Cinematica diretta di un manipolatore (catena cinematica aperta)

1 Introduzione

Vogliamo determinare posizione e orientamento dell'organo terminale (detto anche *effettore*, *pinza* o *mano*) di un manipolatore rispetto a una terna di riferimento fissa, ancorata alla base del robot (ossia allo spazio di lavoro in cui esso si muove), conoscendo le coordinate di giunto (cioè i valori delle variabili - angolari o traslazionali secondo il tipo di giunto - che descrivono il movimento dei vari giunti). Si indichi d'ora in avanti con

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} \in \Re^N$$

il vettore delle coordinate nello spazio dei giunti (q_i è un angolo θ_i se il giunto i è rotoidale e q_i è una traslazione d_i se il giunto i è prismatico) e con

$$\vec{x}_e = \begin{bmatrix} \vec{p}_e \\ \vec{\phi}_e \end{bmatrix} \in \Re^6$$

il vettore delle coordinate che specificano posizione $\vec{p}_e \in \Re^3$ ed orientamento $\vec{\phi}_e \in \Re^3$ (per esempio espresso mediante i tre angoli di RPY) dell'organo terminale rispetto alla terna fissa solidale con lo spazio di lavoro del robot[1]. Il problema cinematico diretto consiste nel trovare la funzione $h(\cdot)$ tale che

$$\vec{x}_e = h(\vec{q}).$$

A tal fine, se SR_0 è la terna solidale con la base del robot e SR_N quella che si muove con l'organo terminale del robot, la matrice T_0^N che descrive il cambiamento di coordinate da SR_N a SR_0 (cioè tale che $\tilde{v}_0 = T_0^N \tilde{v}_N$) contiene tutte le informazioni sulla posa dell'organo terminale (cioè risolve il problema della cinematica diretta). Infatti, se

$$T_0^N = \left[\begin{array}{c|c} R_0^N & \vec{p}_0^N \\ \hline 0 \ 0 \ 0 & 1 \end{array} \right],$$

è la matrice di cambiamento di coordinate da SR_N a SR_0, il vettore $\vec{p}_0^N$ rappresenta proprio la posizione $\vec{p}_e$ dell'organo terminale del robot nello spazio di lavoro mentre la matrice ortogonale R_0^N ne definisce (come si è visto in precedenza) l'orientamento $\vec{\phi}_e$.

T_0^N è chiaramente funzione delle variabili di giunto, cioè $T_0^N = T_0^N(\vec{q})$. Vogliamo ora introdurre una procedura sistematica che, dato un robot manipolatore con catena cinematica aperta, permetta di ricavare $T_0^N(\vec{q})$. Questa procedura si basa sulla rappresentazione (o notazione o convenzione) di **Denavit-Hartenberg**.

2 La rappresentazione di Denavit-Hartenberg

La rappresentazione di Denavit-Hartenberg è un procedimento sistematico per associare un sistema di riferimento cartesiano ortonormale a ciascun link di un robot.

I segmenti ed i giunti che costituiscono il robot vengono numerati in modo progressivo, a partire dalla base: la base sarà il link 0 e l'organo terminale il link N. Il numero N quindi è il numero di giunti del manipolatore e coincide con il numero di gradi di libertà della struttura.

[1] Le coordinate rispetto ad un sistema di riferimento generico verranno invece indicate d'ora in avanti con $v = (x, y, z)^T$ o, nel caso omogeneo, con $\tilde{v} = (x, y, z, 1)^T$, in luogo della q (o $\tilde{q}$) usata in precedenza (che ora indica le variabili di giunto).

L'associazione dei sistemi di riferimento ai segmenti inizia dalla base e procede verso l'organo terminale. Il riferimento L_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ viene dunque associato al link i-esimo e, per $i = 1, 2, \ldots, N$, si muove solidale con il link i stesso (a causa quindi del movimento del giunto i che, appunto, fa muovere il link i rispetto al link $i-1$).

Ad ogni terna L_i così definita viene associata una matrice che ne descrive la roto-traslazione T_{i-1}^{i} rispetto alla terna precedente L_{i-1} (in modo analogo a quanto visto per il caso planare).

