Ulteriori esercizi sulla prima parte del corso

1. Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = [0,\ 1], \qquad D = 2.$$

   (i) Calcolare la risposta forzata $y(t)$ che si ottiene se $u(t) = 2\delta_{-1}(t)$. Ripetere con $u(t) = 2\delta_{-1}(t-3)$.

   (ii) Fornire una rappresentazione I-U equivalente alla rappresentazione I-S-U indicata e dire se rappresenta tutto il sistema (motivando la risposta).

   (iii) Calcolare la condizione iniziale $x(0)$ che dà luogo alla risposta libera $x(t) = \begin{bmatrix} cos(t) \\ -sin(t) \end{bmatrix} \delta_{-1}(t)$.

2. Si consideri un sistema lineare stazionario con rappresentazione I-U:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{du}{dt} + u(t).$$

   (i) A partire da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta $y(t)$ se $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$.

   (ii) Fornire una rappresentazione I-S-U equivalente alla rappresentazione I-U indicata.

3. Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Soltanto una tra le seguenti funzioni di s, con una opportuna scelta delle matrici B, C e D, può essere la funzione di trasferimento del sistema dato. Dire qual è, motivando chiaramente la risposta: (a) $W(s) = \frac{1}{1-s}$; (b) $W(s) = \frac{1}{s^4-s^2}$; (c) $W(s) = \frac{1}{s^2-5s}$; (d) $W(s) = \frac{s^3+3s^2+1}{s(s-1)}$; (e) $W(s) = \frac{1}{s(s-1)^2}$; (f) $W(s) = s+1$.

4. Data la seguente rappresentazione I-U di un sistema lineare stazionario:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y(t) = \ddot{u} - 2\dot{u} + u(t)$$

   (i) A partire da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta $y(t)$ se $u(t) = e^{t}\delta_{-1}(t)$.

   (ii) Quante e quali condizioni iniziali occorre specificare per calcolare la risposta libera?

   (iii) Fornire una rappresentazione I-S-U della rappresentazione I-U indicata e calcolare la risposta $x(t)$ nello stato a partire da condizioni iniziali nulle quando si applichi un ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$.

5. Si consideri un sistema lineare e stazionario $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = [0,\ 1,\ -1] \qquad D = 0.$$

   (i) Calcolare la risposta libera nello stato e nell'uscita a partire dalle condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (ii) Determinare la rappresentazione I-U equivalente al sistema dato e valutare se il sistema dato è raggiungibile e osservabile, motivando la risposta. Calcolare quindi la risposta forzata (in uscita) corrispondente all'ingresso $u(t) = e^{t}\delta_{-1}(t)$.

6. Si consideri un sistema lineare e stazionario $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = [a-b,\ b] \qquad D = 0.$$

   dove a e b sono due costanti reali.

(i) Supponendo $a = b = 1$, calcolare la risposta completa (cioè libera più forzata) nello stato e nell'uscita se $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $u(t) = 2t\delta_{-1}(t)$.

(ii) Con a e b generici si calcoli la funzione di trasferimento $W(s)$ e la rappresentazione I-U (ingresso-uscita) corrispondente al sistema dato.

(iii) Determinare per quali valori di a e b la funzione $W(s)$ non rappresenta completamente il sistema.

Alcuni esempi di domande di teoria

1. Dire se un sistema lineare e stazionario può avere come risposta forzata in uscita, per l'ingresso $u(t) = e^{2t}\delta_{-1}(t)$, la funzione $y(t) = 2\delta_0(t)$.

2. Enunciare e dimostrare il teorema del valore finale (relativo al calcolo di $\lim_{t\to\infty} f(t)$ mediante $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$).

3. Sia $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ la trasformata di Laplace di $x(t)$. Indicare dimostrandolo quanto vale $\mathcal{L}\{\dot{x}\}$, cioè la trasformata della derivata di $x(t)$.