COMPITO 1

COGNOME: NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema lineare stazionario a tempo continuo caratterizzato dalla matrice dinamica $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
   (i) Calcolare e^{At} avvalendosi della decomposizione spettrale di A [10pt]
   (ii) Calcolare la risposta libera nello stato $x_\ell(t)$ a partire dalle condizioni iniziali $x_0 = [1, -1]^T$ [5pt]
   (iii) Assumendo che la matrice di uscita sia $C = [\alpha,\ 2]$, studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'osservabilità dei modi del sistema [6pt]
   (iv) Assumendo ingresso nullo per ogni t, calcolare lo stato $x(t)$ per $t = 1$ sapendo che al tempo $t = 2$ si ha $x(2) = [-1, 0]^T$ [5pt]
2. Sia $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$ la trasformata *Zeta* di $x(k)$. Riportare, dimostrandola, l'espressione di $\mathcal{Z}\{x(k+1)\}$ [5pt]

ES. 1i) Calcoliamo innanzitutto gli autovalori di A:

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & 4 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2) \Rightarrow \text{autovalori} \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Hanno entrambi molteplicità algebrica 1, quindi si può scrivere:

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} w_1 v_1^T + e^{\lambda_2 t} w_2 v_2^T$$

dove w_i $(i=1,2)$ è l'autovettore destro relativo a λ_i e v_i^T quello sinistro. Calcoliamoli:

$\lambda_1 = -1$ $\quad A - \lambda_1 I = A + I = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $(A-\lambda_1 I) w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ $\quad A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(A-\lambda_2 I) w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

(N.B. La scelta di w_1 e w_2 <u>non</u> è univoca).

Quindi $T^{-1} = [w_1 \ \ w_2] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow v_1^T = [1 \ \ -4/3], \quad v_2^T = [0 \ \ 1/3].$$

Si ha $w_1 v_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[1 \ \ -4/3] = \begin{bmatrix} 1 & -4/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $w_2 v_2^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}[0 \ \ 1/3] = \begin{bmatrix} 0 & 4/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & -4/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 & 4/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{4}{3}(e^{2t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

(1ii) In generale occorrerebbe calcolare $\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}x_0\}$. Però qui, avendo già calcolato e^{At}, conviene utilizzare la formula

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{4}{3}(e^{2t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{4}{3}e^{-t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$$

(1iii) Il modo $e^{\lambda_i t}$ $(i=1,2)$ è osservabile quando $C \cdot w_i \neq 0$, con w_i autovettore destro di λ_i. Si ha quindi, per quanto riguarda $\lambda_1 = -1$,

$$C \cdot w_1 = [\alpha \ \ 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \Rightarrow e^{-t} \text{ è osservabile se e solo se } \boxed{\alpha \neq 0}$$

Analogamente, per quanto riguarda $\lambda_2 = 2$,

$$C \cdot w_2 = [\alpha \ \ 2]\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4\alpha + 6 \Rightarrow e^{2t} \text{ è osservabile se e solo se } \boxed{\alpha \neq -3/2}$$

(1iv) Essendo l'ingresso $u(t)$ nullo $\forall t$, la risposta forzata è identicamente nulla e $x(t) \equiv x_\ell(t)$. Per l'invarianza alla traslazione temporale inoltre, calcolare $x_\ell(1)$ conoscendo $x_\ell(2)$ equivale a calcolare $x(0)$ conoscendo $x_\ell(1)$. Ci sono due modi per farlo, indicando d'ora in poi $x_\ell(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e cercando x_0.

a) Sfruttando l'esponenziale della matrice A già calcolato al quesito (1i).

$$x_e(t) = e^{At}x(0) \Rightarrow x(0) = e^{-tA}x_e(t) \Rightarrow x(0) = e^{-A}x_e(1)$$

Ora, $e^{-A} = e^{At}\big|_{t=-1}$. Pertanto $x(0) = e^{-A}x_e(1) = \begin{bmatrix} e^{+1} & * \\ 0 & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \end{bmatrix}$,

avendo indicato con $*$ elementi che, essendo moltiplicati per ϕ, non è necessario conoscere. La risposta al quesito (1iv) è pertanto $x(1) = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) Sfruttando la formula $X_e(s) = (sI-A)^{-1}x(0)$. Indicando con $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ il vettore incognito di condizioni iniziali $x(0)$, si ha:

$$X_e(s) = (sI-A)^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} s+1 & -4 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}\begin{bmatrix} s-2 & 4 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{4}{(s+1)(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{s+1} + \frac{4b}{(s+1)(s-2)} \\ \frac{b}{s-2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x_e(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}e^{-t} + \alpha_{21}e^{2t} \\ b\,e^{2t} \end{bmatrix}\delta_{-1}(t)$$

Ora però, poiché $x_e(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, necessariamente $\boxed{b=0}$.

Pertanto, se $b=0$,

$$x_e(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s+1}\right\} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a e^{-t}\delta_{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per aver $x_e(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, deve essere $ae^{-t}\big|_{t=1} = -1$, cioè $\frac{a}{e} = -1$,

cioè $\boxed{a=-e}$. Per cui $x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \end{bmatrix}$, confermando quanto trovato con l'altro metodo. ☒

Es. 2) $$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} = z\sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k-1} = z\sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-(k+1)}$$

Prendendo $\ell = k+1$ si ha:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = z\sum_{\ell=1}^{\infty} x(\ell)z^{-\ell} = z\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} x(\ell)z^{-\ell} - x(0)\right] =$$

$$= z\left[X(z) - x(0)\right].$$ ☒