Conoscendo la matrice di trasformazione T_{i-1}^{i} da un riferimento al successivo e componendo tutte queste matrici si trova la matrice complessiva T_0^N nel modo che si vedrà qui di seguito. Si ha $T_{i-1}^{i} = T_{i-1}^{i}(q_i)$ e di conseguenza $T_0^N = T_0^N(\vec{q})$.

Vediamo allora come vengono fissate le varie terne L_i. Le terne L_0 ed L_N, cioè la prima e l'ultima, per motivi che saranno chiari nel seguito, seguono regole lievemente diverse.

La terna L_0, solidale alla base e quindi all'ambiente, è scelta in modo che l'asse z_0 sia coincidente con l'asse del giunto 1, mentre l'origine e l'asse x_0, e quindi l'asse y_0, sono scelti in modo arbitrario (spesso conviene sceglierli in modo che il piano di lavoro su cui poggia il robot coincida con il piano xy di tale terna).

Le successive terne $L_i, i = 1, \ldots, N-1$, sono scelte secondo le regole seguenti:

1. Scegliere l'asse z_i della terna L_i coincidente con l'asse del giunto $i+1$.
2. Scegliere l'origine O_i della terna L_i come segue:
   - Se gli assi z_{i-1} e z_i si intersecano, l'origine O_i della terna L_i è posta in tale punto di intersezione.
   - Se gli assi z_{i-1} e z_i sono sghembi (cioè non si intersecano e non sono paralleli), tracciare l'unico segmento perpendicolare ad entrambi gli assi (che in effetti costituisce il segmento di minima distanza tra i due assi) e scegliere O_i come l'intersezione di tale segmento con l'asse z_i.
   - Se gli assi z_{i-1} e z_i sono paralleli, la scelta di O_i è arbitraria, essendo infiniti i segmenti di minima distanza tra i due assi. Generalmente si sceglie il segmento di minima distanza passante per l'origine O_{i-1} della terna precedente e si sceglie quindi O_i come intersezione tra questo segmento e l'asse z_i.
3. Scegliere l'asse x_i come segue:
   - Se gli assi z_{i-1} e z_i si intersecano, scegliere l'asse x_i nella direzione perpendicolare al piano individuato da z_{i-1} e z_i, con verso arbitrario.
   - Se z_{i-1} e z_i sono paralleli o sghembi, scegliere l'asse x_i come il prolungamento del segmento di minima distanza scelto per definire O_i dopo il passaggio per O_i.
4. Scegliere y_i in modo da completare L_i come terna cartesiana destra.

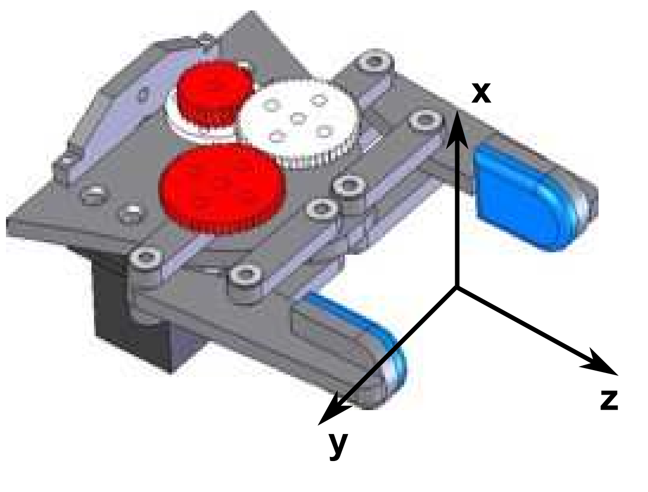

Figure 1: La terna solidale alla mano

Infine si sceglie la terna L_N con l'origine in corrispondenza del punto terminale, cioè del punto della mano scelto come riferimento, si fissa l'asse z_N nella direzione del vettore di avvicinamento, l'asse y_N nella direzione del vettore di scorrimento (cioè di apertura/chiusura della pinza), e l'asse x_N in modo da completare la terna (si veda la Fig. 1). Se il robot è dotato di organi di presa o di lavoro intercambiabili, conviene fissare la terna L_N in corrispondenza del dispositivo di collegamento di tale organo al robot, ed associare poi ad ogni "mano" un suo sistema di riferimento, che sarà sempre fisso rispetto alla terna L_N.

