

Stima della posa di un unicycle mediante Filtro di Kalman Esteso (EKF)

Si è visto che le equazioni cinematiche dell'unicycle sono date da

$$\dot{x} = v_1 \cos \theta \quad (1)$$

$$\dot{y} = v_1 \sin \theta \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = v_2 \quad (3)$$

e che, nel caso di guida differenziale, le velocità longitudinale e rotazionale sono legate a quelle delle ruote destra e sinistra da:

$$v_1 = \frac{v_R + v_L}{2} \quad (4)$$

$$v_2 = \frac{v_R - v_L}{d} \quad (5)$$

Un esempio di robot mobile del tipo unicycle con guida differenziale è mostrato in Fig. 1. Per stimare la

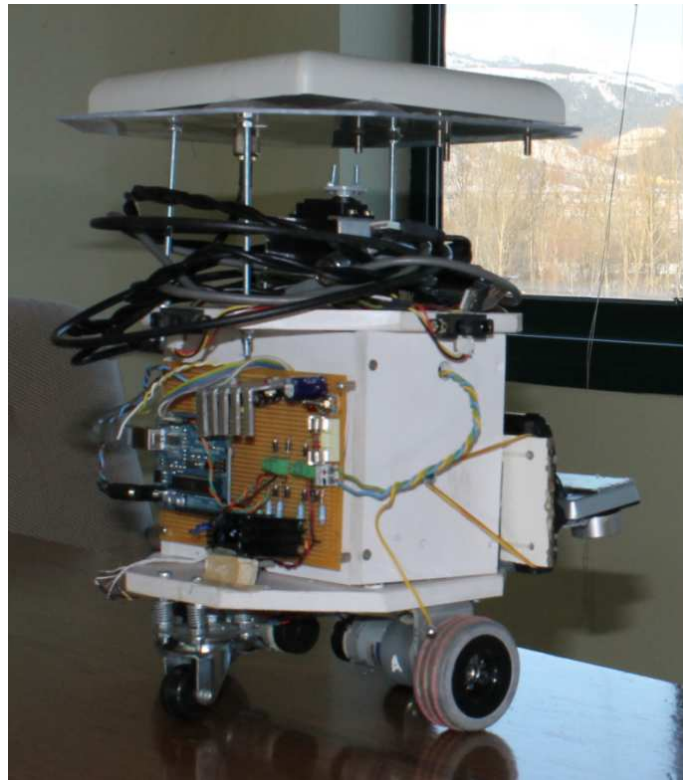


Figure 1: Il robot Octagon: un unicycle con guida differenziale

posa (x, y, θ) del robot mediante un algoritmo eseguito su un elaboratore elettronico occorre discretizzare le equazioni precedenti introducendo un tempo di campionamento dt (compatibile con le capacità di calcolo del computer e con il livello di approssimazione richiesto per la particolare applicazione). Data una qualsiasi

funzione del tempo $z(t)$, si denoti mediante $z_k = z(k \cdot dt)$ il suo valore campionato al tempo $t = k \cdot dt$. Le (1)-(3) diventano (sfruttando un'approssimazione del tipo di Eulero):

$$x_{k+1} = x_k + v_{1,k} \cos(\theta_k) \cdot dt \quad (6)$$

$$y_{k+1} = y_k + v_{1,k} \sin(\theta_k) \cdot dt \quad (7)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + v_{2,k} \cdot dt \quad (8)$$

Le quantità $v_{1,k} \cdot dt$ e $v_{2,k} \cdot dt$ sono un'approssimazione, rispettivamente, dello spostamento $\delta\rho_k$ e della rotazione $\delta\theta_k$ effettivi del robot nell'intervallo temporale $(k \cdot dt, (k+1) \cdot dt)$. Inoltre, tenendo conto del fatto che $\delta\rho_k$ e $\delta\theta_k$ possono essere ricavate immediatamente dalle letture $u_{R,k}$ e $u_{L,k}$ (relative all'intervallo temporale $(k \cdot dt, (k+1) \cdot dt)$) degli encoder montati sulle due ruote mediante le relazioni:

$$\delta\rho_k = \frac{u_{R,k} + u_{L,k}}{2} \quad (9)$$

$$\delta\theta_k = \frac{u_{R,k} - u_{L,k}}{d}, \quad (10)$$

le (6)-(8) diventano alla fine:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{u_{R,k} + u_{L,k}}{2} \cos(\theta_k) \quad (11)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{u_{R,k} + u_{L,k}}{2} \sin(\theta_k) \quad (12)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{u_{R,k} - u_{L,k}}{d}. \quad (13)$$

1 La ricostruzione odometrica

In base a quanto detto, avendo disponibili la posa iniziale (x_0, y_0, θ_0) del robot e le letture encoder $u_{R,k}$ e $u_{L,k}$, sembrerebbe possibile integrare le (11)-(13) per ricostruire la posa dell'uniciclo in ogni tempo $t = k \cdot dt$. Di fatto questo è possibile ma la stima che si ottiene sulla posa reale del veicolo risulta spesso insoddisfacente e questo per una serie di motivi che ora elenchiamo.

1. La posa iniziale del robot è nota solo approssimativamente. Avremo cioè qualcosa del tipo:

$$\hat{x}_0 = x_0 + n_{x0} \quad (14)$$

$$\hat{y}_0 = y_0 + n_{y0} \quad (15)$$

$$\hat{\theta}_0 = \theta_0 + n_{\theta 0} \quad (16)$$

dove (x_0, y_0, θ_0) è la posa reale di partenza del robot mentre quella che si conosce, indicata con $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{\theta}_0)$, differisce da quella vera per degli errori, indicati con n_{*0} . Quindi nella pratica si ha solo una *stima* della posa di partenza dell'uniciclo.

2. Come detto sopra, l'approssimazione discreta introduce un errore, in realtà solo nella posizione e non nell'orientamento, tanto maggiore quanto maggiore è il tempo di campionamento, come illustrato nella Fig. 2.
3. Le letture degli encoder forniscono solo approssimativamente lo spostamento reale compiuto dalle due ruote. Indicando con $u_{R,k}$ e $u_{L,k}$ le distanze effettivamente coperte dalle due ruote nell'intervallo di tempo $(k \cdot dt, (k+1) \cdot dt)$ e con $u_{R,k}^e$ e $u_{L,k}^e$ le letture degli encoder nello stesso intervallo, avremo una relazione tra le due quantità del seguente tipo:

$$u_{R,k} = u_{R,k}^e + n_{R,k} \quad (17)$$

$$u_{L,k} = u_{L,k}^e + n_{L,k} \quad (18)$$

dove gli errori $n_{R,k}$ e $n_{L,k}$ sono dovuti a vari tipi di disturbo, che possono essere classificati in *sistematici* (come per esempio la non perfetta conoscenza dei raggi delle due ruote) e *casuali* (come ostacoli sul terreno, slittamenti, ecc.).

