

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0], \quad D = 1$$

- Valutare la stabilità interna ed esterna del sistema. [3+2pt]
 - Calcolare la risposta forzata $y(t)$ che si ottiene se $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$. Ripetere con $u(t) = 3\delta_{-1}(t-5)$. [6+2pt]
 - Fornire una rappresentazione I-U equivalente alla rappresentazione I-S-U indicata e dire se rappresenta tutto il sistema (motivando la risposta). [4+2pt]
 - Calcolare la condizione iniziale $x(0)$ che dà luogo alla risposta libera $x(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \delta_{-1}(t)$ [4pt]
2. Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, con lo stato avente dimensione $\bar{n} = 6$, con funzione di trasferimento $W(s) = [3s^2 - 2s + 1] / [s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 5s + 2]$ e una possibile risposta libera data da $y(t) = 2te^{3t}\delta_{-1}(t)$.
- Valutare la stabilità interna ed esterna del sistema. [2+4pt]
 - Dire (motivando la risposta) se il sistema considerato può avere punti di equilibrio diversi dall'origine. [2pt]

Es. 1.

(i) Stabilità interna: $\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$

Ha come autovalori $\lambda_1 = j$, $\lambda_2 = -j$ che hanno entrambe parti reali nulla e molteplicità algebrica $m=1$.

Poiché $1 \leq \mu \leq m \Rightarrow m = \mu = 1 \Rightarrow$ il sistema è STABILE (ma non es.).

Stabilità esterna: Poiché i poli di $W(s)$ sono tutti o alcuni i λ_i di A , in ogni caso ~~non~~ ~~sono~~ le $W(s)$ non avrà poli a parti reali negative.

In fatti:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = [1 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 =$$

$$= [1 \ 0] \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \frac{1}{s^2 + 1} + 1 = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 1}$$

I poli sono $\pm j \Rightarrow$ non è stabile BIBO.

(alternativamente, si poteva effettuare lo sviluppo in fratti semplici)

(ii) $Y(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 1} \cdot \frac{3}{s} = \frac{3s^2 + 6}{s(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B + Cs}{s^2 + 1} = \frac{(A+C)s^2 + Bs + A}{s(s^2 + 1)}$

$$\Rightarrow A=6, B=0, C=-3 \Rightarrow Y(s) = \frac{6}{s} + \frac{-3s}{s^2 + 1} \Rightarrow \boxed{y(t) = 3(2 - \cos t) \delta_{-1}(t)}$$

Se $u(t) = 3\delta_{-1}(t-5)$ si ottiene $\boxed{y(t) = 3(2 - \cos(t-5)) \delta_{-1}(t-5)}$

(senza fare i conti, basta applicare il principio di invarianza alle traslazioni temporali)

Volendolo verificare con i conti, basta ricordarsi che

$$\mathcal{L}\{x(t)e^{-at}\} = e^{-as} X(s)$$

da cui $U(s) = 3 \frac{e^{-5s}}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+2}{s(s^2+1)} e^{-5s} = \left(\frac{6}{s} - \frac{3s}{s^2+1}\right) e^{-5s}$ da cui la $y(t)$ indicata

(iii) Poiché $W(s) = \frac{s^2+2}{s^2+1}$, si ha:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y(t) = \frac{d^2 u}{dt^2} + 2u(t) \quad (I-U)$$

che rappresenta tutto il sistema essendo $\bar{n}=2$ e $n=2$ (nessuna semplificazione in $W(s)$)

(iv) Si ha: $X(s) = (sI-A)^{-1} x_0 \Rightarrow x_0 = (sI-A) X(s)$.

Ma se $x(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} S_1(t)$, $X(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \Rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Es. 2 (i) Per la sola esterna applico Routh al denominatore di $W(s)$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & \\ 7 & 8 & \\ 3 & & \\ 8 & & \end{array}$$

$$-\frac{1}{4}(5-3 \cdot 4) = \frac{7}{4}$$

$$-\frac{1}{4}(0-8) = \frac{8}{4}$$

$$-\frac{1}{7}(32-35) = \frac{3}{7}$$

$$-\frac{1}{3}(0-24) = 8$$

Il criterio è soddisfatto e quindi il sistema è stabile esternamente.

Non è stabile internamente perché ha una risposta libera che diverge.

(ii) Non li può avere. Infatti, essendo $\bar{n}=6$, la matrice A ha 6 autovalori (eventualmente non tutti distinti) con parti reali strettamente negative (che sono quelli che compaiono nella $W(s)$) e $b=3$, che ha molteplicità algebrica 2 essendo una risposta libera del tipo $2te^{3t} S_1(t)$. Quindi non ha $b=0$. Come autovettore $\Rightarrow$ non ci possono essere punti di equilibrio diversi da ϕ .