$\boxed{\text{Esempio di calcolo delle condizioni iniziali a partire da una rappr. IU}}$

$\ddot y + 3\dot y + 2y = u - \dot u$ IU

▶ Calcolare y_0 e y_0' tali che, se $u(t)=\delta_{-1}(t)$, la risposta completa sia $y(t) = \left(\frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}\right)\delta_{-1}(t)$.

$$\ddot y \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y - sy_0 - y_0'$$
$$\dot y \xrightarrow{\mathcal{L}} sY - y_0$$

$$\rightarrow s^2Y - sy_0 - y_0' + 3sY - 3y_0 + 2Y = U - sU$$

$$(s^2+3s+2)Y = sy_0 + y_0' + 3y_0 + (1-s)U$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{sy_0+y_0'+3y_0}{(s+2)(s+1)}}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\frac{1-s}{(s+2)(s+1)}}_{W(s)}U = \frac{sy_0+y_0'+3y_0}{(s+2)(s+1)} + \frac{1-s}{s(s+2)(s+1)}$$

$Y_F(s)=W(s)U(s)$

$$= \frac{s(sy_0+y_0'+3y_0)+1-s}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{21}}{s+1} + \frac{\alpha_{31}}{s+2}$$

$$\alpha_{11} = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1-s}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{21} = \lim_{s\to -1}(s+1)Y(s) = \lim_{s\to -1}\frac{s(sy_0+y_0'+3y_0)+1-s}{s(s+2)} = \frac{-(-y_0+y_0'+3y_0)+2}{-1} = -2+2y_0+y_0'$$

$$\alpha_{31} = \lim_{s\to -2}(s+2)Y(s) = \lim_{s\to -2}\frac{s(sy_0+y_0'+3y_0)+1-s}{s(s+1)} = \frac{-2(-2y_0+y_0'+3y_0)+3}{(-2)(-1)} = \frac{3}{2} - y_0 - y_0'$$

$$\Rightarrow y(t) = \left[\frac{1}{2} + (-2+2y_0+y_0')e^{-t} + \left(\frac{3}{2}-y_0-y_0'\right)e^{-2t}\right]\delta_{-1}(t)$$

$\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ ok, $\quad (-2+2y_0+y_0') = -2, \quad \left(\frac{3}{2}-y_0-y_0'\right) = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y_0 + y_0' = 0 \\ \frac{3}{2} - y_0 - y_0' = \frac{5}{2} \rightarrow y_0 + y_0' = -1 \end{cases}$$

$1^a - 2^a \rightarrow \boxed{y_0 = 1, \quad y_0' = -2}$

N.B. $\lim_{t\to 0^+} y(t) = \frac{1}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 1 = y_0$

$\lim_{t\to 0^+} y'(t) = \lim_{t\to 0} 2e^{-t} - 5e^{-2t} = -3 \neq y_0'$!

Si nota che $\lim_{t\to 0^+} y'(t) \neq y_0'$. Questo dipende dal fatto che nella IU (del secondo ordine) c'è $\dot u$ e $u(t)$ ha discontinuità in 0. Ciò implica che $\dot u$ contiene un impulso che fa saltare $y'(t)$ da $y'(0) = y_0' = -2$ a $y'(0^+) = -3$. Il salto non ci sarebbe stato se la IU non contenesse $\dot u$ oppure se $u(t)$ non era discontinua in 0 (per esempio se $u(t) = t\,\delta_{-1}(t)$).