Il robot SCORBOT

1 Cinematica diretta del robot SCORBOT

In questa sezione si procederà a calcolare la trasformazione cinematica diretta per un robot di tipo SCORBOT (vedi Fig. 1). Si tratta di un robot a 5 gradi di libertà con soli giunti rotoidali e una morfologia simile al braccio umano. È un manipolatore molto utilizzato in ambito didattico: diversi esemplari sono disponibili nel Laboratorio di Robotica dell'Università di Roma Tor Vergata. Avendo 5 gradi di libertà e non 6, questo robot risulta sotto-attuato: non può in particolare raggiungere i punti del suo spazio di lavoro con qualsiasi orientamento: il grado di libertà mancante è il movimento di yaw del polso che in questo robot permette solo il roll e il pitch della pinza. Di ciò si terrà conto nella prossima sezione quando si presenterà il problema della cinematica inversa.

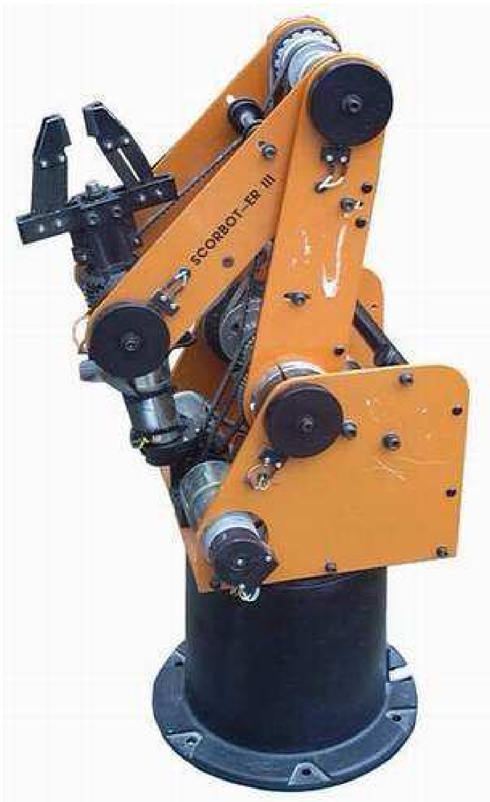

Figure 1: Un robot di tipo SCORBOT

La struttura del robot ed i sistemi di riferimento, assegnati seguendo la procedura di Denavit-Hartenberg, sono riportati nella Fig. 2 (in cui si è omesso di indicare l'asse y di ciascun riferimento, essendo univocamente determinato una volta specificati gli assi x e z). Una visione dall'alto del robot, per meglio comprendere la disposizione degli assi, è riportata in Fig. 3 e una laterale in Fig. 4. I sistemi vengono assegnati nel seguente modo: si parte ponendo l'asse z_0 lungo l'asse di rotazione del giunto 1 e si fissano arbitrariamente x_0 e y_0. Una scelta comoda è quella riportata in figura che fa coincidere il piano di lavoro del robot col piano (x_0, y_0). Si fissa poi l'asse z_i, per $i = 1, 2, 3, 4$, lungo l'asse di rotazione del giunto

$i + 1$. Come visto nel caso del robot SCARA, il verso di tali assi z_i, $i = 1, 2, 3, 4$, è arbitrario e può essere scelto in base al verso di rotazione restituito come positivo dal sensore associato al giunto i. In questa trattazione si è seguita la convenzione indicata in Fig. 2, che corrisponde a una postura del robot in cui $\theta_2 < 0$, $\theta_3 < 0$, $\theta_4 > 0$ e $\theta_5 > 0$. La situazione con $\theta_i = 0$ per $i = 2, 3, 4$ corrisponde al braccio proteso in orizzontale fino al polso e con la pinza rivolta a 90 gradi verso il basso.

Per completare L_1 occorre fissarne l'origine O_1 e l'asse x_1. Si nota (si vedano in particolare le Fig. 3 e 4) come gli assi z_0 e z_1 non si intersecano ma sono sghembi: il segmento di minima distanza tra i due assi permette di fissare O_1 e x_1.

