COGNOME: NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema lineare stazionario a tempo continuo con rappresentazione ISU caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad C = [-2 \quad 1], \qquad D = -2$$

   (i) Calcolare la risposta forzata in uscita corrispondente all'ingresso $u(t) = -2t^2\delta_{-1}(t)$ [10pt]

   (ii) Determinare la rappresentazione IU equivalente alla ISU assegnata e dire se rappresenta tutto il sistema [4+4pt]

2. Si consideri un sistema a tempo discreto con una rappresentazione ISU caratterizzata dalle stesse matrici dell'esercizio 1. Calcolare la seconda componente della risposta libera nello stato a partire dalle condizioni iniziali $x_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ [7pt]

3. La matrice dinamica di un sistema lineare stazionario ha come autovalori -1, j, $-j$, 2 e -3. La funzione di trasferimento del sistema è $\frac{1}{s^4-s^3-s^2-s-2}$. Quali modi del sistema sono sia eccitabili sia osservabili? Rispondere giustificando chiaramente la risposta [6pt]

Es. 1) i) $Y_f(s) = [C(sI-A)^{-1}B + D]\,U(s)$ (risposta forzata in uscita)

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{bmatrix} \qquad \det(sI-A) = s(s-3)+2 = s^2-3s+2 = (s-1)(s-2)$$

Quindi $(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$

e $W(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = [-2 \quad 1]\frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} - 2$

$$= [-2 \quad 1]\frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{bmatrix} -2 \\ -2s \end{bmatrix} - 2 = \frac{4-2s}{(s-1)(s-2)} - 2 = \frac{-2\cancel{(s-2)}}{(s-1)\cancel{(s-2)}} - 2 =$$

$$= \frac{\cancel{-2}-2s\cancel{+2}}{s-1} = -\frac{2s}{s-1}.$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{-2t^2\delta_{-1}(t)\} = -2\cdot 2\,\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\delta_{-1}(t)\right\} = -\frac{4}{s^3}$$

$$\Rightarrow Y_f(s) = W(s)U(s) = -\frac{2\cancel{s}}{s-1}\cdot\left(-\frac{4}{s^{\cancel{3}}}\right) = \frac{8}{s^2(s-1)} = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{12}}{s^2} + \frac{\alpha_{21}}{s-1}$$

$$\alpha_{12} = \lim_{s\to 0} s^2Y_f(s) = \lim_{s\to 0}\frac{8}{s-1} = -8$$

$$\alpha_{11} = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(s^2Y_f(s)\right) = \lim_{s\to 0} -\frac{8}{(s-1)^2} = -8$$

$$\alpha_{21} = \lim_{s\to 1}(s-1)Y_f(s) = \lim_{s\to 1}\frac{8}{s^2} = 8$$

$$\Rightarrow Y_f(s) = -\frac{8}{s} - \frac{8}{s^2} + \frac{8}{s-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_f(t) = 8(-1-t+e^t)\,\delta_{-1}(t)}$$

ii) $W(s) = -\frac{2s}{s-1} \Rightarrow (s-1)Y = -2sU \Rightarrow sY - Y = -2sU$

Antitrasformando, si ottiene la rappresentazione IU: $\boxed{\dot y - y = -2\dot u}$

La IU non rappresenta tutto il sistema perché n = ordine massimo derivata della y nella IU pari a 1, è minore di $\bar{n}=2$, che è la dimensione dello stato del sistema (infatti si è avuta una semplificazione del fattore $(s-2)$ nel calcolo di $W(s)$).

ES.2) Risposte libere nello stato:

$$X_\ell(z) = (zI-A)^{-1} z x_0 = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \begin{bmatrix} z-3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \begin{bmatrix} * \\ 6+2z \end{bmatrix}$$

Pertanto $X_{\ell,2}(z) = \frac{(2z+6)z}{(z-1)(z-2)}$ e $\bar{X}_{\ell,2}(z) = \frac{X_{\ell 2}(z)}{z} = \frac{2z+6}{(z-1)(z-2)} = \frac{\alpha_{11}}{z-1} + \frac{\alpha_{21}}{z-2}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} &= \lim_{z\to 1} (z-1)\bar{X}_{\ell,2}(z) = \lim_{z\to 1} \frac{2z+6}{z-2} = \frac{8}{-1} = -8 \\ \alpha_{21} &= \lim_{z\to 2} (z-2)\bar{X}_{\ell,2}(z) = \lim_{z\to 2} \frac{2z+6}{z-1} = \frac{10}{1} = 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{X}_{\ell,2}(z) = -\frac{8}{z-1} + \frac{10}{z-2}$$

$$\Rightarrow X_{\ell,2}(z) = -8\frac{z}{z-1} + 10\frac{z}{z-2} \xRightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \boxed{x_{\ell,2}(k) = (-8 + 10\cdot 2^k)\, \delta_{-1}(k)}$$

ES.3) Un modo è eccitabile e osservabile se e solo se compare come polo di $W(s)$. È facile verificare(*) che i primi 4 autovalori di A (cioè -1, j, $-j$ e 2) annullano il denominatore di $W(s)$ (e cioè sono poli di $W(s)$) mentre -3 no. Pertanto, tutti i modi del sistema sono eccitabili e osservabili ad eccezione di quello associato a $\lambda = -3$.

(*) Si ha infatti che il denominatore di $W(s)$ è $d_W(s) = s^4 - s^3 - s^2 - s - 2$.
Ora:

$d_W(\lambda_1 = -1) = 1+1-1+1-2 = 0$ ✓

$d_W(\lambda_2 = j) = 1 + j + 1 - j - 2 = 0$ ✓ $\Rightarrow d_W(-j) = d_W(j)^* = 0$ ✓

$d_W(\lambda_4 = 2) = 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 16 - 8 - 4 - 2 - 2 = 0$ ✓

$d_W(\lambda_5 = -3) = 3^4 - (-3)^3 - 3^2 + 3 - 2 = 81 + 27 - 9 + 1 \neq 0$

Quindi, come detto, -1, j, $-j$ e 2 sono poli di $W(s)$ mentre -3 no.