$\boxed{\text{CORREZIONE}}$

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

N.B. Il presente foglio va consegnato insieme al compito

1. Si consideri un sistema con rappresentazione I-S-U data da $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [-2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \quad \text{e} \quad D = 0.$$

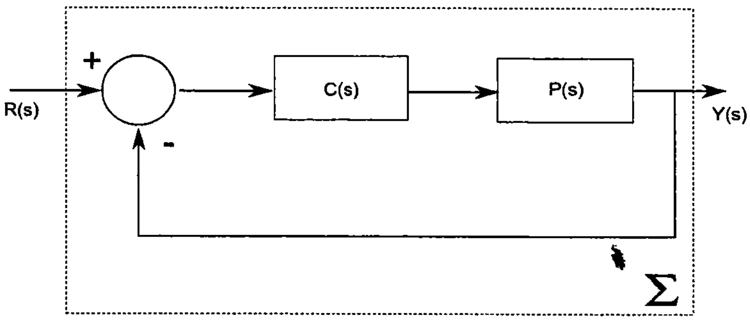
   (i) Valutare se il sistema dato è stabile, instabile o asintoticamente stabile [5pt]

   (ii) Dire (motivando la risposta) quale tra le seguenti è la funzione di trasferimento del sistema considerato: (a) $W_a(s) = \frac{2s+1}{s^2(s-1)^5}$; (b) $W_b(s) = \frac{s(s+1)}{s^2-2s+1}$; (c) $W_c(s) = \frac{2}{s(s-1)}$; (d) $W_d(s) = \frac{2}{s(s-1)(s-3)}$; (e) $W_e(s) = \frac{2}{s^2}$ [4pt]

   (iii) Valutare la stabilità BIBO del sistema, fornirne una rappresentazione I-U equivalente specificando se questa rappresenta tutto il sistema (se non si è risolto il quesito (ii), rispondere a questo quesito supponendo che $W(s) = W_b(s)$) [2+3+2pt]

   (iv) Calcolare la risposta forzata nell'uscita $y(t)$ se si applica un ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$ (se non si è risolto il quesito (ii), rispondere a questo supponendo che $W(s) = W_b(s)$) [6pt]

2. Con riferimento allo schema in figura, dove $P(s) = K_p/(s+5)$ e $C(s) = 1/(s^2+s)$, utilizzando il criterio di Nyquist, individuare per quali valori di $K_p > 0$ il sistema complessivo Σ risulta asintoticamente stabile. Considerando quindi un qualsiasi valore di k_p per cui si ha la stabilità asintotica di Σ, valutare l'errore a regime rispetto a un riferimento del tipo $r(t) = \delta_{-1}(t)$ [6+3pt]



Es. 1 - i) Per valutare la stab. interna del sistema occorre calcolare gli autovalori di A. Si ha:

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & s-1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = s(s-1)\underbrace{\det\begin{pmatrix} s-2 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & -1 \\ -1 & -1 & s \end{pmatrix}}_{p(s)}$$

Senza andare avanti, dal fatto che $s = 1$ è un autovalore di A ed ha parte reale positiva, si può concludere che il sistema è $\boxed{\text{INSTABILE}}$

ii) W_a non può essere perché ha un denominatore di grado $7 = n > \bar{n} = 5$.

$W_b(s)$ non può essere perché non è strettamente propria $(m = n)$ mentre $D = 0$.

$W_d(s)$ non può essere perché 3 non è autovalore di A: questo si verifica sviluppando il determinante indicato sopra con $p(s)$, che si trova essere $p(s) = s^3 - 3s^2 + s + 1$ e notando che 3 non è una sua radice.

$W_e(s)$ non può esser perché neanche $s=0$ è una radice di $p(s)$ e quindi a denominatore di $W(s)$ non può esserci s^2.