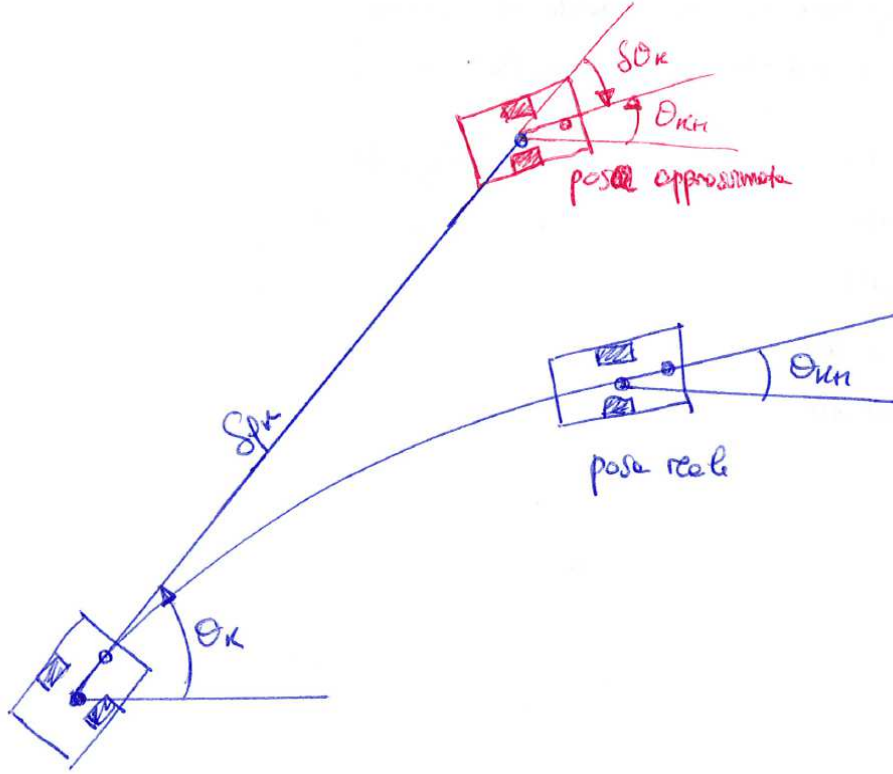


Figure 2: Assumendo corretta la stima della posa al passo k , la discretizzazione introduce un errore che rende la stima della posa al passo successivo (riportata in rosso in figura) diversa dal suo reale valore. La discrepanza cresce all'aumentare di dt .

4. Le varie cause di discrepanza appena elencate hanno un effetto cumulativo (tra di loro ma soprattutto nel tempo), cioè l'errore al passo k non può più essere recuperato nei passi successivi (se non per motivi casuali, quando due errori hanno verso opposto e si compensano), con il risultato che la *varianza* (che è una misura quantitativa della precisione) della stima ottenuta cresce col tempo.

La procedura di integrazione appena descritta, con tutti i limiti appena evidenziati, rappresenta comunque un approccio possibile per localizzare (ossia stimare la posa di) un robot mobile, specie se il percorso non è troppo lungo. Richiede chiaramente una conoscenza almeno approssimativa del punto di partenza e non può essere quindi applicata nel caso la posa iniziale del robot sia completamente sconosciuta (si parla in tal caso di *localizzazione globale* del robot). Ne riassumiamo le equazioni qui di seguito:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \frac{u_{R,k}^e + u_{L,k}^e}{2} \cos(\hat{\theta}_k) \quad (19)$$

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + \frac{u_{R,k}^e + u_{L,k}^e}{2} \sin(\hat{\theta}_k) \quad (20)$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{u_{R,k}^e - u_{L,k}^e}{d}. \quad (21)$$

Un esempio di ricostruzione odometrica è riportato in Fig. 3.

2 Un approccio alternativo al problema della localizzazione

Per migliorare la qualità della stima ottenuta si può procedere equipaggiando il robot di sensori *esterni*, dispositivi che misurano grandezze che dipendono dall'ambiente esterno, come la distanza o l'angolo di osservazione (detto *bearing*) rispetto a punti noti dell'ambiente, naturali o artificiali. Sono per esempio sensori esterni le telecamere, i laser, i sonar, i sensori IR, il GPS, gli RFID, ecc.

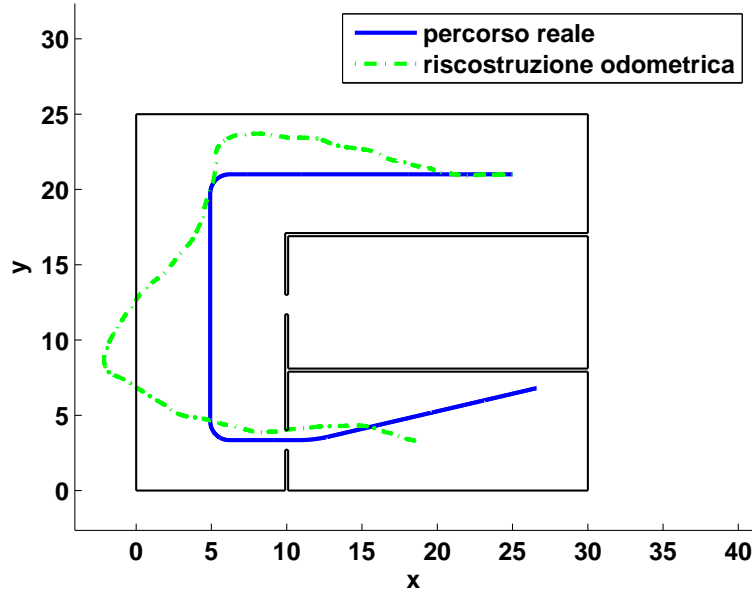


Figure 3: Una tipica ricostruzione odometrica: è evidente la deriva che caratterizza la stima della posa rispetto al suo valore reale

Sensori come gli encoder (o gli accelerometri) sono detti invece *interni* in quanto misurano grandezze interne al robot, che non dipendono dall'ambiente circostante.

