Alcuni esercizi sul calcolo della risposta a tempo discreto

Gli esercizi qui proposti riguardano solo sistemi aventi uno stato di dimensione $\bar{n} = 3$, in quanto ciò rappresenta un buon compromesso tra semplicità e generalità del problema. Il metodo di risoluzione necessario per risolvere questi esercizi ha comunque validità generale e può essere applicato qualsiasi sia la dimensione dello stato del sistema.

1 Esercizio 1

Si consideri un sistema dinamico a tempo discreto con matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [1,\ 0,\ 1] \qquad D = 0.$$

Calcolare la risposta completa in uscita $y(k)$ a partire dallo stato iniziale $x_0 = [1,\ 2,\ 0]'$ quando si applichi l'ingresso $u(k) = 4^k \delta_{-1}(k)$.
Soluzione. La risposta completa è data dalla somma della risposta libera $y_\ell(k)$ e della risposta forzata $y_f(k)$. Per entrambe occorre calcolare $(zI - A)^{-1}$. Si ha:

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z(z-2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(z-2)(z-1)} & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$Y_\ell(z) = C(zI - A)^{-1} z x_0 = \frac{z(z+1)}{(z-2)(z-1)} = 3\frac{z}{z-2} - 2\frac{z}{z-1},$$

da cui

$$y_\ell(k) = 3 \cdot 2^k - 2.$$

La risposta forzata invece è data da:

$$\begin{aligned} Y_f(z) &= [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) = \frac{4z-2}{z(z-2)(z-1)} \cdot \frac{z}{z-4} \\ &= \frac{4z-2}{(z-1)(z-2)(z-4)} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{3}{2}\frac{z}{z-2} + \frac{7}{12}\frac{z}{z-4}, \end{aligned}$$

da cui

$$y_f(k) = \frac{1}{4}\delta_0(k) + \frac{2}{3} - \frac{3}{2}2^k + \frac{7}{12}4^k.$$

La risposta completa è quindi data da:

$$y(k) = y_\ell(k) + y_f(k) = \frac{1}{4}\delta_0(k) - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}2^k + \frac{7}{12}4^k.$$

2 Esercizio 2

Si consideri un sistema dinamico a tempo discreto con matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = [2,\ 0,\ 0] \qquad D = 1.$$

Calcolare la risposta completa in uscita $y(k)$ a partire dallo stato iniziale $x_0 = [1,\ 0,\ 0]'$ quando si applichi l'ingresso $u(k) = k\delta_{-1}(k)$.
Soluzione. La risposta completa è data dalla somma della risposta libera $y_\ell(k)$ e della risposta forzata $y_f(k)$. Per entrambe occorre calcolare $(zI - A)^{-1}$. Si ha:

$$(zI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} & \frac{1}{(z+1)(z-2)} & \frac{1}{(z+1)(z-0.1)(z-2)} \\ 0 & \frac{1}{z-2} & \frac{1}{(z-0.1)(z-2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-0.1} \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$Y_\ell(z) = C(zI-A)^{-1}zx_0 = \frac{2z}{z+1},$$

da cui

$$y_\ell(k) = 2 \cdot (-1)^k = 2cos(k\pi).$$

Si noti che a tempo discreto si possono avere modi oscillanti anche con autovalori reali (nel caso a tempo continuo ciò richiedeva necessariamente autovalori complessi). La risposta forzata invece è data da:

$$\begin{aligned} Y_f(z) &= [C(zI-A)^{-1}B + D]U(z) = \frac{z^3 + 0.9z^2 - 6.1z + 2.6}{(z+1)(z-2)(z-0.1)} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{z^4 + 0.9z^3 - 6.1z^2 + 2.6z}{(z+1)(z-2)(z-0.1)(z-1)^2} = \frac{0.65z}{z+1} + \frac{0.35z}{z-2} - \frac{1.18z}{z-0.1} + \frac{0.18z}{z-1} + \frac{0.89z}{(z-1)^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$y_f(k) = 0.65 \cdot (-1)^k + 0.35 \cdot 2^k - 1.18 \cdot 0.1^k + 0.18 + 0.89k.$$

La risposta completa è quindi data da:

$$y(k) = y_\ell(k) + y_f(k) = 2.65 \cdot (-1)^k + 0.35 \cdot 2^k - 1.18 \cdot 0.1^k + 0.18 + 0.89k.$$

3 Esercizio 3

Si consideri un sistema dinamico a tempo discreto con matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C = [0,\ 1,\ 3] \qquad D = 1.$$

Calcolare la risposta completa in uscita $y(k)$ a partire dallo stato iniziale $x_0 = [0,\ 1,\ 0]'$ quando si applichi l'ingresso $u(k) = 24k^2\delta_{-1}(k)$.
Soluzione. La risposta completa è data dalla somma della risposta libera $y_\ell(k)$ e della risposta forzata $y_f(k)$. Per entrambe occorre calcolare $(zI - A)^{-1}$. Si ha:

$$(zI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-2} & -3\frac{1}{(z-5)(z-2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-5} & 0 \\ 0 & -2\frac{1}{(z-5)(z-7)} & \frac{1}{z-7} \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$Y_\ell(z) = C(zI-A)^{-1}zx_0 = \frac{z(z-13)}{(z-5)(z-7)} = -3\frac{z}{z-7} + 4\frac{z}{z-5},$$

da cui

$$y_\ell(k) = -3 \cdot 7^k + 4 \cdot 5^k.$$

La risposta forzata invece è data da:

$$\begin{aligned} Y_f(z) &= [C(zI-A)^{-1}B + D]U(z) = \frac{z+2}{z-7} \cdot 24\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \\ &= 24\frac{z(z+1)(z+2)}{(z-7)(z-1)^3} = \frac{8z}{z-7} - \frac{8z}{z-1} - \frac{24z}{(z-1)^2} - \frac{24z}{(z-1)^3}, \end{aligned}$$

da cui

$$y_f(k) = 8 \cdot 7^k - 8 - 24k - 12k(k-1) = 8(7^k - 1) - 12k(k+1).$$

La risposta completa è quindi data da:

$$y(k) = y_\ell(k) + y_f(k) = 5 \cdot 7^k - 8 + 4 \cdot 5^k - 12k(k+1).$$

4 Esercizio 4

Si consideri un sistema dinamico a tempo discreto con matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [0,\ 1,\ 4] \qquad D = 0.$$

