

Esempio di diagramma di Bode e polare

Si consideri la funzione

$$W(s) = \frac{500s}{(s-3)(s+15)^2}.$$

La riscriviamo nella forma standard per tracciare i diagrammi di Bode, mettendo in evidenza i termini noti:

$$W(s) = -\frac{500}{3 \cdot 15^2} \frac{s}{(1-s/3)(1+s/15)^2} = -0.74 \frac{s}{(1-s/3)(1+s/15)^2}.$$

Le costanti di tempo sono $\tau_1 = 1/3$ e $\tau_2 = 1/15$, per cui i punti di rottura saranno: $1/\tau_1 = 3$ e $1/\tau_2 = 15$. Il coefficiente di guadagno $K = -0.74$ ha un modulo in dB pari a $20 \log_{10}(0.74) = -2.62dB$ (attenzione, il meno in dB deriva dal fatto che $|K|$ è minore di uno e non dal fatto che K è negativo!).

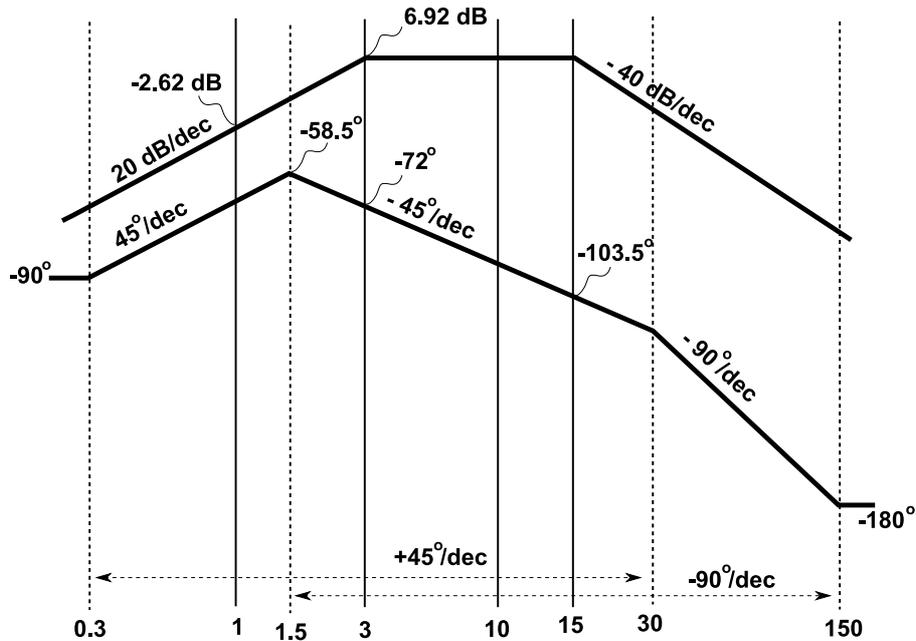


Figure 1: Diagrammi di Bode della funzione $W(s)$ considerata

I diagrammi di Bode sono riportati in Fig. 1. Si nota il contributo alle fasi di $+45^\circ/dec$ nelle due decadi a cavallo di $1/\tau_1 = 3$ dovuto al termine $1-s/3$ che sta a denominatore ma ha un segno meno e quindi dà un contributo positivo alle fasi. Il contributo di $-90^\circ/dec$ dipende invece dal termine $1+s/15$ che, essendo al quadrato, fornisce un contributo doppio ($2 \times 45^\circ/dec$). Il valore di $6.92dB$ riportato in figura è stato ottenuto dalla formula:

$$-2.62 + 20 \log_{10} \left(\frac{3}{1} \right) = 6.92.$$

Analogamente, i valori delle fasi, sono stati ottenuti da:

$$-90^\circ + 45^\circ \log_{10} \left(\frac{1.5}{0.3} \right) \approx -58.5^\circ,$$

$$-58.5^\circ - 45^\circ \log_{10} \left(\frac{3}{1.5} \right) \approx -72^\circ$$

e

$$-58.5^\circ - 45^\circ \log_{10} \left(\frac{15}{1.5} \right) \approx -103.5^\circ.$$

Il diagramma polare è riportato in Fig. 2.

Osservando il diagramma si nota come $N = 0$. Essendo $P_p = 1$, per Nyquist il sistema a ciclo chiuso che ha $W(s)$ come funzione di trasferimento nella catena aperta non è asintoticamente stabile. Verifichiamolo con Routh. Il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso è dato da:

$$(s-3)(s+15)^2 + 500s = s^3 + 27s^2 + 635s - 675.$$

Dal fatto che un coefficiente è negativo, si evince che non tutti i poli a ciclo chiuso hanno parte reale negativa, confermando la non asintotica stabilità del sistema.

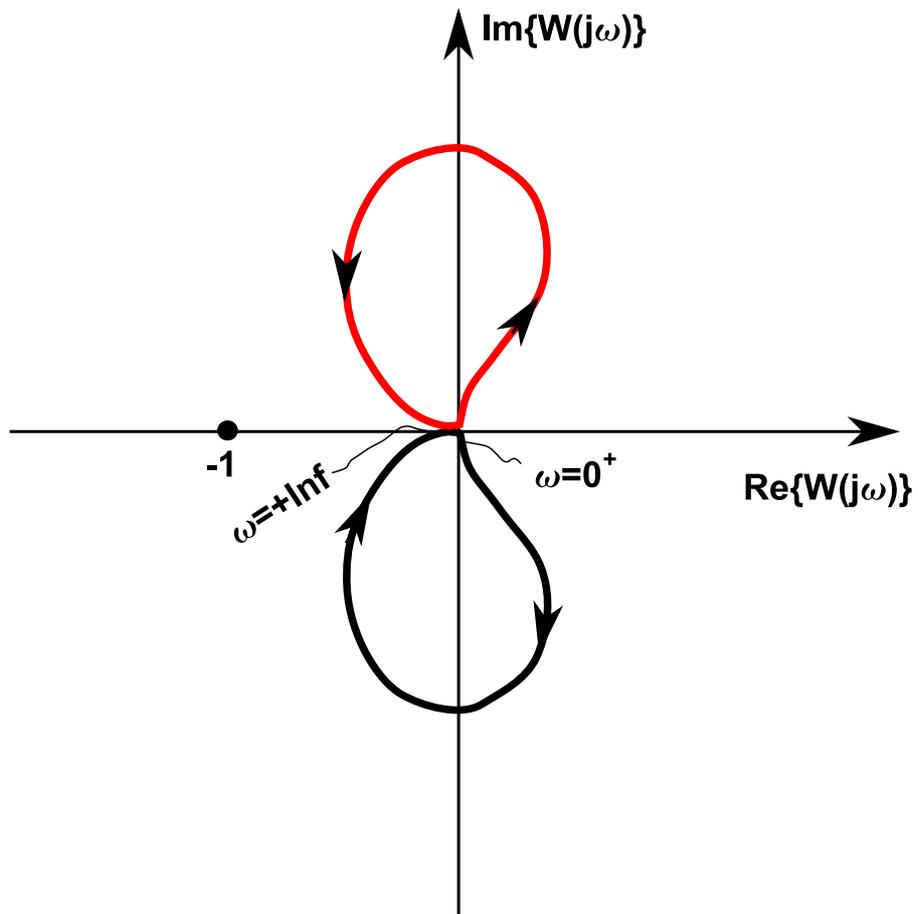


Figure 2: Diagramma polare della funzione $W(s)$ considerata: in nero il diagramma per le ω positive, in rosso quello per le ω negative