Il vantaggio dei sensori esterni è che, pur essendo soggetti ad un errore di misura, questo errore non si cumula nel tempo ma può con buona approssimazione considerarsi stazionario e indipendente nelle varie misure effettuate.

Il problema è come fondere tutte le informazioni che arrivano da questi sensori e dagli encoder. Si noti a tal proposito che conviene comunque utilizzare anche gli encoder nel processo di stima sia per migliorare la qualità della stima stessa, sia, in alcuni casi, per rendere il problema *osservabile*¹.

In queste pagine introduciamo un metodo per fondere queste informazioni che è il Filtro di Kalman, il quale risulta un metodo *esatto* di stima nel caso la dinamica del robot e le sue misure siano lineari e tutti gli errori di misura siano variabili aleatorie gaussiane. Anche se queste ipotesi non sono soddisfatte (come nel nostro caso), un'estensione del filtro (nota appunto col nome di Filtro di Kalman Esteso), seppure non più esatta, rappresenta spesso un buon algoritmo di stima. Nel caso non lineare esistono moltissimi altri approcci adatti a risolvere il problema di localizzazione che ci siamo posti: un metodo molto usato è quello del filtro particellare che però non verrà descritto in questa sede.

Premettiamo alla descrizione del filtro di Kalman (e quindi alla sua versione estesa) alcuni concetti chiave.

2.1 Note preliminari

2.1.1 Misure: accuratezza e precisione. Modello Gaussiano.

Se misuro una certa grandezza di valore x , otterrò dei valori X_i generalmente diversi da x . Se ripeto la misura un numero N grande di volte e poi riporto in un istogramma i valori (generalmente diversi tra loro) ottenuti nelle varie misure, tipicamente ottengo un grafico simile a quello in Fig. 4. Se divido tutto il grafico per N , la curva riportata in Fig. 4 è in effetti una densità di probabilità $p(X)$, la quale, integrata in un intervallo (a, b) fornisce la probabilità che una misura X cada in tale intervallo (l'integrale quindi da $-\infty$ a

¹Ci sono situazioni in cui un sensore esterno da solo non è sufficiente a ricostruire la posa del robot ed è necessaria anche l'informazione odometrica. È questo per esempio il caso di un sensore che fornisce il bearing con cui il robot è visto da un certo punto noto (per esempio l'origine). Senza informazioni sugli spostamenti relativi del robot (forniti appunto dagli encoder), non c'è modo di stimarne la posizione nel piano e il problema si dice non osservabile.

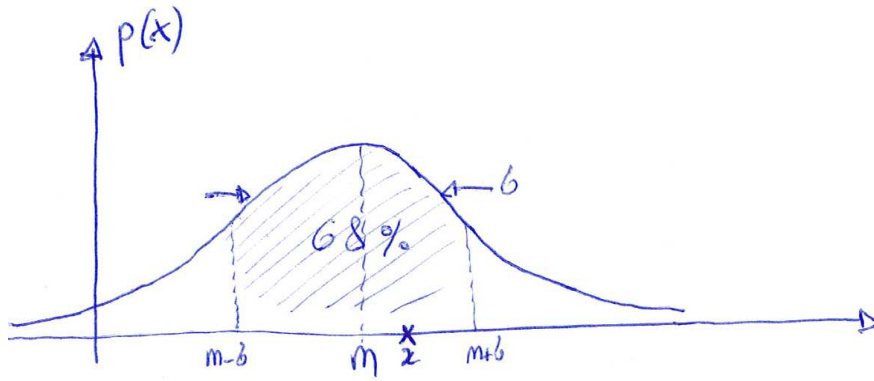


Figure 4: Istogramma normalizzato di una campagna di misure X_i di una grandezza x con indicati anche la media m delle misure e la loro deviazione standard σ : in generale $m \neq x$ mentre circa il 68% dei campioni si dispone tra $m - \sigma$ e $m + \sigma$

$+\infty$ sarà pari a 1). La media delle misure:

$$m_{X_1, X_2, \dots, X_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

tende a disporsi al centro di simmetria del grafico quando $N \rightarrow \infty$. Analiticamente la media delle misure viste come realizzazioni di una variabile aleatoria X è definita da:

$$m = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} X p(X) dX.$$

Se accade che $m \equiv x$ si dice che la misura è *accurata*. Questo non capita in generale: tipicamente la presenza di errori sistematici produce misure non accurate. La *precisione* della misura è invece legata alla dispersione dei valori intorno alla media (alla larghezza della campana), che quantitativamente si misura con la deviazione standard σ , radice quadrata della varianza della variabile aleatoria X , definita da

$$\sigma^2 = E[(X - m)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m)^2 p(X) dX.$$

Tale quantità è tanto più piccola quanto più precisa risulta la misura. Una variabile aleatoria X che assume valori secondo una legge di probabilità come quella in Fig. 4 si dice *Gaussiana* e si usa la notazione $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ per dire appunto che X obbedisce ad una gaussiana di media m e varianza σ^2 . L'espressione analitica di $p(X)$ è data da:

$$p(X) = p(X; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (22)$$

Nel seguito assumeremo che tutti i nostri errori di misura (compresi quelli sulla stima della posa iniziale) siano variabili aleatorie gaussiane a media nulla, cioè assumiamo che la media m delle nostre misure coincida con il valore vero della grandezza misurata: questo è vero con buona approssimazione nella realtà in quanto le componenti sistematiche dell'errore possono essere ridotte moltissimo con un'opportuna taratura dello strumento di misura².

2.1.2 Combinazione lineare di variabili aleatorie gaussiane indipendenti

Si presenta ora una proprietà chiave che, insieme a quella descritta nella sezione successiva, è alla base delle equazioni del filtro di Kalman.

²L'ipotesi invece di gaussianità, largamente utilizzata in tutte le applicazioni relative alle misure, trova giustificazione nel teorema del limite centrale, secondo cui la somma di un certo numero n di cause aleatorie indipendenti è una variabile aleatoria la cui densità di probabilità tende a una gaussiana quando $n \rightarrow \infty$ (in realtà nella pratica, già con $n = 10$, si osserva un'ottima corrispondenza tra gli istogrammi e la densità gaussiana)

Si considerino due variabili aleatorie gaussiane indipendenti³ $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Allora anche la combinazione lineare (o più precisamente *affine*)

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + c$$

dove a_1 , a_2 e c sono costanti, è una variabile aleatoria gaussiana con media $m_Y = E[Y] = a_1 m_1 + a_2 m_2 + c$ e varianza $\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2$, cioè $Y \sim \mathcal{N}(a_1 m_1 + a_2 m_2 + c, a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2)$.

