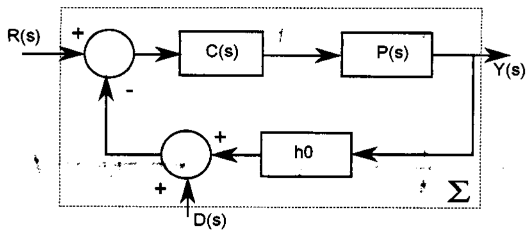
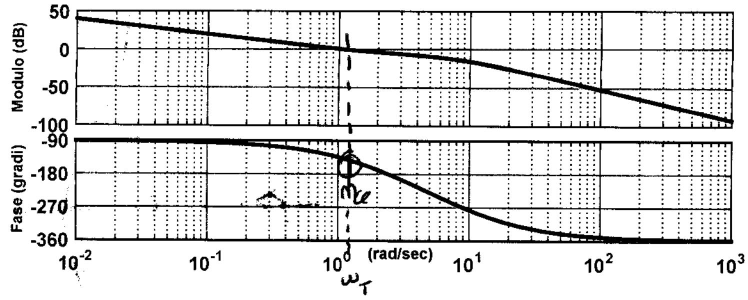
COMPITO (1)



COGNOME: NOME: MATRICOLA:

**N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).**

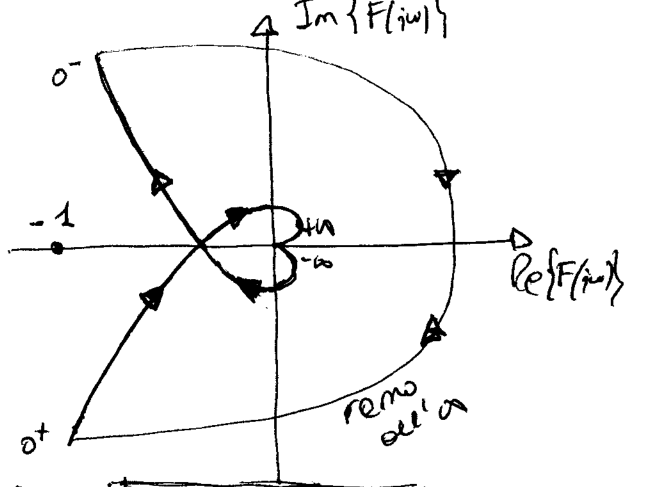



1. Si consideri il sistema in controreazione riportato in figura, in cui $h_0 = 2$, $C(s) = 10$ e $P(s) = 0.05\frac{1-0.5s}{s(1+0.1s)(1+0.2s)}$. I diagrammi di Bode della funzione $F(s) = h_0P(s)C(s)$ sono anche riportati in figura.
   - (i) Tracciare il diagramma polare di $F(s)$ e valutare la stabilità del sistema a ciclo chiuso $\Sigma$ mediante Nyquist. Fornire una stima molto grossolana del margine di fase che si vede in figura precisando se è positivo o negativo [6+2pt]
   - (ii) Calcolare l'effetto a regime sull'uscita $y$ del disturbo costante $d(t) = 5\delta_{-1}(t)$ [4pt]
2. Si consideri un sistema lineare stazionario $\dot{x} = Ax + Bu$. Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda+10)(\lambda^2+3\lambda+4)$. Determinare la dimensione $\bar{n}$ di $x$ e valutare la stabilità interna del sistema. Senza conoscere altre informazioni (in particolare senza conoscere le matrici $C$ e $D$ tali che $y = Cx + Du$), si può dire qualcosa in questo caso sulla stabilità esterna? [1+5+2pt]
3. Si consideri la funzione $F(s) = K'\frac{s-2}{s(s+10)(s+5)}$.
   - (i) Se ne tracci il luogo delle radici sapendo che $s_1 = 4.54$, $s_2 = -1.45$ e $s_3 = -7.59$ sono punti singolari del luogo. Possono esserci altri punti singolari? Perché? [6+1pt]
   - (ii) La funzione $F(s) = h_0P(s)C(s)$ considerata al primo quesito coincide con la $F(s)$ di questo quesito per un valore negativo di $K'$. Determinare questo valore e discutere quindi brevemente la coerenza tra l'analisi della stabilità effettuata con Nyquist nel primo quesito con quella che viene fuori esaminando il luogo delle radici tracciato al punto precedente [1+3pt]

Es. 1) i)

$$F(s) = h_0P(s)C(s) = \frac{1-0.5s}{s(1+0.1s)(1+0.2s)}$$




Per $\tilde{\omega} \simeq 2.1$, $\varphi_F(\tilde{\omega}) = -180°$ e

$M_F(\tilde{\omega}) < 0\,dB \Rightarrow |F(j\tilde{\omega})| < 1$ e

quindi $-1$ è come in figura (esterno).

Ora, $P_p = 0$, $N = 0 \Rightarrow N = P_p$. Per Nyquist si ha la stab. asintotica di $\Sigma$.

A $\omega_T \simeq 1.1$ si ha $|F(j\omega_T)| = 0\,dB$ e $\varphi_F(j\omega_T) \simeq -135° \Rightarrow \boxed{m_\varphi \simeq 45° > 0}$

ii) In $s$, l'effetto su $y$ del disturbo $d(t)$ è $Y^{(d)}(s) = W_{dy}(s)D(s)$, con

$W_{dy}(s) = -\frac{P(s)C(s)}{1+h_0P(s)C(s)}$. A regime, $y^{(d)}_\infty = \lim_{t\to\infty} y^{(d)}(t) = \lim_{s\to 0} sY^{(d)}(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}W_{dy}(s)\cdot\frac{5}{\cancel{s}}$,

essendo $D(s) = \mathcal{L}\{5\delta_{-1}(t)\} = \frac{5}{s}$.