Le origini O_2 e O_3 (e di conseguenza gli assi x_2 e x_3) sono state scelte secondo la consuetudine più diffusa nel caso di assi z_i paralleli: si prende il segmento di minima distanza passante per l'origine del sistema precedente.

L'origine O_4 è invece univocamente definita e coincide con l'intersezione tra gli assi z_3 e z_4. L'asse x_4, ortogonale a z_3 e z_4, è definito a meno del verso che può essere scelto arbitrariamente.

La terna L_5 solidale alla mano viene fissata secondo la regola generale: asse z_5 nella direzione di avvicinamento della pinza, y_5 nella direzione di scorrimento (cioè di apertura) della pinza (con verso arbitrario) e x_5 di conseguenza.

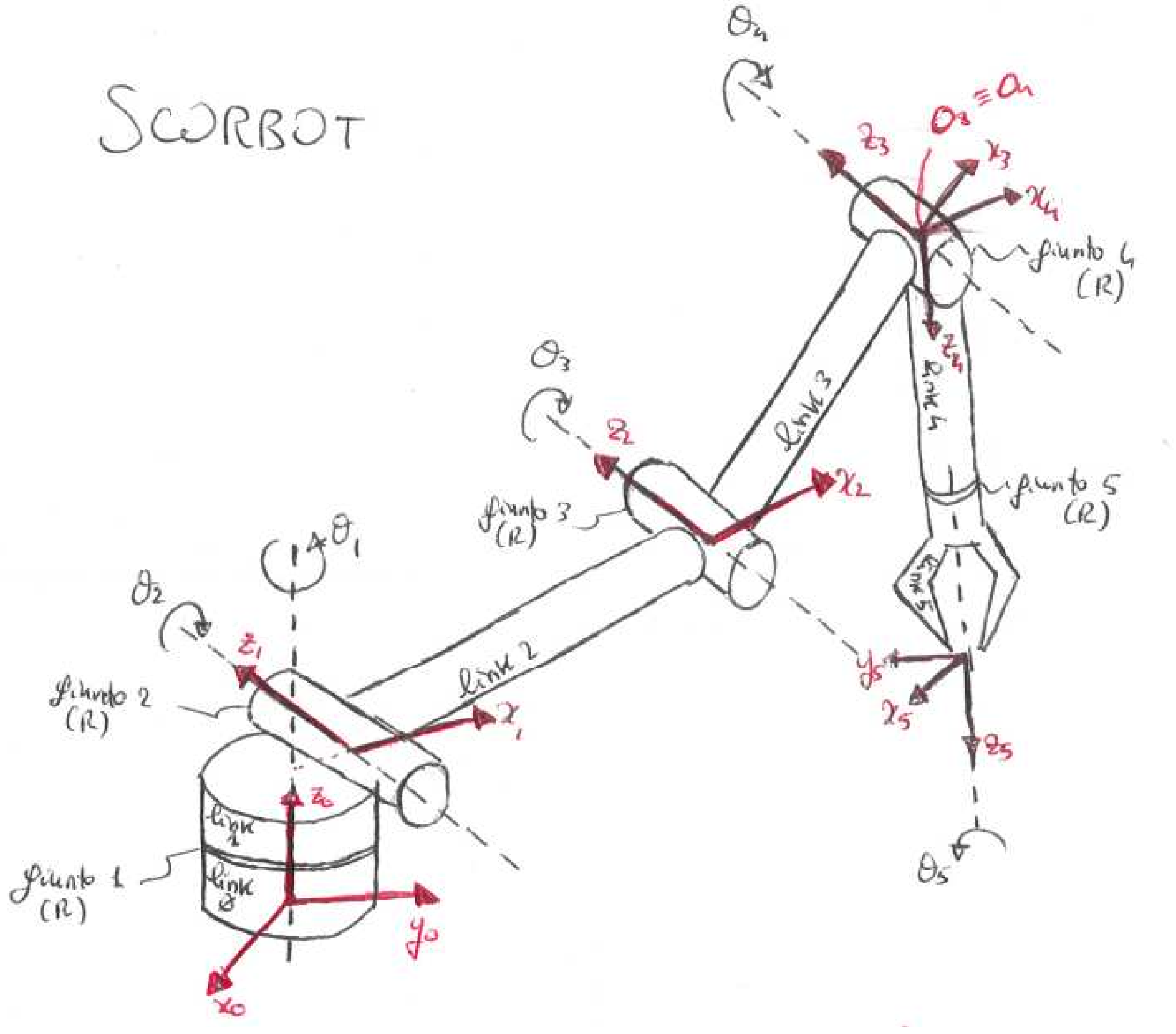

Figure 2: I sistemi di riferimento per un robot SCORBOT