La dimostrazione che Y è una v.a. (variabile aleatoria) gaussiana sfrutta l'ipotesi d'indipendenza (come detto non necessaria ma sufficiente) di X_1 e X_2 . Per brevità tale prova non viene riportata in questa sede.

Il fatto invece che la media della combinazione lineare (o affine, cioè lineare più una costante c) di variabili aleatorie sia pari alla stessa combinazione lineare (o affine) delle loro medie non richiede né l'indipendenza né la gaussianità e si dimostra facilmente come indicato nella seguente espressione:

$$\begin{aligned} E[a_1 X_1 + a_2 X_2 + c] &= \int \int (a_1 X_1 + a_2 X_2 + c) p(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = a_1 \int \int X_1 p(X_1, X_2) dX_1 dX_2 + \\ &+ a_2 \int \int X_2 p(X_1, X_2) dX_1 dX_2 + c \int \int p(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = a_1 \int X_1 p(X_1) dX_1 + a_2 \int X_2 p(X_2) dX_2 + c \\ &= a_1 E[X_1] + a_2 E[X_2] + c = a_1 m_1 + a_2 m_2 + c, \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $\int p(X_1, X_2) dX_2$ è la densità *marginale* $p(X_1)$, e similmente $\int p(X_1, X_2) dX_1 = p(X_2)$.

Per quanto riguarda le varianze invece occorre l'indipendenza per ottenere la formula riportata sopra. Innanzitutto mostriamo che la varianza di $a \cdot X$, dove X è una v.a. con media m e varianza σ^2 , è pari a $a^2 \sigma^2$. Infatti, la media di $a \cdot X$ sarà, in base a quanto detto sopra, $a \cdot m$. Pertanto:

$$\sigma_{a \cdot X}^2 = E[(aX - am)^2] = a^2 E[(X - m)^2] = a^2 \sigma^2$$

In secondo luogo, la varianza di $X + c$, dove X è una v.a. con media m e varianza σ^2 e c una costante, è pari a σ^2 . Infatti, la media di $X + c$ sarà, in base a quanto detto sopra, $m + c$. Pertanto:

$$\sigma_{X+c}^2 = E[((X + c) - (m + c))^2] = E[(X - m)^2] = \sigma^2$$

Infine, la varianza della somma di due v.a. indipendenti X_1 e X_2 , con medie m_i e varianze σ_i^2 ($i = 1, 2$), è pari alla somma delle varianze. Infatti, la media di $X_1 + X_2$ sarà, come visto sopra, $m_1 + m_2$. Pertanto:

$$\sigma_{X_1+X_2}^2 = E[((X_1 + X_2) - (m_1 + m_2))^2] = E[(X_1 - m_1)^2] + E[(X_2 - m_2)^2] + 2E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]$$

Ma, grazie all'indipendenza tra X_1 e X_2 si ha $p(X_1, X_2) = p(X_1)p(X_2)$ per cui $\sigma_{12} := E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]$ (detta *covarianza* di X_1 e X_2) è data da:

$$\sigma_{12} = \int \int (X_1 - m_1)(X_2 - m_2) p(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = \int (X_1 - m_1) p(X_1) dX_1 \int (X_2 - m_2) p(X_2) dX_2 = 0$$

e quindi

$$\sigma_{X_1+X_2}^2 = E[(X_1 - m_1)^2] + E[(X_2 - m_2)^2] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Mettendo insieme tutte le proprietà precedenti è immediato vedere che $\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2$.

2.1.3 Fusione di misure indipendenti della stessa grandezza x

Si considerino ora due misure indipendenti q_1 e q_2 della stessa grandezza x e assumiamo come fatto finora che $q_1 \sim \mathcal{N}(x, \sigma_1^2)$ e $q_2 \sim \mathcal{N}(x, \sigma_2^2)$ (cioè le due misure sono entrambe accurate ma hanno precisione diversa). Come fonderle? Cioè quale formula usare per la stima di x (e per la sua varianza) basata sulle due misure disponibili q_1 e q_2 ?

Osserviamo innanzitutto che il fatto che $q_1 \sim \mathcal{N}(x, \sigma_1^2)$ significa che, data la grandezza x , i valori della misura q_1 costituiscono una v.a. con densità di probabilità data da

$$p(q_1|x) = p(q_1 - x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q_1 - x)^2}{2\sigma_1^2}}$$

³L'indipendenza è in realtà solo una condizione sufficiente ma non necessaria per la validità di quello che si dirà. Siccome però nelle nostre applicazioni avremo a che fare con combinazioni lineari di variabili indipendenti, tanto vale assumere questa ipotesi per semplicità

dove in generale la notazione $p(A|B)$ indica la probabilità di osservare A condizionata al fatto che vale (o si è verificato) B . Secondo la formula di *Bayes*⁴, $p(q_1|x) = p(x|q_1)p(q_1)/p(x)$ dove $p(q_1)$ è una costante indipendente da x e $p(x)$ la probabilità di x prima di acquisire la misura. Non avendo informazioni su x prima della misura, $p(x)$ risulta una densità uniforme, cioè costante per ogni x . Pertanto $p(q_1)/p(x)$ è una costante complessivamente indipendente da x tale che l'integrale da $-\infty$ a ∞ di $p(x|q_1)$ rispetto a x sia 1. Questo permette di scrivere:

$$p(x|q_1) = p(q_1|x) \frac{p(x)}{p(q_1)} = \eta \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q_1-x)^2}{2\sigma_1^2}} = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-q_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

dove $\eta = p(x)/p(q_1) = 1$ in questo caso. Possiamo quindi dire che la grandezza x in base alla misura q_1 è una v.a. $\mathcal{N}(q_1, \sigma_1^2)$, per cui come stima di x potremmo prendere $\hat{x}_1 = q_1$ sapendo che la varianza di tale stima è proprio σ_1^2 . Stesso discorso si applica alla seconda misura, che fornisce una stima di x data da $\hat{x}_2 = q_2$ con varianza σ_2^2 . Cosa ne è della stima di x avendo entrambe le misure? Ebbene, dimostriamo ora che la fusione delle due misure produce un'informazione secondo cui la x risulta una v.a. ancora gaussiana $\mathcal{N}(q, \sigma^2)$ con media

$$q = \frac{\sigma_2^2 q_1 + \sigma_1^2 q_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (23)$$

e varianza

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (24)$$

Pertanto la stima \hat{x} risultante dalla fusione di q_1 e q_2 sarà data da $\hat{x} = q$ ed avrà la varianza σ^2 indicata in (24). Si noti come nel caso le due misure siano ugualmente precise (cioè $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), la stima di x dopo la fusione è data dalla media delle due misure ed ha una varianza dimezzata (una precisione doppia) rispetto a quella associata alla stima basata sulle singole misure q_1 e q_2 .

