COGNOME: Compito 1 NOME: MATRICOLA:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Si consideri un sistema lineare stazionario a tempo continuo con rappresentazione IU data da: $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = u + \dot{u}$.
   (i) Calcolare la risposta forzata $y_f(t)$ che si ottiene applicando in ingresso al sistema $u(t) = \delta_{-1}(t)$ [8pt]
   (ii) Sia ora $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$. Calcolare le condizioni iniziali y_0 e y_0' sapendo che la risposta completa è $y(t) = 2t\, e^t \delta_{-1}(t)$. Dire quindi, motivando la risposta, se y_0 e y_0' coincidono con il limite per t che tende a 0 di, rispettivamente, $y(t)$ e $y'(t)$ [6pt]
   (iii) Determinare una rappresentazione ISU equivalente alla rappresentazione IU indicata. Sia ora $y_\ell(t)$ la risposta libera generata dalla rappresentazione IU a partire da certe condizioni iniziali y_0 e y_0'. Dire come va scelto il vettore iniziale x_0 affinché la ISU ricavata nella prima parte del quesito fornisca la stessa risposta libera $y_\ell(t)$ della rapresentazione IU [5+4pt]

2. Sia $X(z)$ la trasformata Zeta di un segnale a tempo discreto $x(k)$. Riportare, dimostrandola, l'espressione della trasformata Zeta di $k \cdot x(k)$ e utilizzarla per determinare la trasformata Zeta di $k^2 \cdot 2^k \delta_{-1}(k)$, a partire da quella di $2^k \delta_{-1}(k)$ [2+3+3pt]

Es. 1i) $\mathcal{L}\{\dot{y}\} = sY(s) - y_0$ $\Rightarrow$ $s^2Y - sy_0 - y_0' - 2sY + 2y_0 + Y = U + sU$

$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} = s^2Y(s) - sy_0 - y_0'$ $\qquad (s^2 - 2s + 1)Y(s) = sy_0 + y_0' - 2y_0 + (s+1)U$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{sy_0 + y_0' - 2y_0}{(s-1)^2}}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\frac{s+1}{(s-1)^2}U(s)}_{Y_f(s) = W(s)U(s)} \qquad U(s) = \mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s}$$

Quindi $Y_f(s) = \dfrac{s+1}{s(s-1)^2} = \dfrac{\alpha_{11}}{s} + \dfrac{\alpha_{21}}{s-1} + \dfrac{\alpha_{22}}{(s-1)^2}$

$\alpha_{11} = \lim_{s\to 0} sY_f(s) = 1$

$\alpha_{22} = \lim_{s\to 1} (s-1)^2 Y_f(s) = 2$

$\alpha_{21} = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}(s-1)^2 Y_f(s) = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\frac{s+1}{s}$
$= \lim_{s\to 1} \frac{\cancel{s} - \cancel{s} - 1}{s^2} = -1$

$\Rightarrow \boxed{y_f(t) = (1 - e^t + 2te^t)\delta_{-1}(t)}$

1ii) Ora $U(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}\delta_{-1}(t)\} = \dfrac{1}{s+1}$

Pertanto $Y(s) = \dfrac{sy_0 + y_0' - 2y_0}{(s-1)^2} + \dfrac{\cancel{s+1}}{(s-1)^2}\dfrac{1}{\cancel{s+1}} = \dfrac{sy_0 + y_0' - 2y_0 + 1}{(s-1)^2}$

D'altra parte, $Y(s) = \mathcal{L}\{2t\,e^t\delta_{-1}(t)\} = \dfrac{2}{(s-1)^2}$

Ne segue che $sy_0 + y_0' - 2y_0 + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_0' = 1 \end{array}}$

Ora, $\lim_{t\to 0^+} y(t) = 0$, $\lim_{t\to 0^+} y'(t) = \lim_{t\to 0^+} (2 + 2t)e^t = 2$.

Si nota quindi che $\lim_{t\to 0^+} y(t) \equiv y_0$ ma $\lim_{t\to 0^+} y'(t) \neq y_0'$. Questo è dovuto alla presenza di $\dot{u}$ nella rappresentazione IU e al fatto che la $u(t)$ presenta una discontinuità in $t = 0$, per cui $y'(t)$ passa da $y'(0) = 1$ a $y'(0^+) = 2$.

1iii) Dai conti fatti nel quesito (1i) si vede che la funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2} = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 1} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \;\; b_1] = [1 \;\; 1] \qquad D = 0 \text{ (siamo nel caso } m < n)$$

sono le matrici di una possibile rappresentazione ISU equivalente $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$.

La risposta libera generata dalla IU a partire da y_0 e y_0' è stata già calcolata al punto (i) ed è data da $Y_\ell(s) = \dfrac{sy_0 + y_0' - 2y_0}{(s-1)^2}$.

Quella generata dalla ISU a partire da $x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ è data da:

$$Y_\ell(s) = C(sI-A)^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-3 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{(a+b)s - 3a + b}{(s-1)^2}.$$

Le due risposte libere coincidono se

$$\begin{cases} a+b = y_0 \\ -3a+b = y_0' - 2y_0 \end{cases} \qquad a + 3a = y_0 - y_0' + 2y_0 \Rightarrow 4a = 3y_0 - y_0' \Rightarrow \boxed{a = \frac{3y_0 - y_0'}{4}}$$

$$b = y_0 - a = y_0 - \frac{3y_0 - y_0'}{4} = \frac{y_0 + y_0'}{4} \Rightarrow \boxed{b = \frac{y_0 + y_0'}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = \begin{bmatrix} (3y_0 - y_0')/4 \\ (y_0 + y_0')/4 \end{bmatrix}}$$

■

Es. 2) $\mathcal{Z}\{k \cdot x(k)\} = -z \dfrac{d}{dz} X(z)$, essendo $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$.

Infatti $\dfrac{d}{dz} X(z) = \dfrac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} -k z^{-k-1} x_k$.

Ne segue che $-z \dfrac{d}{dz} X(z) = +z \sum_{k=0} k z^{-k-1} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} k x_k z^{-k} = \mathcal{Z}\{k x_k\}$.

Ora, $\mathcal{Z}\{2^k \delta_{-1}(k)\} = \dfrac{z}{z-2}$

Quindi $\mathcal{Z}\{k \cdot 2^k \delta_{-1}(k)\} = -z \dfrac{d}{dz} \dfrac{z}{z-2} = -z \dfrac{\cancel{z} - 2 - \cancel{z}}{(z-2)^2} = \dfrac{2z}{(z-2)^2}$

e $\mathcal{Z}\{k^2 \cdot 2^k \delta_{-1}(k)\} = -z \dfrac{d}{dz} \dfrac{2z}{(z-2)^2} = -z \dfrac{(z-2)^{\cancel{2}} \cdot 2 - 2z \cdot 2\cancel{(z-2)}}{(z-2)^{\cancel{4}3}} = -z \dfrac{2z - 4 - 4z}{(z-2)^3}$

$$= \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3}$$

■