COGNOME: Correzione NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

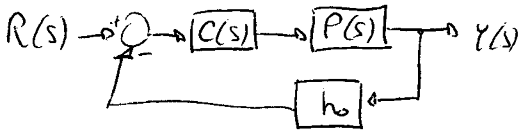
Sia $P(s) = 10\frac{s+1}{(s^2+a\,s+1)}$.

i) Per $a=0$, esprimere il legame ingresso uscita (I-U) che esiste tra $u(t)$ e $y(t)$ se $Y(s) = P(s)U(s)$ e calcolare la risposta $y(t)$ che si ottiene applicando un ingresso $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$ a partire dalle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$. [9pt]

ii) Dire per quali $a \in \Re$ la funzione di trasferimento $P(s)$ rappresenta tutto il sistema, motivando la risposta. [3pt]

iii) Studiare la stabilità BIBO al variare di $a \in \Re$ del sistema in controreazione mostrato in figura con $C(s) = 1$, $h_0 = 2$. [4pt]

iv) Per $a = 1$, con riferimento allo schema di controllo in controreazione mostrato in figura, progettare un controllore $C(s)$ e trovare la costante h_0 in modo da avere inseguimento con errore a regime nullo rispetto a riferimenti costanti (cioè del tipo $r(t) = \delta_{-1}(t)$), con $k_d = 1$, e stabilità asintotica con un margine di fase di almeno 45 gradi. [14pt]



(i) Per $a=0$, $P(s) = \frac{10(s+1)}{s^2+1}$

Il legame I-U è, in s: $(s^2+1)\,Y(s) = (10s+10)\,U(s)$

e nel tempo: $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = 10\frac{du}{dt} + 10\,u(t)}$

Se $u(t) = \cancel{10}\, e^{-t}\delta_{-1}(t)$, $U(s) = \frac{1}{s+1}$

$\mathcal{L}\{\dot{y}\} = sY(s) - 1$

$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} = s^2Y(s) - s$

da cui $\boxed{y(t) = 10\sin t\,\delta_{-1}(t) + \cos t\,\delta_{-1}(t)}$

$s^2Y - s + Y = 10\frac{(s+1)}{s+1} \to Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{10}{s^2+1}$

(ii) $P(s)$ rappresenta tutto il sistema se non ci sono cancellazioni tra numeratore e denominatore $\Longleftrightarrow$ $\boxed{a \neq 2}$

(iii) $W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+h_0P(s)C(s)} = \frac{P(s)}{1+2P(s)} = \frac{\frac{10(s+1)}{s^2+as+1}}{1+\frac{20(s+1)}{s^2+as+1}} =$

$= \frac{10(s+1)}{s^2+as+1+20(s+1)} = \frac{10(s+1)}{s^2+(a+20)s+21}$

Per Routh, BIBO stabile $\Longleftrightarrow$ $a+20>0$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{a>-20}$

(iv) Per $a=1$, $P(s) = \frac{10(s+1)}{s^2+s+1}$

Se $r(t) = \delta_{-1}(t)$, $e_\infty = 0$ per $\nu \geq 1$. Scegliamo $\boxed{\nu = 1}$ e K_c è libero.

Quindi $C(s) = \frac{K_c}{s}$ e $F(s) = h_0 P(s) \cdot C(s)$.

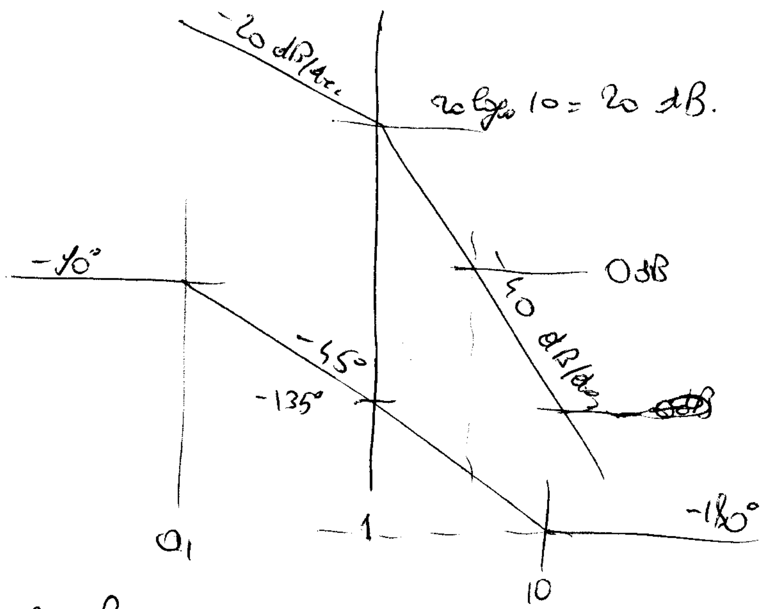
Poiché $K_d = 1$, $h_0 = 1$. Quindi $F(s) = \frac{10K_c(s+1)}{s(1+s+s^2)}$

Tracciamo Bode di $F(s)$ per $K_c = 1$, cioè Bode di

$$\frac{10(1+s)}{s(1+s+s^2)}$$

$\omega_n = 1 \quad \zeta = 1/2$

$\tau = 1 \to 1/\tau = 1$



A $\omega = 1$, $\angle F$ è $-135°$. Per cui se a $\omega = 1$ il modulo passa per 0 dB siamo a posto. Ora passa per 20 dB. Basta scegliere K_c: $20 \log_{10} K_c = -20 \Rightarrow \boxed{K_c = 0.1}$

Complessivamente $C(s) = \frac{0.1}{s}$.