Per dimostrare che dopo la fusione $x \sim \mathcal{N}(q, \sigma^2)$ sapendo che dopo ciascuna delle due misure ho $x \sim \mathcal{N}(q_i, \sigma_i^2)$ ($i = 1, 2$), si procede nel seguente modo. Per l'indipendenza, la probabilità di osservare una coppia (q_1, q_2) di misure noto il valore di x è data da:

$$p(q_1, q_2|x) = p(q_1|x)p(q_2|x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(q_1-x)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(q_2-x)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Ora, l'argomento dell'esponenziale è una forma quadratica di x che, con una scelta opportuna di q e σ (e mettendo da parte il fattore $-1/2$), può essere scritta anche nel seguente modo:

$$\frac{(q_1-x)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(q_2-x)^2}{\sigma_2^2} = \frac{(q-x)^2}{\sigma^2} + \frac{q_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{q_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{q^2}{\sigma^2}$$

Sviluppando i quadrati e raccogliendo il coefficiente c_2 che moltiplica x^2 e quello c_1 che moltiplica x nel membro a sinistra si ottiene:

$$c_2 = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$$

e

$$c_1 = -2\left(\frac{q_1}{\sigma_1^2} + \frac{q_2}{\sigma_2^2}\right)$$

Uguagliando queste espressioni con i coefficienti che moltiplicano x^2 e x nel membro a destra (che sono rispettivamente $1/\sigma^2$ e $-2q/\sigma^2$), si arriva alle espressioni riportate in (23) e (24). Ciò permette di concludere che

$$p(q_1, q_2|x) = p(q-x) = p(x-q) = \eta e^{-\frac{(x-q)^2}{2\sigma^2}}$$

dove $\eta = (1/(2\pi\sigma_1\sigma_2)) \exp[q^2/(2\sigma^2) - q_1^2/(2\sigma_1^2) - q_2^2/(2\sigma_2^2)]$ è una costante. Usando Bayes ancora una volta:

$$p(x|q_1, q_2) = p(q_1, q_2|x) \frac{p(x)}{p(q_1, q_2)} = \tilde{\eta} e^{-\frac{(x-q)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-q)^2}{2\sigma^2}}$$

dove $\tilde{\eta} = \eta p(x)/p(q_1, q_2)$ è una costante (sempre indipendente da x per l'ipotesi che a priori la densità di x è uniforme e quindi costante per ogni x) e pari necessariamente a $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, dovendo normalizzare a 1

⁴La formula di *Bayes* afferma che, dati due eventi A e B , la probabilità $p(A|B)$ che si verifichi A sapendo che si è verificato B è pari alla probabilità $p(B|A)$ che si verifichi B sapendo che si è verificato A , moltiplicata per la probabilità $p(A)$ di A diviso la probabilità $p(B)$ di B , cioè $p(A|B) = p(B|A)p(A)/p(B)$.

l'integrale della precedente. In conclusione, avendo le misure indipendenti q_1 e q_2 , il valore di x è una v.a. distribuita secondo l'equazione precedente che è in effetti una gaussiana con media q e varianza σ^2 .

Si noti come le equazioni (23) e (24) possano anche essere scritte in modo ricorsivo, come mostrato qui di seguito. Tale scrittura è molto utile nel caso si vogliano fondere le informazioni associate alle misure man mano che queste diventano disponibili. In particolare, supponiamo di avere solo una misura q_1 di x con varianza σ_1^2 . Questo corrisponde a una stima

$$\hat{x}_1 = q_1$$

con varianza (che indichiamo con Σ_1^2) data da

$$\Sigma_1^2 = \sigma_1^2$$

A questo punto arriva la misura q_2 di x , indipendente da q_1 e con varianza σ_2^2 . Sappiamo che la stima basata su entrambe le misure è data da

$$\hat{x}_{1,2} = q = \frac{\sigma_2^2 q_1 + \sigma_1^2 q_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

ed ha una varianza

$$\Sigma_{1,2}^2 = \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Scriviamo però le precedenti nel seguente modo:

$$q = \frac{\sigma_2^2 q_1 + \sigma_1^2 q_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = q_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} (q_2 - q_1)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \sigma_1^2$$

che permettono di scrivere:

$$\hat{x}_{1,2} = \hat{x}_1 + \frac{\Sigma_1^2}{\Sigma_1^2 + \sigma_2^2} (q_2 - \hat{x}_1)$$

con aggiornamento della varianza

$$\Sigma_{1,2}^2 = \left(1 - \frac{\Sigma_1^2}{\Sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \Sigma_1^2$$

Si indichi ora brevemente con \hat{x}_k la stima di x fatta dopo aver incamerato k misure e con Σ_k la sua varianza. All'arrivo della $(k+1)$ -esima misura q_{k+1} con varianza σ_{k+1}^2 , la stima di x diventerà:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + V_{k+1} (q_{k+1} - \hat{x}_k) \quad (25)$$

in cui

$$V_{k+1} = \frac{\Sigma_k^2}{\Sigma_k^2 + \sigma_{k+1}^2}$$

con aggiornamento della varianza

$$\Sigma_{k+1}^2 = (1 - V_{k+1}) \Sigma_k^2 \quad (26)$$

Si noti la struttura di tali formule: nella (25) correggo il tiro della stima precedente di un valore proporzionale alla differenza tra misura nuova e stima precedente di x . Il coefficiente $V_{k+1} \in (0, 1)$ permette di pesare in modo ottimale la nuova misura nella correzione suddetta. Nella (26) si nota la riduzione della varianza che segue all'acquisizione di una nuova misura. Si noti come il coefficiente V_{k+1} , nel caso la nuova misura sia molto precisa ($\sigma_{k+1}^2 \approx 0$), valga circa 1, portando la stima a coincidere con tale nuova misura e la nuova varianza circa a zero. Nel caso in cui all'opposto la nuova misura non valga granché (σ_{k+1}^2 molto grande), tale coefficiente è circa zero, producendo un cambiamento trascurabile alla stima e alla sua varianza.

