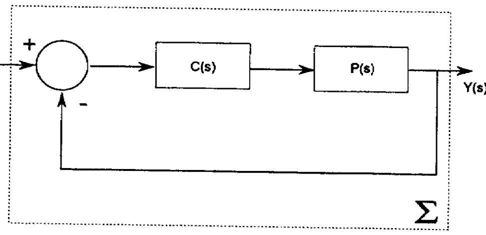
COGNOME: NOME: MATRICOLA:

**N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).**

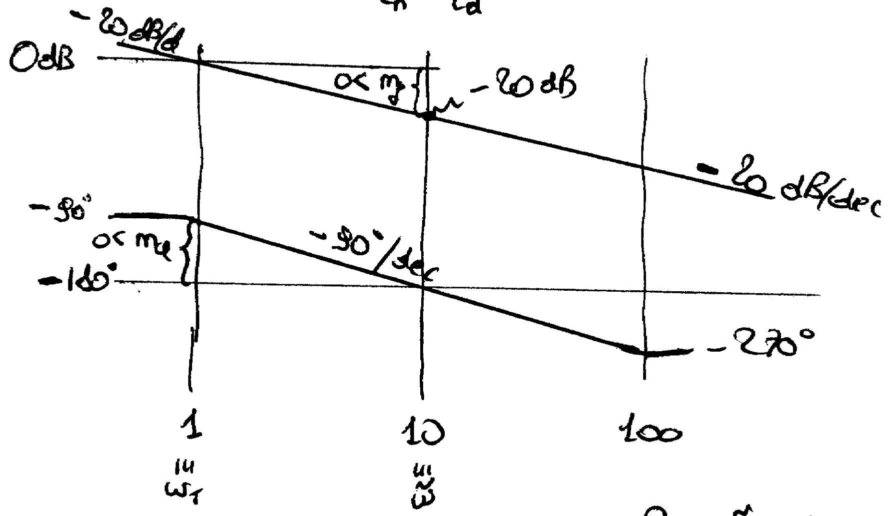
1. Si consideri il sistema in controreazione $\Sigma$ riportato in figura, in cui $C(s) = \frac{1}{s}$ e $P(s) = \frac{1-s\tau}{1+s\tau}$, con $\tau$ parametro positivo.
   (i) Assumendo $\tau = 0.1$, valutare la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso $\Sigma$ mediante Nyquist, indicando anche il valore dei margini di fase e di guadagno [7+2+1pt]
   (ii) Nell'ipotesi che $\Sigma$ sia asintoticamente stabile, calcolare l'errore a regime (con $K_d = 1$) rispetto a un riferimento $r(t) = 5\delta_{-1}(t)$. Ripetere con un riferimento $r(t) = (2t+1)\delta_{-1}(t)$ [3+2pt]
   (iii) Con $\tau > 0$ generico, riportare nel grafico sottostante il valore del margine di fase in funzione di $\tau \in (0.01, 100)$, deducendo quindi per quali valori di $\tau$ si ha la stabilità asintotica di $\Sigma$ [2+2pt]
2. Si consideri la funzione $F(s) = K' \frac{s-10}{s^2+10s}$.
   (i) Tracciarne il luogo delle radici e, servendosi anche del criterio di Routh, determinare per quali valori di $K'$ il sistema a ciclo chiuso, che ha $F(s)$ come funzione di trasferimento a catena aperta, risulta asintoticamente stabile [6+3pt]
   (ii) La funzione $F(s) = P(s) \cdot C(s)$ considerata al quesito (1.i) coincide con la $F(s)$ di questo quesito per un opportuno valore di $K'$. Determinare questo valore e dedurre da ciò il segno della parte reale dei poli del sistema $\Sigma$ del quesito (1.i) [1+2pt]

1i) $\tau = 0.1$, $F(s) = P(s)C(s) = \dfrac{1-0.1s}{s(1+0.1s)}$ (in questo caso $h_0 = 1$)

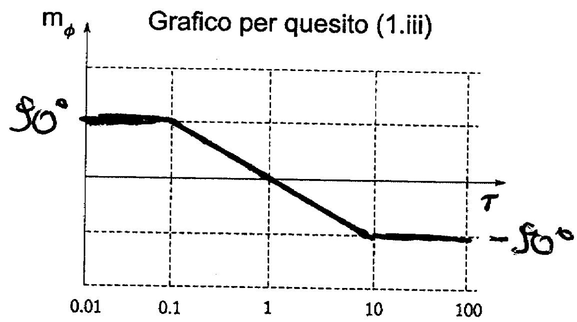
$\tau_n = 0.1 = \tau_d \Rightarrow \frac{1}{\tau_n} = \frac{1}{\tau_d} = 10$



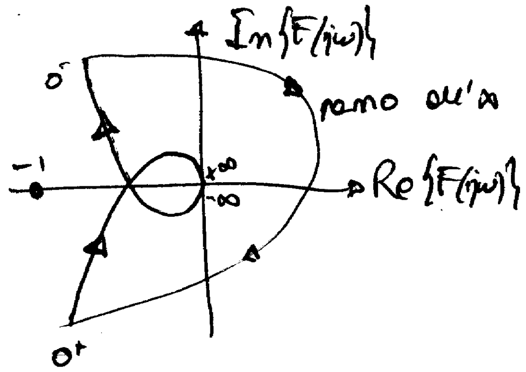














Per $\tilde{\omega} = 10$ rad/sec, $\varphi(\tilde{\omega}) = -180°$ e $|F(j\tilde{\omega})|_{dB} < 0$

$\Rightarrow |F(j\tilde{\omega})| < 1 \Rightarrow -1$ è fuori, per cui $N = 0$.

