COGNOME: COMPITO 1 NOME: MATRICOLA:

**N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).**

1. Due tra le seguenti cinque funzioni $F(s)$ corrispondono ai due diagrammi polari riportati sotto (riferiti alle sole $\omega$ positive): 1) $\frac{1}{10s(s+1)^2}$; 2) $\frac{s+2}{s^2+s+1}$; 3) $\frac{1}{s^2(s-1)}$; 4) $-\frac{1}{s^2(s+1)}$; 5) $\frac{s+2}{s^2+1}$. Individuare le due funzioni, completare quindi il diagramma corrispondente aggiungendo il ramo per le $\omega$ negative e la chiusura all'infinito e valutare mediante Nyquist la stabilità del sistema in retroazione che ha come funzione a catena aperta la $F(s)$ relativa al diagramma considerato [6+5+5pt]

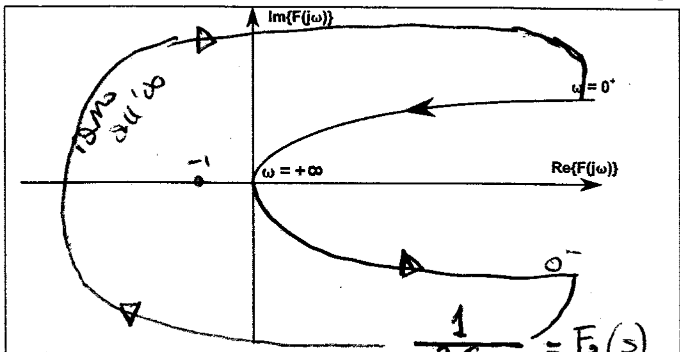



**Diagramma polare 1:** F(s) = ... $\frac{1}{s^2(s-1)} = F_3(s)$

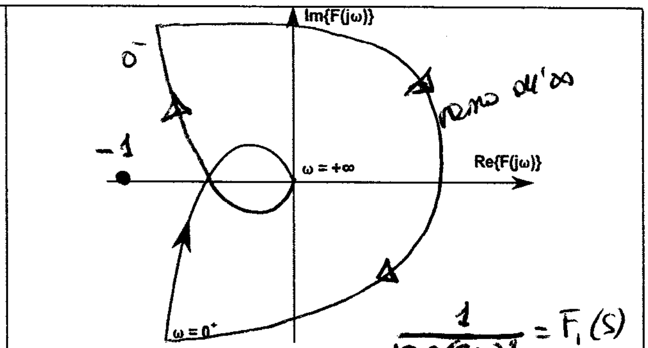
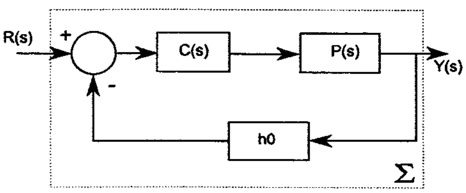



**Diagramma polare 2:** F(s) = ...... $\frac{1}{10s(s+1)^2} = F_1(s)$

2. Si consideri lo schema in basso, dove $P(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$. Con riferimento alla sola specifica di precisione, dire come vanno scelti $h_0$ e $C(s) = C_1(s) = \frac{K_c}{s^\alpha}$ per assicurare un errore a regime $|\varepsilon_\infty| \leq 0.1$ rispetto a un'uscita desiderata $y_d(t) = K_d r(t)$ con $K_d = 2$ nei seguenti tre differenti casi: **(a)** $r(t) = t\delta_{-1}(t)$; **(b)** $r(t) = \delta_{-1}(t)$; **(c)** $r(t) = (2t^2+1)\delta_{-1}(t)$. Dire quindi, giustificando la risposta, se nel caso (a), la $C(s) = C_1(s)$ trovata è sufficiente per ottenere la stabilità asintotica di $\Sigma$ [5+2+2+3pt]

