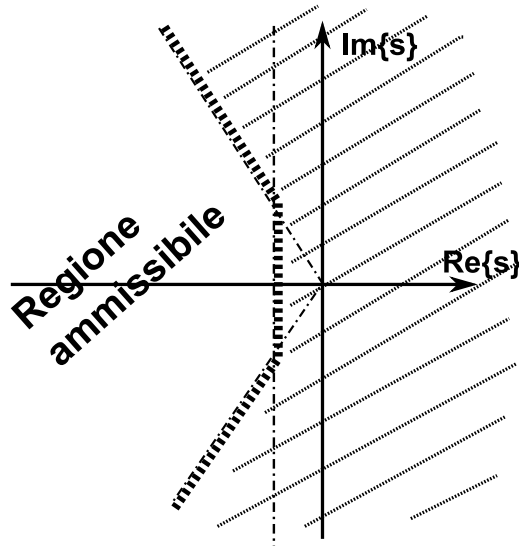


Figure 7: Regione del piano complesso dove è desiderabile collocare i poli del sistema a ciclo chiuso: i poli devono avere una parte reale sufficientemente negativa e, se complessi, un coefficiente ζ di smorzamento sufficientemente elevato