COGNOME: NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, con matrice dinamica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e matrice d'ingresso $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   (i) Calcolare la risposta libera nello stato $x_\ell(t)$ a partire dalle condizioni iniziali $x_0 = [-1, 0]^T$ [8pt]
   (ii) Se $y = Cx + Du$, per quali matrici C e D la rappresentazione IU equivalente al sistema dato è $\dot{y} - 2y = 4u - \dot{u}$? [6pt]
   (iii) Valutare l'eccitabilità dei modi del sistema [6pt]
   (iv) Con riferimento all'analisi modale, dire a quale dei seguenti casi appartiene il sistema dato, disegnando la figura corrispondente: centro, fuoco stabile, fuoco instabile, nodo stabile, nodo instabile, sella [5pt]

2. Si consideri un sistema a tempo discreto $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, con le matrici A e B del quesito precedente. Calcolare la prima componente della risposta forzata $x_f(k)$ dello stato se si applica in ingresso $u(k) = \delta_0(k)$ [6pt]

Es. 1) (i) $X_\ell(s) = (sI-A)^{-1}x_0$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 3 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X_\ell(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 3 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{bmatrix} -(s+1) \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s-2} \\ -\frac{3}{(s-2)(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{3}{(s-2)(s+1)} = -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1} \Rightarrow \boxed{x_\ell(t) = \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} \end{bmatrix} \delta_{-1}(t)}$$

(ii) $\dot{y} - 2y = 4u - \dot{u} \Rightarrow (s-2)Y = (4-s)U \Rightarrow Y = \frac{4-s}{s-2}U$ con $W(s) = \frac{4-s}{s-2}$

$$W(s) = \frac{4-s}{s-2} = -1 + \frac{2}{s-2} = C(sI-A)^{-1}B + D \Rightarrow \boxed{D = -1}$$

Occorre trovare C:

$$C(sI-A)^{-1}B = \frac{2}{s-2}.$$

Ora, ponendo $C = [c_1 \ c_2]$, $C(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{(s-2)(s+1)} [c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} s+1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$= \frac{c_1 s + c_1 + 3c_2}{(s-2)(s+1)} = \frac{2}{s-2}$$

per $c_1 = 2$, $c_2 = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{C = [2 \ 0]}$$

(iii) $\lambda_1 = 2 \quad (A - \lambda_1 I)w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

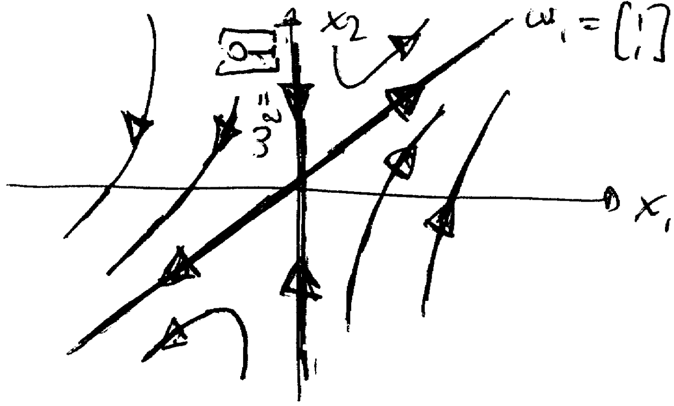
$\lambda_2 = -1 \quad (A - \lambda_2 I)w_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T^{-1} = [w_1 \ w_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$v_1^T B = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 \text{ eccitabile}}$

$v_2^T B = [-1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 \text{ eccitabile}}$

(iv) $\left.\begin{array}{l}\lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0\end{array}\right\}$ Sella



2) $X_f(z) = (zI - A)^{-1} B\, U(z)$

$$(zI-A)^{-1}B = \frac{1}{(z-2)(z+1)}\begin{bmatrix} z+1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(in base ai calcoli del quesito (1))

$\mathcal{Z}\{\delta_0(k)\} = 1$

$$\Rightarrow \quad X_f(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-2} \\ \frac{3}{(z-2)(z+1)} \end{bmatrix}$$

La prima componente è

$$X_{f_1}(z) = \frac{1}{z-2}$$

$$\overline{X_{f_1}}(z) = \frac{X_{f_1}(z)}{z} = \frac{1}{z(z-2)} = -\frac{1/2}{z} + \frac{1/2}{z-2}$$

$$X_{f_1}(z) = z\,\overline{X_{f_1}}(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{z}{z-2}$$

$$\boxed{x_{f_1}(k) = -\frac{1}{2}\,\delta_0(k) + \frac{1}{2}(+2)^k\,\delta_{-1}(k) = 2^{k-1}\,\delta_{-1}(k-1)}$$

N.B. Al punto (ii) non si poteva usare la formula

$$C = [b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad \cdots] \qquad D = b_n$$

in quanto le matrici A e B non sono nella forma giusta.
Se anche fossero state nella forma giusta, occorreva far apparire al denominatore di $W(s)$ tutto il polinomio caratteristico di A, moltiplicando e dividendo $W(s)$ per $(s+1)$.