3. Dimostrare che la controreazione istantanea non altera le proprietà di raggiungibilità e osservabilità [3pt]



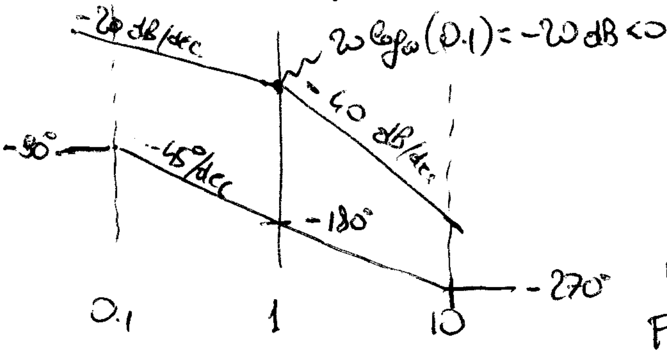

Es. 1) Le funzioni (2) e (5) vanno scartate in quanto il loro diagramma non va all'∞ per $\omega \to 0$. La (1) per $\omega \to 0^+$ tende all'∞ con una fase di $-90°$ (termine $1/s$). Essendo l'unica con queste caratteristiche, corrisponde al diagramma 2. Sia la (3) sia la (4) hanno una fase iniziale di $0°$ (per via di $1/s^2$ e di $K<0$). La (4) però ha una fase che decresce (termine $\frac{1}{s+1}$) e quindi il suo diagramma polare tende a $-90°$ per $\omega \to +\infty$. Pertanto, il diagramma 1 corrisponde alla funzione (3), cioè a $F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)} = -\frac{1}{s^2(1-s)}$.

Stabilità. $\boxed{\text{Diagramma 1}}$: $N = -1$ (giro orario attorno a $-1$)

$P_p = 1$ ($s=1$ polo con parte reale positiva)

$N \neq P_p \to \boxed{\text{INSTABILE}}$ per Nyquist. N.B. Il $-1$ è dentro perché il ramo è all'∞

$\boxed{\text{Diagramma 2}}$: $P_p = 0$. Per valutare $N$, occorre capire se $-1$ sta dentro o fuori il diagramma. Facciamo i diagrammi di Bode di $F(s) = \frac{0.1}{s(1+s)^2}$. Si nota che $\tilde{\omega} = 1$ ($\tilde{\omega}$ è la $\omega$ per cui la fase di $F(j\omega)$ è $-180°$). Ora $|F(j\tilde{\omega})| = 0.1 < 1 \Rightarrow$ il punto $-1$ è fuori come riportato in figura. Quindi $N = P_p = 0$ $\Rightarrow \boxed{\text{AS. STABILE}}$ per Nyquist.




N.B. Ponendo $s = j\omega$ con $\omega = 1$, si ha

$$F(j) = \frac{0.1}{j(1+j)^2} = \frac{0.1}{j \cdot 2j} = \frac{0.1}{-2} = -0.05$$

Il diagramma di Bode ci dice $|F(j)| = 0.1$ perché è approssimato e non 0.05.

Es. 2) $h_0 = \frac{1}{K_d} = 0.5$ in tutti e tre i casi (a), (b), (c).

(a) il riferimento è di tipo $K=1$, occorre $\nu=K=1$. Un polo in $s=0$ già ce l'ha $P(s)$, cioè $\nu_p=1 \rightarrow \nu = \alpha+\nu_p = \alpha+1 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha=0}$. $K_c$ deve essere tale che $\frac{Kd^2}{K_G} = \frac{Kd^2}{K_p \cdot K_c} = \frac{4}{K_c} \leq 0.1 \Rightarrow K_c \geq 40$. Scegliamo $\boxed{K_c=40} \Rightarrow \boxed{C_1(s)=40}$

