Alcuni esercizi sull'Analisi Modale

1 Definizione delle matrici utilizzate negli esercizi

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1,\ 1,\ 1] \qquad C_2 = [0,\ 1,\ 0],$$

$$D = 0.$$

2 Testo esercizi

Per ciascuno dei seguenti sistemi a tempo continuo la cui rappresentazione ISU è caratterizzata dalle matrici:

(i) A, B_1, C_1, D

(ii) A, B_1, C_2, D

(iii) A, B_2, C_1, D

(iv) A, B_2, C_2, D

rispondere ai seguenti quesiti:

1. calcolare la matrice di transizione di stato $\Phi(t)$ attraverso la decomposizione spettrale;
2. verificare l'eccitabilità e l'osservabilità dei singoli modi;
3. verificare che un modo appare nella risposta impulsiva in uscita $W(t)$ se e solo se è eccitabile mediante impulsi in ingresso e osservabile in uscita.

3 Soluzioni

La risposta al quesito 1 è comune nei 4 casi (essendo la matrice A sempre la stessa). Gli autovalori (cioè i modi) di A sono distinti tra loro e pari a $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 6$. Le matrici T^{-1} (le cui colonne sono autovettori destri di A) e T (le cui righe sono autovettori sinistri di A) sono date rispettivamente da:

$$T^{-1} = [w_1,\ w_2,\ w_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix},$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8 \\ -1 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{3t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{6t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 7/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & -\frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{6t} \\ -e^{-2t} + e^{3t} & e^{3t} & \frac{1}{8}e^{-2t} - e^{3t} + \frac{7}{8}e^{6t} \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Eccitabilità e osservabilità dei singoli modi (risposta al secondo quesito). Un modo λ_i è eccitabile con impulsi in ingresso se $v_i' B \neq 0$, essendo v_i l'autovettore sinistro di A relativo a λ_i. Si ha dunque:

- $\lambda_1 = -2$

$$v_1' B_1 = [1,\ 0,\ -1/8] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1/8 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{eccitabile (sistemi (i) e (ii)).}$$

$$v_1' B_2 = [1,\ 0,\ -1/8] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{eccitabile (sistemi (iii) e (iv)).}$$

- $\lambda_2 = 3$

$$v_2' B_1 = [1,\ 1,\ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{NON eccitabile (sistemi (i) e (ii)).}$$

$$v_2' B_2 = [1,\ 1,\ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{NON eccitabile (sistemi (iii) e (iv)).}$$

- $\lambda_3 = 6$

$$v_3' B_1 = [0,\ 0,\ 1/8] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/8 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{eccitabile (sistemi (i) e (ii)).}$$

$$v_3' B_2 = [0,\ 0,\ 1/8] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{NON eccitabile (sistemi (iii) e (iv)).}$$

Un modo λ_i è osservabile in uscita se $C\,w_i \neq 0$, essendo w_i l'autovettore destro di A relativo a λ_i. Si ha dunque:

- $\lambda_1 = -2$

$$C_1\,w_1 = [1,\ 1,\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{NON osservabile (sistemi (i) e (iii)).}$$

$$C_2\,w_1 = [0,\ 1,\ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{osservabile (sistemi (ii) e (iv)).}$$

- $\lambda_2 = 3$

$$C_1\,w_2 = [1,\ 1,\ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{osservabile (sistemi (i) e (iii)).}$$

$$C_2\,w_2 = [0,\ 1,\ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{osservabile (sistemi (ii) e (iv)).}$$

- $\lambda_3 = 6$

$$C_1\,w_3 = [1,\ 1,\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = 16 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{osservabile (sistemi (i) e (iii)).}$$

$$C_2\,w_3 = [0,\ 1,\ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = 7 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{osservabile (sistemi (ii) e (iv)).}$$

Per quanto riguarda il **terzo quesito**, determiniamo innanzitutto l'espressione della funzione di risposta impulsiva $W(t)$ che è data da $W(t) = C\ e^{At}\ B + D\ \delta_0(t)$. Si ha nei quattro casi:

$$
\begin{aligned}
W_{(i)}(t) &= C_1\ e^{At}\ B_1 + D\ \delta_0(t) = 2\ e^{6t}, \\
W_{(ii)}(t) &= C_2\ e^{At}\ B_1 + D\ \delta_0(t) = \frac{1}{8}\ e^{-2t} + \frac{7}{8}\ e^{6t}, \\
W_{(iii)}(t) &= C_1\ e^{At}\ B_2 + D\ \delta_0(t) = 0, \\
W_{(iv)}(t) &= C_2\ e^{At}\ B_2 + D\ \delta_0(t) = -e^{-2t}.
\end{aligned}
$$

Come è facile verificare, in ciascuna $W(t)$ compaiono solo i modi che per quel sistema sono sia eccitabili con impulsi dall'ingresso sia osservabili in uscita. Per esempio, nel caso (i), compare solo il modo descritto dall'autovalore $\lambda_3 = 6$ che infatti, per quel sistema, è l'unico eccitabile e osservabile. Nel caso del sistema (iii) invece nessun modo è sia eccitabile e osservabile, e infatti la funzione $W_{(iii)}(t)$ è nulla.