Essendo $P_p = 0$, $N = P_p \Rightarrow \boxed{\Sigma \text{ as. stabile}}$

$m_g = -|F(j\tilde{\omega})|_{dB} = -(-20) = \boxed{20\ dB} > 0.$

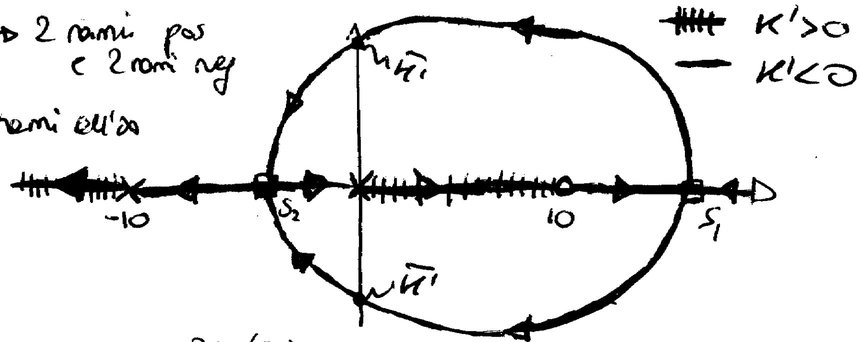
$m_\varphi = \varphi(\omega_T) - (-180°) = -90° + 180° = \boxed{90°} > 0.$

1ii) $\boxed{\varepsilon_\infty = 0}$ nel primo caso: sistema di tipo $\nu = 1$, riferimento di tipo $k = 0 \Rightarrow \nu > k$.
Nel secondo caso, per sovrapposizione effetti, $\varepsilon_\infty = \varepsilon_{\infty,1} + \varepsilon_{\infty,2}$, con $\varepsilon_{\infty,1}$ errore con $r_1(t) = 2t\delta_{-1}(t)$ e $\varepsilon_{\infty,2}$ con $r_2(t) = \delta_{-1}(t)$.
$\varepsilon_{\infty,2} = 0$ come prima ($\nu = 1 > k = 0$). $\varepsilon_{\infty,1} = 2\frac{K_d^2}{K_G} = 2$ (2 perché $2t = 2\frac{t^k}{k!}$ per $k = 1 \Rightarrow \nu = k = 1$)
$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_\infty = 2}$ (N.B. $K_d = 1/h_0 = 1$ e $K_G = K_p \cdot K_c = 1$)

1iii) Al variare di $\tau$, i moduli non cambiano ($\omega_T = 1\ \forall \tau$) ma traslano le fasi.
Per $\tau < 0.1$, $\frac{1}{\tau} > 10 \Rightarrow m_\varphi = 90°$. Per $\tau > 10$, $\frac{1}{\tau} < 0.1 \Rightarrow m_\varphi = -90°$. Nel complesso $m_\varphi$ varia come nel grafico sopra.
$\Sigma$ è as. stabile se $m_\varphi > 0$ (stab. regolare) $\Rightarrow \boxed{\tau < 1}$ ($\tau > 0$ per definizione)

2i) $F(s) = K' \dfrac{s-10}{s(s+10)}$

$n=2 \rightarrow$ 2 rami pos e 2 rami neg
$m=1$
$n-m=1$ rami all'$\infty$




P.ti singolari:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+10} - \frac{1}{s-10} = 0$$

$$\Rightarrow s^2 - 20s - 100 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = 10(1 \pm \sqrt{2}) \simeq \begin{cases} 24 \ (s_1) \\ -4 \ (s_2) \end{cases}$$

Dal luogo si vede che per $K'>0$ una radice è sempre positiva. Entrambe le radici di $f(s,K') = s(s+10) + K'(s-10)$ sono a parte reale negativa se $K' \in (\bar{K}', 0)$, con $\bar{K}' < 0$. Per trovarlo si può procedere con Routh, applicato a:

$$f(s,K') = s^2 + (K'+10)s - 10K'$$

Ma grado 2: occorre e basta che abbia i coefficienti positivi affinché le sue radici siano a parte reale negativa $\Rightarrow K'+10>0, \ -10K'>0$

$$\Rightarrow \boxed{K' \in (-10,0)} \quad (\bar{K}' = -10)$$

2ii) $K' \dfrac{s-10}{s(s+10)} = \dfrac{1-0.1s}{s(1+0.1s)} \iff \boxed{K' = -1}$

---

Poiché $K' = -1 \in (-10,0)$, le radici di $f(s,K')$ per $K'=-1$ hanno parte reale strettamente negativa. Ma $f(s,K')$ è proprio il denominatore della funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema $\Sigma'$ del quesito (1i) (per $K'=-1$). Pertanto le radici di tale funzione sono i poli di $\Sigma'$, che sono quindi a parte reale negativa, confermando l'analisi di stabilità del punto (1i), secondo cui $\Sigma'$ era as. stabile.

∎