Analizzando la Fig. 2, è possibile ricavare i parametri cinematici che caratterizzano lo SCORBOT. I loro valori sono riportati in Tabella 1, in cui sono stati evidenziati con un asterisco quelli variabili, che

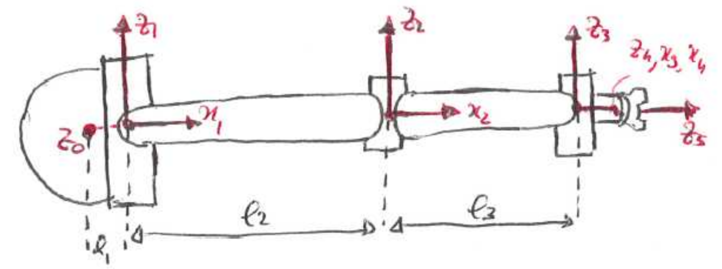

Figure 3: Veduta dall'alto di un robot SCORBOT con indicati i sistemi di riferimento: l'asse z_0, rappresentato come un punto, è uscente dal piano del foglio

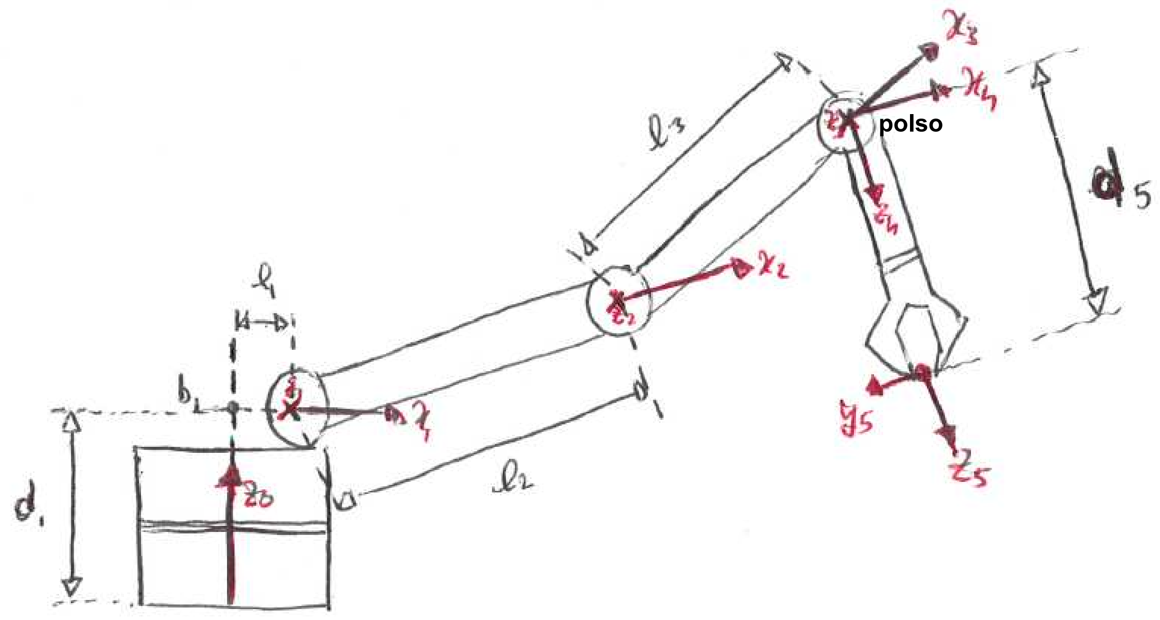

Figure 4: Veduta laterale di un robot SCORBOT con indicati i sistemi di riferimento: gli assi z_1, z_2 e z_3, rappresentati con delle crocette, sono entranti nel piano del foglio

costituiscono quindi le variabili di giunto, cioè

$$\vec{q} = [\ \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5\ ]^T. \tag{1}$$