2.2 Il filtro di Kalman

Le proprietà dianzi dimostrate permettono di ricavare in modo immediato le equazioni del filtro di Kalman, per lo meno nel caso lineare e scalare.

2.2.1 Il caso lineare e scalare

Si consideri dunque un sistema dinamico lineare con stato x_k (nel caso dell'uniciclo lo stato è la posa $x_{r,k}$ del robot) che evolve secondo la seguente dinamica:

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k + \omega_k \quad (27)$$

dove a, b sono costanti note, u_k è un ingresso noto (per esempio il controllo o, nel caso dell'uniciclo, le letture degli encoder) e $\omega_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\omega^2)$ un disturbo che agisce sull'evoluzione dinamica del sistema.

Si assuma disponibile una misura z_k legata allo stato da

$$z_k = cx_k + \nu_k \quad (28)$$

dove c è una costante nota e non nulla e $\nu_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\nu^2)$ un errore di misura. Al tempo 0 abbiamo una stima di x_0 data da \hat{x}_0 e caratterizzata da un'incertezza descritta da una varianza che indichiamo con P_0 (cioè $x_0 \sim \mathcal{N}(\hat{x}_0, P_0)$). Per quanto visto nella sezione 2.1.2, la combinazione lineare di v.a. gaussiane indipendenti è una gaussiana con media pari alla combinazione lineare delle medie e varianza pari alla combinazione lineare (con i coefficienti al quadrato) delle varianze. Pertanto avremo che $x_1 \sim \mathcal{N}(a\hat{x}_0 + bu_0, a^2P_0 + \sigma_\omega^2)$, per cui la stima di x_1 dopo l'evoluzione dinamica (27), che verrà indicata con \hat{x}_1^- , sarà data da

$$\hat{x}_1^- = a\hat{x}_0 + bu_0$$

e sarà caratterizzata da una varianza

$$P_1^- = a^2P_0 + \sigma_\omega^2$$

A questo punto arriva la misura z_1 . Applicando Bayes possiamo scrivere che $p(x_1|z_1) = p(z_1|x_1)p(x_1)/p(z_1)$. Seguendo il ragionamento della Sezione 2.1.3, la seconda misura disponibile di x (che allora si chiamava q_2) va vista indipendentemente dall'altra (che allora si chiamava q_1 ed ora è la stima \hat{x}_1^- dianzi descritta), pertanto considerando ancora $p(x_1)$ uniforme (e quindi costante) e $p(x_1)/p(z_1)$ come una costante indipendente da x_1 e normalizzante l'integrale rispetto a x_1 di $p(x_1|z_1)$ da $-\infty$ a ∞ . Ne segue che, in base a (28):

$$p(x_1|z_1) = p(z_1|x_1) \frac{p(x_1)}{p(z_1)} = \eta \frac{1}{\sigma_\nu \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_1 - cx_1)^2}{2\sigma_\nu^2}} = \frac{1}{\frac{\sigma_\nu}{c} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - \frac{z_1}{c})^2}{2(\frac{\sigma_\nu}{c})^2}}$$

In base a tale equazione $x_1 \sim \mathcal{N}(z_1/c, \sigma_\nu^2/c^2)$. Fondendo questa informazione nel modo indicato nella sezione 2.1.3, si ottiene quindi:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_1^- + V_1(z_1/c - \hat{x}_1^-)$$

in cui

$$V_1 = \frac{P_1^-}{P_1^- + \sigma_\nu^2/c^2}$$

con aggiornamento della varianza

$$P_1 = (1 - V_1) P_1^-$$

Rimpiazzando 0 con il generico passo k (per cui 1 diventerà il passo $k+1$), e introducendo la notazione $K_{k+1} = V_{k+1}/c$, le precedenti costituiscono proprio le equazioni del filtro di Kalman:

$$\hat{x}_{k+1}^- = a\hat{x}_k + bu_k \quad (29)$$

$$P_{k+1}^- = a^2P_k + \sigma_\omega^2 \quad (30)$$

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(z_{k+1} - c\hat{x}_{k+1}^-) \quad (31)$$

$$K_{k+1} = \frac{P_{k+1}^- c}{c^2 P_{k+1}^- + \sigma_\nu^2} \quad (32)$$

$$P_{k+1} = (1 - K_{k+1}c) P_{k+1}^- \quad (33)$$

Il coefficiente K_{k+1} , detto *guadagno di Kalman*, rappresenta come sopra il peso da dare alla nuova misura per ottenere la correzione ottima rispetto alla stima precedente alla misura stessa. Tale correzione risulta proporzionale al termine $z_{k+1} - c\hat{x}_{k+1}^-$, detto *innovazione*, che è la differenza tra la nuova misura e la misura che mi sarei aspettato in base alla stima precedente dello stato. Le prime due equazioni del filtro, che tengono conto dell'evoluzione dinamica al passo k , sono spesso indicate come *passo di predizione del filtro*, e producono una stima (indicata col $-$) che viene spesso detta *a priori*. Le rimanenti equazioni, che si basano sull'arrivo della misura z_{k+1} , sono spesso indicate come *passo di correzione del filtro* e producono quella che viene indicata come stima *a posteriori*.

2.2.2 Il caso lineare vettoriale

Nel caso vettoriale le cose si complicano. È vero che la media di un vettore aleatorio \vec{X} può essere semplicemente definita come il vettore $\vec{m} = E[\vec{X}]$ costituito dalle medie m_i degli elementi di \vec{X} (che sono variabili aleatorie scalari). Tuttavia, parlando di varianza, questa va sostituita con un oggetto più complesso: la matrice di covarianza P , in cui gli elementi P_{ii} sulla diagonale coincidono con le varianze $\sigma_i^2 = E[(X_i - m_i)^2]$ degli elementi del vettore \vec{X} mentre quelli P_{ij} fuori della diagonale sono costituiti dalle *covarianze* tra X_i e X_j (definite come $P_{ij} = E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)]$), le quali sono in qualche modo una misura di come un'informazione su X_i influenzi anche la stima su X_j (la covarianza infatti è nulla nel caso in cui X_i e X_j siano indipendenti). La matrice P insomma è data da $P = E[(\vec{X} - \vec{m})(\vec{X} - \vec{m})^T]$, dove T indica l'operazione di trasposizione, ed è una matrice simmetrica semidefinita positiva $n \times n$, se n sono gli elementi di \vec{X} . Senza scendere in ulteriori dettagli, le equazioni del filtro di Kalman in questo caso conservano la struttura riportata in (29)-(33): ovviamente avremo delle operazioni di inversione di matrice laddove c'erano dei semplici rapporti e l'ordine dei prodotti diviene non modificabile (essendo il prodotto tra matrici non commutativo). Si omette per brevità d'ora in avanti la freccia che indica che le quantità in gioco sono vettoriali.