(b) $K=0 \rightarrow \nu=0$. Ma $\nu=\nu_p+\alpha = 1+\alpha \geq 1$ in quanto $\alpha$ va scelto $\geq 0$. Pertanto $\nu=1$ con $\varepsilon_\infty=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=0}$ e $\boxed{K_c \text{ libero}} \rightarrow \boxed{C_1(s)=1}$

(c) Scegliendo $\nu=2$ si ha $\varepsilon_\infty$ limitato. Dalla sovrapposizione degli effetti infatti, l'errore a regime è la somma dell'errore relativo a $r_1(t)=2t^2$ e quello relativo a $r_2(t)=1$. Con $\nu=2$ il secondo errore è $\emptyset$ ($\nu>K=0$). Il primo errore è $4Kd^2/K_G$, il 4 perché $2t^2 = 4 \cdot \frac{t^2}{2}$. Quindi $K_c$ deve essere tale che $4 \cdot \frac{Kd^2}{K_p \cdot K_c} = 4\frac{4}{K_c} = \frac{16}{K_c} \leq 0.1$
$\rightarrow \boxed{K_c=160}$ e $\boxed{\alpha=1} \Rightarrow \boxed{C_1(s)=\frac{160}{s}}$

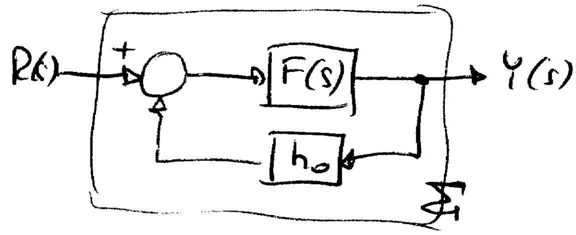
Per quanto riguarda la stabilità nel caso (a), applico Routh al denominatore di $W(s) = \frac{P(s)\,C(s)}{1+h_o P(s) C(s)}$ con $C(s)=40$ e $h_o=0.5$. Tale denominatore è $s^3+s^2+21s+20$. Infatti, ponendo $P=n_p/d_p$ e $C=n_c/d_c$, si ha:

$$W = \frac{n_p n_c}{d_p d_c + h_o n_p n_c} \quad \text{e} \quad d_p d_c + h_o n_p n_c = s(s^2+s+1)+0.5(s+1)40 = s^3+s^2+s+20s+20 = s^3+s^2+21s+20.$$

| | |
|---|---|
| 1 | 21 |
| 1 | 20 |
| 1 | |
| 20 | |

Si nota che Routh è verificato $\Rightarrow$ la $C_1(s)$ rende $\Sigma$ as. stabile ☒

Es. 3) Controreazione istantanea:




Ipotesi $F(s)=\frac{N_F(s)}{D_F(s)}$ rappresenta tutto il sistema $\Rightarrow N_F$ e $D_F$ primi tra loro.
Supponiamo inoltre $F(s)$ strettamente propria (in modo che $\Sigma$ sia certamente ben connesso).

Obiettivo $W(s) = \frac{F(s)}{1+h_o F(s)} = \frac{N_W(s)}{D_W(s)}$ rappresenta tutto il sistema, cioè $N_W$ e $D_W$ sono primi tra loro.

Prova Per assurdo supponiamo che nel calcolo di $W(s)$ ci sia una semplificazione, cioè $N_W=(s-p)\overline{N_W}$ e $D_W=(s-p)\overline{D_W}$. Ora

$$W=\frac{N_F}{D_F+h_o N_F} \Rightarrow \boxed{N_F = N_W = (s-p)\overline{N_W}} \qquad D_F + h_o N_F = D_W = (s-p)\overline{D_W}$$

Ne segue che $\boxed{D_F =}\,(s-p)\overline{D_W} - h_o N_F = (s-p)\overline{D_W} - h_o(s-p)\overline{N_W} = \boxed{(s-p)[\overline{D_W} - h_o \overline{N_W}]}$

Ma allora $N_F$ e $D_F$ non potevano essere primi tra loro, in quanto entrambi contenevano un fattore comune $(s-p)$. ☒