

COGNOME: COMPITO 1

NOME:

MATRICOLA:

29/6/2004

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

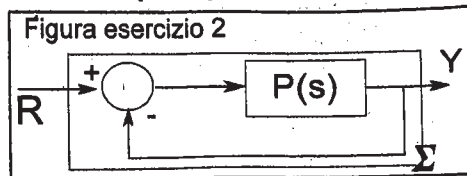
1. Si consideri un sistema lineare stazionario con rappresentazione I-U data da $\frac{d^3 y}{dt^3} + 2\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 2u - \frac{du}{dt}$.

(i) Determinare una rappresentazione I-S-U del sistema dato indicando se è l'unica possibile. [4+1pt]

(ii) Calcolare la risposta completa in uscita $y(t)$ se si applica un ingresso $u(t) = (2t-1)\delta_{-1}(t)$ a partire dalle condizioni iniziali $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 1$ e $\ddot{y}_0 = 0$. [8pt]

(iii) Valutare la stabilità esterna del sistema dato. Supponendo che lo spazio di stato abbia dimensione 3, cosa si può dire della stabilità interna? [4+2pt]

Figura esercizio 2



2. Valutare con Nyquist la stabilità del sistema Σ in figura, in cui $P(s) =$

$0.1(2-s)/(s^3+2s^2+s)$. Indicare quindi quali tipi k di riferimento possono essere inseguiti con errore limitato. [6+2pt]

3. La connessione serie di sistemi BIBO stabili, è BIBO stabile? E il parallelo? Rispondere giustificando le risposte. [2+2pt]

Es. 1 (i) Per calcolare la funzione di trasferimento si pongono a 0 le condizioni iniziali e si ha:

$$(s^3 + 2s^2 + s)Y = (2-s)U \Rightarrow Y = \frac{2-s}{s^3 + 2s^2 + s} U \Rightarrow U(s) = \frac{2-s}{s^3 + 2s^2 + s}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [2 \ -1 \ 0] \quad D = 0$$

Tale scelta di matrici non è unica, ne esistono infinite, anche di dimensione > 3.

$$ii) \mathcal{L}\{\dot{y}\} = sY - y_0 = sY; \quad \mathcal{L}\{\ddot{y}\} = s\mathcal{L}\{\dot{y}\} - \dot{y}_0 = s^2Y - 1; \quad \mathcal{L}\{\ddot{\dot{y}}\} = s\mathcal{L}\{\ddot{y}\} - \ddot{y}_0 = s^3Y - s$$

Sostituendo nella repr. I-U:

$$s^3Y - s + 2s^2Y - 2 + sY = (2-s)U(s)$$

$$\text{dove } U(s) = \mathcal{L}\{(2t-1)\delta_{-1}(t)\} = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} = \frac{2-s}{s^2}$$

$$\text{Quindi } (s^3 + 2s^2 + s)Y(s) = s + 2 + \frac{(2-s)^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+s} + \frac{(s-2)^2}{(s^3+2s^2+s)s^2} = \frac{s+2}{s(s+1)^2} + \frac{(s-2)^2}{s^3(s+1)^2}$$

$$Y_e(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2} = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{12}}{s+1} + \frac{\alpha_{22}}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\alpha_{11} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{(s+1)^2} = 2$$

$$\alpha_{22} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+2}{s} = -1; \quad \alpha_{12} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{s+2}{s} = -2$$

$$\Rightarrow |y_e(t) = (2 - 2e^{-t} - te^{-t})\delta_{-1}(t)|$$

$$\alpha_{13} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s-2)^2}{(s+1)^2} = 4$$

$$\alpha_{12} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{(s-2)^2}{(s+1)^2} = -12$$

$$\alpha_{11} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2}{ds^2} \frac{(s-2)^2}{(s+1)^2} = 21$$

$$\alpha_{22} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(s-2)^2}{s^2} = -9 \quad \alpha_{21} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{(s-2)^2}{s^2} = -21$$

$$\Rightarrow |y_f(t) = [21 - 12t + 4\frac{t^2}{2} - 21e^{-t} - 9te^{-t}]\delta_{-1}(t)|$$

$$|y(t) = y_e(t) + y_f(t) = [23 - 12t + 2t^2 - 23e^{-t} - 9te^{-t}]\delta_{-1}(t)|$$

N.B. Più concisamente $Y(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2} + \frac{(s-2)^2}{s^3(s+1)^2} = \frac{s^3 + 3s^2 - 4s + 4}{s^3(s+1)^2}$

iii) $W(s) = \frac{2-s}{s(s+1)^2}$ ha come polo ϕ che ha parte reale nulla
 $\rightarrow$ il sistema non è esternamente stabile.