Avendo fissato in questo modo i riferimenti, i parametri cinematici del robot sono definiti come segue:

1. θ_i: angolo tra gli assi x_{i-1} e x_i, misurato come lo si vede dall'asse z_{i-1};
2. d_i: indicando con b_i il punto di intersezione tra gli assi x_i e z_{i-1}, il parametro d_i è la coordinata (positiva o negativa) di b_i lungo z_{i-1};
3. a_i: distanza del punto b_i dall'origine O_i della terna L_i;
4. α_i: angolo tra gli assi z_{i-1} e z_i, misurato come lo si vede dall'asse x_i.

Si noti che a_i è sempre una quantità positiva: per costruzione, infatti, per andare da b_i a O_i occorre sempre muoversi nel verso positivo dell'asse x_i. Viceversa d_i può anche risultare negativo: questo si verifica quando per andare da O_{i-1} a b_i occorre muoversi nel verso opposto a quello indicato dall'asse z_{i-1} (cioè quando b_i si trova sul semiasse z_{i-1} negativo). I parametri a_i e α_i sono sempre fissi e non dipendono dal movimento dei giunti, ma solo dalle caratteristiche geometriche del link i. Nel caso il giunto i sia rotoidale, anche d_i è costante e il movimento del giunto modifica θ_i: in questo caso quindi la variabile q_i del giunto i sarà $q_i = \theta_i$. Se il giunto i è prismatico, θ_i è costante e il movimento del giunto modifica d_i: in questo caso quindi la variabile q_i del giunto i sarà $q_i = d_i$. La situazione generale tra i due sistemi di riferimento successivi L_{i-1} e L_i è quella mostrata in Fig. 2.

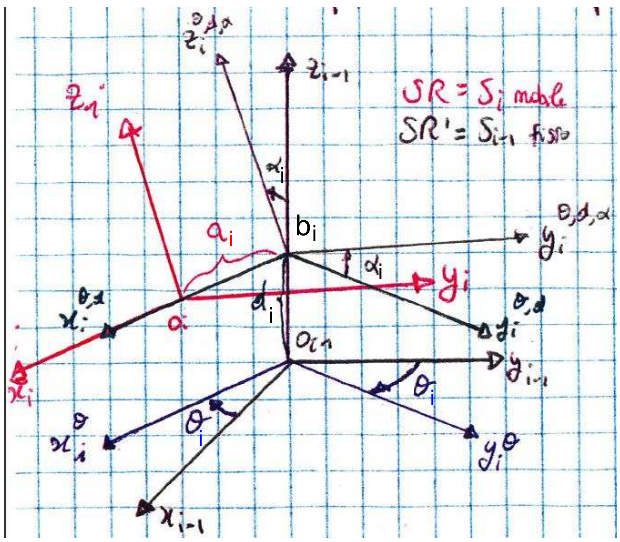

Figure 2: La roto-traslazione che caratterizza i due sistemi L_{i-1} e L_i. In questo caso $d_i > 0$, $\theta_i < 0$ e $\alpha_i > 0$ ($a_i > 0$ sempre per costruzione).

Si vede che per far arrivare L_i alla posizione che occupa nella figura supponendolo inizialmente coincidente con L_{i-1} occorre eseguire le seguenti rotazioni e traslazioni, in cui L_{i-1} va visto come sistema fisso (SR') e L_i come quello mobile (SR):

1. rotazione di un angolo θ_i della terna L_i intorno all'asse z_{i-1};
2. traslazione di d_i della terna L_i lungo l'asse z_{i-1};
3. rotazione di un angolo α_i della terna L_i intorno all'asse x_i;
4. traslazione di a_i della terna L_i lungo l'asse x_i.