Si consideri quindi un sistema con stato x vettoriale, con equazione dinamica lineare

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \omega_k \quad (34)$$

in cui A e B sono matrici note di dimensioni opportune, u_k è un ingresso (vettoriale) noto (per esempio il controllo) e $\omega_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ un disturbo (vettoriale), a media nulla con matrice di covarianza Q_k , che agisce sull'evoluzione dinamica del sistema.

Si assuma anche qui disponibile una misura (vettoriale) z_k legata allo stato da

$$z_k = Cx_k + \nu_k \quad (35)$$

in cui C è un'altra matrice nota di dimensioni opportune e $\nu_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ un errore (vettoriale) di misura.

Allora le equazioni del filtro di Kalman diventano:

$$\hat{x}_{k+1}^- = A\hat{x}_k + Bu_k \quad (36)$$

$$P_{k+1}^- = AP_k A^T + Q_k \quad (37)$$

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(z_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}^-) \quad (38)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- C^T (C P_{k+1}^- C^T + R_{k+1})^{-1} \quad (39)$$

$$P_{k+1} = (I_n - K_{k+1}C) P_{k+1}^- \quad (40)$$

essendo I_n la matrice identità $n \times n$, con n la dimensione di x .

2.2.3 Il caso non lineare vettoriale: il filtro di Kalman esteso

Nel caso non lineare, il filtro di Kalman si applica introducendo un'approssimazione lineare nella dinamica e nelle misure: il filtro viene chiamato filtro di Kalman esteso (EKF) e non possiede più nessuna proprietà di esattezza o ottimalità ma rappresenta solo un'euristica, che però risulta spesso efficace.

Si consideri quindi un sistema non lineare con stato x vettoriale, con equazione dinamica

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, \omega_k) \quad (41)$$

in cui f è in generale una funzione non lineare e le altre quantità hanno lo stesso significato indicato sopra.

Si assuma anche qui disponibile una misura (vettoriale) z_k legata allo stato da

$$z_k = h(x_k, \nu_k) \quad (42)$$

in cui h è una funzione non lineare e le altre quantità hanno lo stesso significato indicato sopra.

Linearizzando l'equazione dinamica (41) attorno alla stima corrente \hat{x}_k e al valore medio nullo del disturbo ω_k , si ottiene

$$f(x_k, u_k, \omega_k) \approx f(\hat{x}_k, u_k, 0) + F_k(x_k - \hat{x}_k) + W_k \omega_k$$

dove $F_k = \partial f / \partial x$ è la matrice jacobiana di f rispetto a x calcolata in $(\hat{x}_k, u_k, 0)$ e $W_k = \partial f / \partial \omega$ è la matrice jacobiana di f rispetto a ω calcolata sempre in $(\hat{x}_k, u_k, 0)$.

Analogamente, linearizzando l'equazione delle misure (42) riferita al passo $k+1$ attorno alla stima più recente che è in effetti a questo punto \hat{x}_{k+1}^- e al valore medio nullo dell'errore di misura ν_{k+1} , si ha

$$h(x_{k+1}, \nu_{k+1}) \approx h(\hat{x}_{k+1}^-, 0) + H_{k+1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-) + L_{k+1}\nu_{k+1}$$

in cui $H_k = \partial h / \partial x$ è la matrice jacobiana di h rispetto a x calcolata in $(\hat{x}_{k+1}^-, 0)$ e $L_k = \partial h / \partial \nu$ la matrice jacobiana di h rispetto a ν calcolata sempre in $(\hat{x}_{k+1}^-, 0)$.

Con queste approssimazioni, il sistema di partenza (41)-(42) diventa a tutti gli effetti un sistema lineare, con equazioni che possono essere scritte nel seguente modo:

$$x_{k+1} = F_k x_k + f_0(\hat{x}_k, u_k) + W_k \omega_k \quad (43)$$

$$z_{k+1} - h_0(\hat{x}_{k+1}^-) = H_{k+1} x_{k+1} + L_{k+1} \nu_{k+1} \quad (44)$$

In tali equazioni $f_0(\hat{x}_k, u_k) = f(\hat{x}_k, u_k, 0) - F_k \hat{x}_k$ è una quantità nota, del tutto equivalente al termine Bu_k che compare in (34). La quantità $z_{k+1} - h_0(\hat{x}_{k+1}^-)$ può essere considerata come la nostra misura essendo il termine $h_0(\hat{x}_{k+1}^-) = h(\hat{x}_{k+1}^-, 0) - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-$ una quantità anch'essa nota. È evidente allora come le precedenti siano del tutto simili alle (34) e (35) con delle matrici però che dipendono dal passo k (questo non comporta nessuna complicazione nell'applicazione del filtro, semmai può dare problemi nello stabilire le sue proprietà di convergenza, che però non rientrano negli scopi di questi appunti).

Applicando allora le equazioni del filtro di Kalman (36)-(40) a questo che ormai è un sistema lineare si ottiene:

$$\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k, u_k, 0) \quad (45)$$

$$P_{k+1}^- = F_k P_k F_k^T + W_k Q_k W_k^T \quad (46)$$

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(z_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1}^-, 0)) \quad (47)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + L_{k+1} R_{k+1} L_{k+1}^T)^{-1} \quad (48)$$

$$P_{k+1} = (I_n - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^- \quad (49)$$

Si vuole far notare come nelle (45) e (47) torna di fatto l'espressione esatta delle funzioni $f(\cdot)$ e $h(\cdot)$, e che la loro approssimazione lineare viene in effetti utilizzata dal filtro solo per calcolare (approssimativamente) l'aggiornamento delle matrici di covarianza e quindi il guadagno di Kalman.