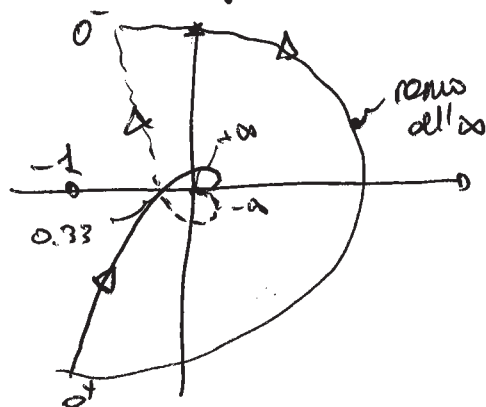
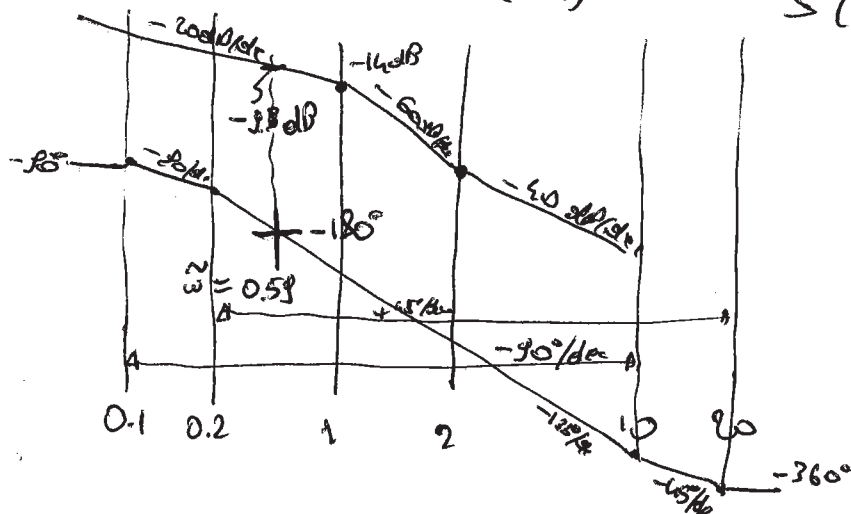
Se $\bar{n}=3$, tutti gli autovalori di A compaiono come poli della $W \Rightarrow$
 poiché $-1 < 0$ e ϕ ha $m_e = 1$, con $1 \leq \mu \leq m_e \Rightarrow$ stabilità semplice

Es.2 $F(s) = P(s) = \frac{0.1(2-s)}{s(s+1)^2} = \frac{0.2(1-s/2)}{s(1+s)^2}$

$\tau_n = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{\tau_n} = 2$

$\tau_d = 1 \rightarrow \frac{1}{\tau_d} = 1$

Volge, $0.2 = -11.4 \text{ dB}$



-9.3 dB corrisponde $a \approx 0.33 \Rightarrow -1$ è esterno

$\Rightarrow N = \phi, P_p = 0 \Rightarrow N = P_p = \sum a.s. \text{ stab.}$

Poiché $\gamma = 1$, posso integrare con errore ^{e regime} limitato riferimenti ~~di tipo~~
 $r(t) = \frac{t^k}{k!}$ di tipo $k=0$ (errore nullo) e $k=1$ (errore limitato).

Es.3 Due modi:

1) In base alla definizione, nel caso serie $u_1 \rightarrow W_1 \rightarrow y_1 = u_2 \rightarrow W_2 \rightarrow y_2$
 $\forall u_1$ limitato $\rightarrow y_1$ e cioè u_2 limitato $\rightarrow y_2$ limitato.

Nel caso parallelo la somma di $f^{(n)}$ limitati è limitato.

2) $W_{\text{serie}} = W_1 \cdot W_2 = \frac{N_1 \cdot N_2}{D_1 \cdot D_2}$ i poli di W_{serie} sono
 tutti o alcuni dei poli di W_1 e W_2 e quindi sono
 tutti a parte reale negativa.

Lo stesso vale per $W_{\text{parallelo}} = \frac{N_1 D_2 + D_1 N_2}{D_1 \cdot D_2}$.

In ogni caso si conclude che la serie e il parallelo di
 sistemi BIBO stabile rimane BIBO stabile.