Per quanto visto in precedenza, la trasformazione complessiva T_{i-1}^{i} si ottiene moltiplicando le matrici T delle singole trasformazioni. Si ricorda innanzitutto che la matrice $T_{\vec{r}}(\theta)$ di rotazione intorno a un asse $\vec{r}$ commuta con la matrice $T_{\vec{r}}(d)$ di traslazione lungo lo stesso asse $\vec{r}$. La si indicherà quindi con $T_{\vec{r}}(\theta, d)$, cioè:

$$T_{\vec{r}}(\theta, d) = T_{\vec{r}}(\theta)T_{\vec{r}}(d) = T_{\vec{r}}(d)T_{\vec{r}}(\theta)$$

Poiché le 4 trasformazioni indicate sopra sono fatte le prime due lungo l'asse z_{i-1} del sistema fisso mentre le ultime due lungo l'asse x_i del sistema mobile, avremo una postmoltiplicazione, e cioè:

$$T_{i-1}^{i} = T_z(\theta_i, d_i)T_x(\alpha_i, a_i)$$

Ora:

$$T_z(\theta_i, d_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_x(\alpha_i, a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Facendo dunque il prodotto otteniamo:

$$T_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per concludere e fornire la soluzione completa al problema della cinematica diretta basta comporre le matrici così trovate. Si ha infatti che per ogni coppia di terne consecutive esisterà il seguente legame tra le coordinate omogenee $\tilde{v}_{i-1}$ rispetto a L_{i-1} e quelle omogenee $\tilde{v}_i$ rispetto a L_i:

$$\tilde{v}_{i-1} = T_{i-1}^{i}\tilde{v}_i$$

per $i = 1, 2, \ldots, N$. Ne segue che:

$$\tilde{v}_0 = T_0^1\tilde{v}_1 = T_0^1T_1^2\tilde{v}_2 = T_0^1T_1^2T_2^3\tilde{v}_3 = \ldots = T_0^1T_1^2\ldots T_{N-1}^{N}\tilde{v}_N.$$

Pertanto, il legame che esiste tra il sistema di riferimento della base L_0 e quello della mano L_N è definito dalla seguente matrice:

$$T_0^N = T_0^1T_1^2\ldots T_{N-1}^{N}$$

o, esplicitando la dipendenza dalle variabili di giunto:

$$T_0^N(\vec{q}) = T_0^1(q_1)T_1^2(q_2)\ldots T_{N-1}^{N}(q_N).$$

Come si è detto, la matrice T_0^N fornisce effettivamente una soluzione al problema della cinematica diretta: i primi tre elementi dell'ultima colonna (che dipendono chiaramente dai parametri di giunto $\vec{q}$) sono proprio le coordinate $\vec{p}_e$ dell'organo terminale rispetto alla base. I primi tre elementi delle prime tre colonne di T_0^N individuano rispettivamente le coordinate dei versori della mano $\vec{e}_{x_N}$, $\vec{e}_{y_N}$ ed $\vec{e}_{z_N}$ rispetto al sistema di riferimento della base (e cioè rappresentano l'orientamento $\vec{\phi}_e$ della mano rispetto alla base).

Osservazione 1 *In alcuni casi, come si vedrà, la scelta dei sistemi di riferimento L_i non è univoca: in questi casi si può effettuare la scelta più opportuna per semplificare il calcolo della cinematica diretta.*

Osservazione 2 *Sembrerebbe strano che per passare da un sistema L_{i-1} al successivo L_i bastino quattro parametri (a_i, d_i, θ_i e α_i) e non i sei che in generale definiscono posizione e orientamento relativi di due sistemi di riferimento nello spazio. Il fatto che ne bastano quattro dipende dalla scelta appropriata dei sistemi di riferimento (si ricordi come in modo del tutto analogo la scelta dei sistemi di riferimento effettuata nel caso del manipolatore planare richiedeva solo due parametri per il cambiamento di coordinate anziché i tre necessari per un cambiamento di coordinate generale associato a una rototraslazione nel piano).*