Nel caso particolare dei robot SCORBOT in uso presso il Laboratorio di Robotica di Tor Vergata, il valore numerico dei parametri in Tabella 1 è indicato in Tabella 2. Sostituendo il valore dei parametri riportati in Tabella 1 nell'espressione generale della matrice di trasformazione T_{i-1}^{i} ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) riportata nella trattazione della rappresentazione di Denavit-Hartenberg, è possibile ricavare le matrici di trasformazione associate ai 5 sistemi di riferimento dello SCORBOT:

$$T_0^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & \ell_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & \ell_1\sin\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

	θ	d	a	α
1	θ_1^*	d_1	ℓ_1	$-\pi/2$
2	θ_2^*	0	ℓ_2	0
3	θ_3^*	0	ℓ_3	0
4	θ_4^*	0	0	$-\pi/2$
5	θ_5^*	d_5	0	0

Table 1: I parametri cinematici del robot SCORBOT: il significato geometrico dei parametri costanti (d_1, d_5, ℓ_1, ℓ_2 ed ℓ_3) è illustrato in Fig. 4. In particolare d_5 è la distanza tra il *polso* del robot (posto nel punto $O_3 \equiv O_4$) e il punto di chiusura della pinza (O_5)

parametro	valore [mm]
d_1	340
ℓ_1	16
ℓ_2	220
ℓ_3	220
d_5	151

Table 2: I valori numerici dei parametri cinematici del robot SCORBOT in uso a Tor Vergata

$$T_1^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & \ell_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & \ell_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$T_2^3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & \ell_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & \ell_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

La matrice di trasformazione polso-base T_0^3 (e cioè relativa ai primi tre gradi di libertà) è data da:

$$T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 \tag{5}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & -S_1 & C_1(\ell_1+\ell_2C_2+\ell_3C_{23}) \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & C_1 & S_1(\ell_1+\ell_2C_2+\ell_3C_{23}) \\ -S_{23} & -C_{23} & 0 & d_1-\ell_2S_2-\ell_3S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

dove C_1 indica la funzione $\cos\theta_1$, S_1 indica la funzione $\sin\theta_1$, C_2 indica la funzione $\cos\theta_2$, S_2 indica la funzione $\sin\theta_2$, C_{23} indica la funzione $\cos(\theta_2+\theta_3)$ ed infine S_{23} indica la funzione $\sin(\theta_2+\theta_3)$.

La posizione del polso (cioè dell'origine O_3 - e di O_4 con essa coincidente) rispetto alla terna solidale alla base è data dall'ultima colonna di T_0^3, il cui significato geometrico può essere interpretato abbastanza agevolmente:

$$x_{polso} = C_1(\ell_1+\ell_2C_2+\ell_3C_{23}) \tag{7}$$

$$y_{polso} = S_1(\ell_1+\ell_2C_2+\ell_3C_{23}) \tag{8}$$

$$z_{polso} = d_1-\ell_2S_2-\ell_3S_{23}. \tag{9}$$

La trasformazione cinematica diretta del robot SCORBOT, considerando tutti i gradi di libertà, è basata sulle ulteriori matrici T_3^4 e T_4^5 che, in base ai parametri cinematici che descrivono il robot, sono date da:

$$T_3^4 = \begin{pmatrix} \cos\theta_4 & 0 & -\sin\theta_4 & 0 \\ \sin\theta_4 & 0 & \cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$T_4^5 = \begin{pmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