Quindi $y^{(d)}_\infty = 5\lim_{s\to 0} W_{dy}(s) = -5\lim_{s\to 0}\frac{N_PN_C}{D_PD_C + h_0N_PN_C} = -5\cdot\frac{\cancel{0.05\cdot 10}}{2\cdot\cancel{0.05\cdot 10}} = -\frac{5}{2}$,

avendo scritto $C(s) = N_C(s)/D_C(s)$ e $P(s) = N_P(s)/D_P(s)$, e notando che $D_P(0) = 0$.

Es. 2) Siccome $p_A(\lambda)$ ha grado 6, $x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ con $\boxed{\bar{n} = 6}$. Inoltre, le radici di $p_A(\lambda)$ sono gli autovalori di $A$ e sono tutti a parte reale negativa, come è facile verificare $\Rightarrow$ Il sistema è asintoticamente stabile. Qualsiasi siano $B$, $C$ e $D$, i poli di $W(s)$ sono tutti o alcuni fra gli autovalori di $A$ e quindi, in questo caso, hanno tutti parte reale negativa $\Rightarrow$ il sistema è BIBO stabile.

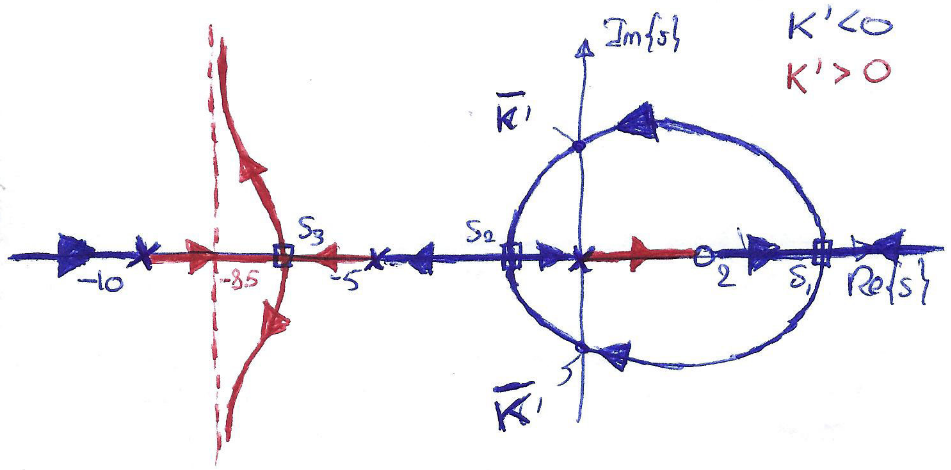
ES. 3) $F(s) = \dfrac{K'(s-2)}{s(s+10)(s+5)}$

i) $n=3,\ m=1$

$\Rightarrow n-m=2$ rami all'$\infty$, e

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i\right) = \frac{1}{2}(-10-5-2) = -8.5$$

è il centro degli asintoti.




L'equazione dei punti singolari: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s-p_j} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-z_i} = 0$ ha grado $n+m-1=3$, ed ha pertanto 3 radici, che sono quelle riportate nel testo. Non ce ne sono altre.

ii) $$\frac{1-0.5s}{s(1+0.1s)(1+0.2s)} = -\frac{0.5}{0.1\cdot 0.2}\cdot\frac{s-2}{s(s+10)(s+5)} = K'\frac{s-2}{s(s+10)(s+5)} \text{ per } \boxed{K' = -\frac{0.5}{0.1\cdot 0.2} = -25}$$

---

Le due analisi (quella con Nyquist del quesito 1 e quella del luogo delle radici) sono coerenti. Infatti, dal luogo si vede che $\Sigma$ è as. stabile per $K' \in (\bar{K}', 0)$, dove $\bar{K}'<0$ è il valore di $K'$ per cui le due radici complesse dei rami del luogo negativo intersecano l'asse immaginario (si veda la figura). Infatti $\forall K'>0$, c'è sempre una radice con parte reale positiva (è quella che si muove sul ramo da $\emptyset$ a 2), mentre, per $K'<\bar{K}'$ i due rami complessi sono a destra dell'asse immaginario.

Il valore di $K'$ si può determinare col criterio di Routh applicato al polinomio

$$f(s,K') = s(s+10)(s+5) + K'(s-2) = s^3 + 15s^2 + (K'+50)s - 2K' \Rightarrow \boxed{K'<0,\ K'>-50}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & K'+50 \\ 15 & -2K' \\ 1 & \\ -2K' & \end{array}$$

$$-\frac{1}{15}\left(-2K' - 15K' - 15\cdot 50\right) = \frac{17K'+750}{15} \Rightarrow \boxed{K' > -\frac{750}{17}}$$

Se $K' > -\frac{750}{17}$, cioè $17K'+750>0$, si può mettere 1 sulla terza riga. Si noti che $-\frac{750}{17} > -50$ (infatti $17\cdot 50 = 850$).

In base a Routh, la stabilità si ha per $K' \in \left(-\frac{750}{17}, 0\right)$, per cui $\boxed{\bar{K}' = -\frac{750}{17}}$.

Poiché $K' = -25 \in \left(-\frac{750}{17}, 0\right)$ (infatti $25\cdot 17 = 425$), il criterio di Nyquist fornisce una risposta coerente.

N.B. È anche possibile notare come, aumentando il modulo di $K'<0$, il diagramma polare di $F(s)$ circonda $-1$ per $|K'|>|\bar{K}'|$ e come, prendendo $K'>0$, il diagramma polare ruota di $180°$ racchiudendo il $-1$ con la chiusura all'$\infty$. I due criteri pertanto (Nyquist e luogo delle radici) danno risposte del tutto coerenti.