3 Applicazione all'uniciclo nel caso di misure di distanza da n_L landmark posti in posizioni note (x_{Li}, y_{Li})

In base alle equazioni (11)-(13) e (17)-(18), la dinamica dell'uniciclo risulta di tipo non lineare e viene riportata per comodità qui di seguito:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{u_{R,k}^e + u_{L,k}^e}{2} \cos(\theta_k) + \frac{n_{R,k} + n_{L,k}}{2} \cos(\theta_k) \quad (50)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{u_{R,k}^e + u_{L,k}^e}{2} \sin(\theta_k) + \frac{n_{R,k} + n_{L,k}}{2} \sin(\theta_k) \quad (51)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{u_{R,k}^e - u_{L,k}^e}{d} + \frac{n_{R,k} - n_{L,k}}{d}. \quad (52)$$

Tali equazioni sono della forma (41) con $x = x_r = (x, y, \theta)^T$, $u = (u_R^e, u_L^e)^T$ e $\omega = (n_R, n_L)^T$.

Secondo un modello odometrico comunemente impiegato, gli errori n_R e n_L sulle letture dei due encoder (si vedano le (17)-(18)) sono considerati indipendenti (e quindi scorrelati) tra loro, con una media nulla e una varianza proporzionale alla lunghezza del percorso coperto da ciascuna ruota al passo k . In base a ciò la matrice di covarianza di ω è data con buona approssimazione da

$$Q_k = \begin{bmatrix} K_R |u_{R,k}^e| & 0 \\ 0 & K_L |u_{L,k}^e| \end{bmatrix},$$

in cui K_R e K_L sono due costanti (spesso assunte uguali tra loro). Le matrici jacobiane F_k e W_k sono date da:

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{u_{R,k}^e + u_{L,k}^e}{2} \sin(\hat{\theta}_k) \\ 0 & 1 & \frac{u_{R,k}^e + u_{L,k}^e}{2} \cos(\hat{\theta}_k) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$W_k = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot \cos(\hat{\theta}_k) & 0.5 \cdot \cos(\hat{\theta}_k) \\ 0.5 \cdot \sin(\hat{\theta}_k) & 0.5 \cdot \sin(\hat{\theta}_k) \\ 1/d & -1/d \end{bmatrix}$$

Nel caso di misure di distanza da n_L landmark posti in posizioni note (x_{Li}, y_{Li}) , si ha per la i -esima misura al passo k :

$$z_{i,k} = \sqrt{(x_k - x_{Li})^2 + (y_k - y_{Li})^2} + \nu_{i,k}, \quad (53)$$

che è del tipo (42) con $\nu_{i,k}$ l'errore sulla misura di distanza. Tale errore viene solitamente considerato a media nulla con varianza σ_ν^2 uguale per tutti i landmark e per tutti i tempi k . La matrice R_k , nell'ipotesi usuale di misure indipendenti tra loro, sarà quindi diagonale $n_L \times n_L$ con sulla diagonale le varianze σ_ν^2 delle singole misure, cioè $R_k = \sigma_\nu^2 \cdot I_{n_L}$ (essendo come al solito I_{n_L} la matrice identità di ordine n_L).

La matrice jacobiana H_k in questo caso è una matrice $n_L \times 3$ la cui riga i -esima è data da:

$$H_{i,k} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{x}_k^- - x_{Li}}{\hat{D}_i} & \frac{\hat{y}_k^- - y_{Li}}{\hat{D}_i} & 0 \end{bmatrix}$$

essendo

$$\hat{D}_i = \sqrt{(\hat{x}_k^- - x_{Li})^2 + (\hat{y}_k^- - y_{Li})^2}$$

Poiché, in accordo con (53), ciascuna misura $z_{i,k}$ dipende linearmente e con coefficiente unitario dall'errore $\nu_{i,k}$, la matrice jacobiana L_k relativa all'errore di misura sarà pari all'identità, cioè $L_k = I_{n_L}$.

Le equazioni del filtro sono allora le (45)-(49), che vengono applicate a partire da una stima $\hat{x}_{r,0}$ sulla posa iniziale del robot e dalla sua matrice di covarianza P_0 . Tipicamente P_0 viene scelta diagonale, assumendo che gli errori sulla stima del valore iniziale delle coordinate x , y e θ siano indipendenti (e quindi scorrelati):

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{x_0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta_0}^2 \end{bmatrix}$$

Essendo il sistema non lineare, tipicamente il filtro funziona (cioè riesce a stimare abbastanza bene lo stato) solo se la stima iniziale è abbastanza vicina al valore vero. Tuttavia, nel caso particolare esaminato in questo paragrafo (uniciclo con misure di distanza da landmark noti), il filtro converge anche se la posa iniziale del robot è completamente sconosciuta⁵ (nel qual caso il filtro va inizializzato con un valore casuale per $\hat{x}_{r,0}$, per esempio $(0,0,0)$, e con una matrice di covarianza P_0 con elementi sulla diagonale piuttosto elevati). Si vuole far notare a tal proposito che per il successo del metodo occorre avere almeno 3 landmark: 2 soli landmark possono portare ad ambiguità nella stima in alcuni percorsi mentre un numero di landmark maggiore di 3 non fa che migliorare la qualità della stima.

L'equazione (45) in questo caso specifico diventa:

$$\hat{x}_{k+1}^- = \hat{x}_k + \frac{u_{R,k}^e + u_{L,k}^e}{2} \cos(\hat{\theta}_k) \quad (54)$$

$$\hat{y}_{k+1}^- = \hat{y}_k + \frac{u_{R,k}^e + u_{L,k}^e}{2} \sin(\hat{\theta}_k) \quad (55)$$

$$\hat{\theta}_{k+1}^- = \hat{\theta}_k + \frac{u_{R,k}^e - u_{L,k}^e}{d}. \quad (56)$$

Il vettore di misura z_k è un vettore con n_L elementi ciascuno del tipo riportato in (53). La funzione $h(\cdot)$ risulta quindi definita da un vettore con n_L elementi ciascuno del tipo:

$$h_i(x_{r,k}, \nu_k) = \sqrt{(x_k - x_{Li})^2 + (y_k - y_{Li})^2} + \nu_{i,k}$$

Pertanto la quantità $h(\hat{x}_{k+1}^-, 0)$ che compare nell'equazione (47) del filtro è un vettore con n_L elementi ciascuno del tipo:

$$h_i(\hat{x}_{r,k+1}^-, 0) = \sqrt{(\hat{x}_{k+1}^- - x_{Li})^2 + (\hat{y}_{k+1}^- - y_{Li})^2}$$

Le altre equazioni del filtro possono essere banalmente applicate usando le espressioni delle matrici indicate sopra.

⁵Ciò non risulta vero invece nel caso in cui si utilizzino sensori come i laser o i sonar che misurano la distanza per esempio dalle pareti dell'ambiente.