La matrice T_3^5 che descrive la posizione e l'orientamento della mano rispetto al polso è data da:

$$T_3^5 = T_3^4 T_4^5 = \begin{pmatrix} \cos\theta_4\cos\theta_5 & -\cos\theta_4\sin\theta_5 & -\sin\theta_4 & -d_5\sin\theta_4 \\ \sin\theta_4\cos\theta_5 & -\sin\theta_4\sin\theta_5 & \cos\theta_4 & d_5\cos\theta_4 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

La matrice di trasformazione completa T_0^5, che consente di trasformare le coordinate di un punto rispetto alla terna L_5 nelle coordinate dello stesso punto rispetto alla terna L_0, è ottenibile dal prodotto:

$$T_0^5 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 = T_0^3\, T_3^5, \tag{13}$$

ed è data da:

$$T_0^5 = \begin{pmatrix} R_0^5 & p_0^5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

dove

$$R_0^5 = \begin{pmatrix} C_1C_{234}C_5 + S_1S_5 & -C_1C_{234}S_5 + S_1C_5 & -C_1S_{234} \\ S_1C_{234}C_5 - C_1S_5 & -S_1C_{234}S_5 - C_1C_5 & -S_1S_{234} \\ -S_{234}C_5 & S_{234}S_5 & -C_{234} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$p_0^5 = \begin{pmatrix} C_1(\ell_1 + \ell_2C_2 + \ell_3C_{23} - d_5S_{234}) \\ S_1(\ell_1 + \ell_2C_2 + \ell_3C_{23} - d_5S_{234}) \\ d_1 - \ell_2S_2 - \ell_3S_{23} - d_5C_{234} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

in cui C_5 indica la funzione $\cos\theta_5$, S_5 indica la funzione $\sin\theta_5$, C_{234} indica la funzione $\cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$ ed infine S_{234} indica la funzione $\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$.

La matrice R_0^5 ha per colonne le componenti di x_5, y_5 e z_5 rispetto alla terna di base ed esprime pertanto l'orientamento della mano. Il vettore p_0^5 esprime le coordinate di O_5 rispetto alla terna di base e fornisce quindi con R_0^5 una soluzione completa alla cinematica diretta. Si noti che le espressioni per la posizione e l'orientamento finale della mano, cioè la sua configurazione, dipendono da tutti i parametri cinematici che caratterizzano il robot, cioè $R_0^5 = R_0^5(\vec{q})$ e $p_0^5 = p_0^5(\vec{q})$.

È inoltre interessante osservare dall'espressione di p_0^5 la seguente relazione tra le coordinate del polso (riportate in (7)-(9)) e quelle dell'estremità della pinza:

$$x_{pinza} = x_{polso} - C_1d_5S_{234} \tag{17}$$
$$y_{pinza} = y_{polso} - S_1d_5S_{234} \tag{18}$$
$$z_{pinza} = z_{polso} - d_5C_{234}. \tag{19}$$

Anche queste relazioni si prestano a una semplice interpretazione geometrica e saranno molto utili, come si vedrà, per risolvere il problema della cinematica inversa.

2 Cinematica inversa del robot articolato SCORBOT

Il problema della cinematica inversa consiste nel trovare le variabili di giunto $\vec{q}$ che portano il punto di chiusura O_5 della pinza in una certa posizione (x_d, y_d, z_d) desiderata con un certo orientamento desiderato. In base a quanto detto sopra, essendo lo SCORBOT sotto-attuato, non possiamo assegnare ad arbitrio l'orientamento della pinza: il più delle volte avremo una configurazione non realizzabile. Per questo motivo, nel caso dello SCORBOT, la configurazione della pinza nello spazio di lavoro verrà descritta, oltre che dalla posizione desiderata (x_d, y_d, z_d) di O_5, dal suo orientamento desiderato, che verrà fissato specificando solamente due parametri: l'angolo di pitch β_d e quello di roll ω_d. L'angolo di roll risulta banalmente definito da