Calcolare la risposta completa in uscita $y(k)$ a partire dallo stato iniziale $x_0 = [4,\ 0,\ 2]'$ quando si applichi l'ingresso $u(k) = 6 \cdot 5^k \delta_{-1}(k)$.
Soluzione. La risposta completa è data dalla somma della risposta libera $y_\ell(k)$ e della risposta forzata $y_f(k)$. Per entrambe occorre calcolare $(zI - A)^{-1}$. Si ha:

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{(z-1)(z-3)} & \frac{1}{z-1} & 0 \\ \frac{4}{(z-1)(z-2)(z-3)} & \frac{1}{(z-1)(z-2)} & \frac{1}{z-2} \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$Y_\ell(z) = C(zI - A)^{-1} z x_0 = 8\frac{z(z^2 - 2z + 7)}{(z-1)(z-2)(z-3)} = 40\frac{z}{z-3} - 56\frac{z}{z-2} + 24\frac{z}{z-1},$$

da cui

$$y_\ell(k) = 40 \cdot 3^k - 56 \cdot 2^k + 24.$$

La risposta forzata invece è data da:

$$\begin{aligned} Y_f(z) &= [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) = 2\frac{z+2}{(z-1)(z-2)} \cdot 6\frac{z}{z-5} \\ &= 12\frac{z(z+2)}{(z-1)(z-2)(z-5)} = \frac{9z}{z-1} - \frac{16z}{z-2} + \frac{7z}{z-5}, \end{aligned}$$

da cui

$$y_f(k) = 9 - 16 \cdot 2^k + 7 \cdot 5^k.$$

La risposta completa è quindi data da:

$$y(k) = y_\ell(k) + y_f(k) = 33 + 40 \cdot 3^k - 72 \cdot 2^k + 7 \cdot 5^k.$$

5 Esercizio 5

Con riferimento all'esercizio 1 (stesse matrici e stesse condizioni iniziali che si riportano qui per comodità):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [1,\ 0,\ 1] \qquad D = 0,$$

calcolare la risposta libera $x_\ell(k)$ e la risposta forzata $x_f(k)$ nello stato a partire dalle stesse condizioni iniziali dell'esercizio 1 (cioè $x_0 = [1,\ 2,\ 0]'$) quando si applichi lo stesso ingresso dell'esercizio 1 (cioè $u(k) = 4^k \delta_{-1}(k)$). Calcolare anche la risposta completa $x(k)$ nello stato e verificare che questa dà luogo alla stessa risposta completa in uscita $y(k)$ calcolata nell'esercizio 1.

Soluzione. La risposta completa nello stato è data dalla somma della risposta libera $x_\ell(k)$ e della risposta forzata $x_f(k)$ nello stato. Per entrambe occorre calcolare $(zI-A)^{-1}$. Come visto nell'esercizio 1, si ha:

$$(zI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z(z-2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(z-2)(z-1)} & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$X_\ell(z) = (zI-A)^{-1}zx_0 = \begin{bmatrix} \frac{z}{z-2} \\ 2\frac{z}{z-2} \\ 2\frac{z}{(z-1)(z-2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z}{z-2} \\ 2\frac{z}{z-2} \\ -2\frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{z-2} \end{bmatrix},$$

da cui

$$x_\ell(k) = \begin{bmatrix} 2^k \\ 2^{k+1} \\ -2+2^{k+1} \end{bmatrix}$$

La risposta forzata invece è data da:

$$\begin{aligned} X_f(z) &= (zI-A)^{-1}BU(z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{z(z-2)} \\ \frac{2}{z-2} \\ \frac{2}{(z-1)(z-2)} \end{bmatrix} \frac{z}{z-4} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{(z-2)(z-4)} \\ \frac{2z}{(z-2)(z-4)} \\ \frac{2z}{(z-1)(z-2)(z-4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-2} + \frac{1}{4}\frac{z}{z-4} \\ -\frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-4} \\ \frac{2}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-4} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

da cui

$$x_f(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\delta_0(k) - 2^{k-1} + 4^{k-1} \\ -2^k + 4^k \\ \frac{2}{3} - 2^k + \frac{1}{3}4^k \end{bmatrix}.$$

La risposta completa è quindi data da:

$$x(k) = x_\ell(k) + x_f(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\delta_0(k) + 2^{k-1} + 4^{k-1} \\ 2^k + 4^k \\ -\frac{4}{3} + 2^k + \frac{1}{3}4^k \end{bmatrix}.$$

La risposta completa in uscita è data da:

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) = \frac{1}{4}\delta_0(k) - \frac{4}{3} + 3\cdot 2^{k-1} + 4^{k-1} + \frac{1}{3}4^k,$$

la quale, opportunamente manipolata, coincide con la risposta completa in uscita calcolata nell'esercizio 1.