$\Rightarrow \boxed{W(s) = W_c(s)}$ N.B. Era possibile calcolare esplicitamente $W(s)$ notando che poiché B e C hanno un solo elemento $\neq 0$, bastava calcolare l'elemento $(1,5)$ di $(sI-A)^{-1}$!

(iii) $W(s) = \dfrac{2}{s(s-1)}$ $\Rightarrow$ Ha un polo $s=1$ con parte reale >0 $\Rightarrow$ NON è stabile BIBO.

$$Y(s) = W(s)\,U(s) \Rightarrow (s^2 - s)Y = 2U \Rightarrow \boxed{\ddot{y} - \dot{y} = 2u \quad (I-U)}$$

Non rappresenta tutto il sistema perché $n = 2 < \bar{n} = 5$.

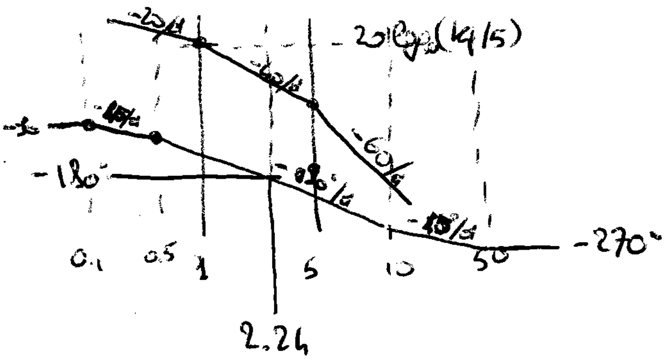
(iv) $$Y(s) = W(s)\,U(s) = \frac{2}{s(s-1)}\frac{1}{s} = \frac{2}{s^2(s-1)} = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{12}}{s^2} + \frac{\alpha_{21}}{s-1}$$

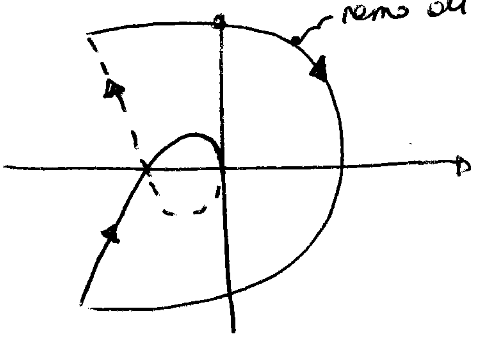
$$\alpha_{12} = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s-1} = -2, \quad \alpha_{11} = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s-1}\right) = -2, \quad \alpha_{21} = \lim_{s\to 1} \frac{2}{s^2} = 2$$

$$Y(s) = -\frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s-1} \Rightarrow \boxed{y(t) = \left(-2 - 2t + 2e^t\right)\delta_{-1}(t)}$$

Es. 2 Per valutare la stab. di Σ con Nyquist, occorre tracciare il diagramma polare di $h_0 P(s) C(s) = \dfrac{K_p}{5}\,\dfrac{1}{s(1+s)(1+s/5)}$

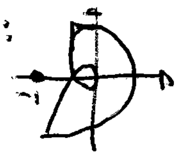
Bode: $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1/5 \rightarrow 1/\tau_1 = 1$, $1/\tau_2 = 5$





Per Nyquist Σ è es. stab. $\Leftrightarrow N = P_p = 0$, cioè $\Leftrightarrow$
$$20\log_{10}\frac{K_p}{5} - 40\log_{10} 2.24 < 0 \Rightarrow \boxed{K_p < 25.1}$$

$\forall$ valore di $K_p < 25.1$, il punto -1 è esterno al diagramma polare:



Inoltre, $\forall K_p < 25.1$, poiché il sistema è di tipo $\nu = 1$ (c'è un polo di ordine 1 in 0 nella $G(s) = P(s)\,C(s)$) mentre il riferimento è di tipo $k = 0$, poiché $\nu > k$, $\boxed{\varepsilon_\infty = 0}$