$$\omega_d = \theta_5. \tag{20}$$

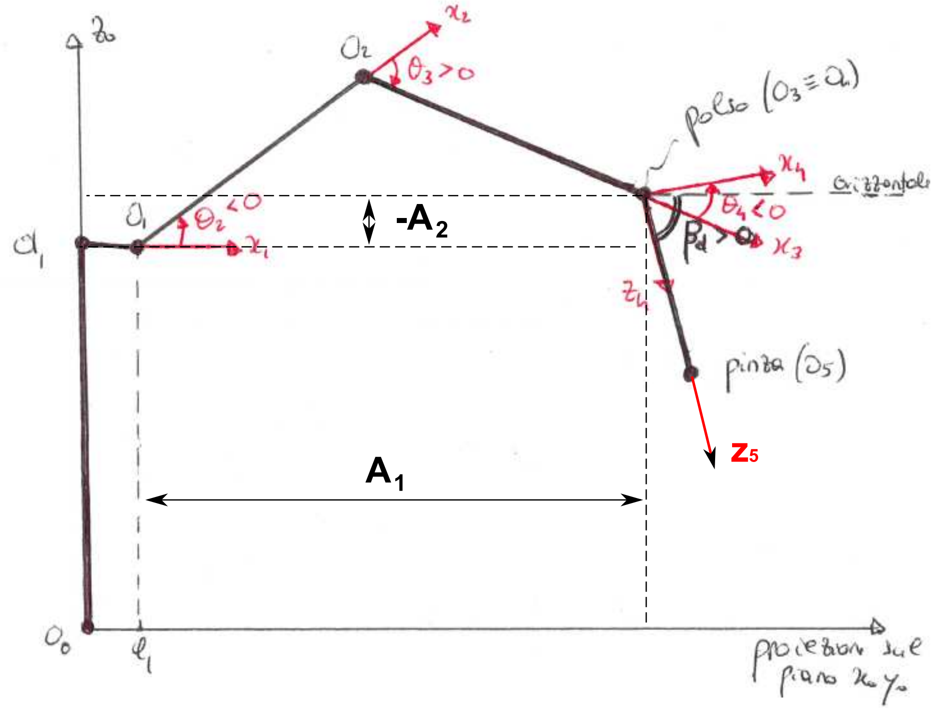

Figure 5: Definizione della configurazione del robot SCORBOT nello spazio di lavoro: oltre alle coordinate desiderate (x_d, y_d, z_d) del punto O_5 di chiusura della pinza, vengono fissati l'angolo di roll ω_d della pinza e l'angolo β_d di pitch della stessa, definito come angolo tra l'orizzontale e l'asse z_5 (o l'asse z_4 che coincide con z_5), con verso positivo quando la pinza è rivolta verso il basso come in figura

Per quanto riguarda β_d, questo viene definito come l'angolo tra l'orizzontale e l'asse z_5, con verso positivo quando la pinza è rivolta verso il basso (si veda la Fig. 5). Dalla Fig. 5, si ricava facilmente che l'angolo tra l'orizzontale e l'asse x_4 è dato dalla somma $\theta_2 + \theta_3 + \theta_4$, ed è positivo quando x_4 punta verso il basso. Poiché z_5 coincide con z_4 e questo è a 90 gradi rispetto a x_4, si deduce facilmente che β_d, l'angolo tra l'orizzontale e z_5, sarà dato dall'angolo tra l'orizzontale e x_4 più 90 gradi, cioè:

$$\beta_d = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \pi/2. \tag{21}$$

La cinematica inversa può essere perciò formulata nel seguente modo: assegnati $(x_d, y_d, z_d, \beta_d, \omega_d)$ trovare $\vec{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T$ tale che $(x_d, y_d, z_d, \beta_d, \omega_d) = h(\vec{q})$.

Per risolvere il problema della cinematica inversa, si può seguire una procedura simile a quella adottata nel caso del manipolatre planare a tre gradi di libertà: si individua la posizione $(x_{polso}, y_{polso}, z_{polso})$ che il polso dello SCORBOT deve avere affinché la pinza sia nella posizione desiderata con gli angoli di pitch e roll voluti e si ricavano quindi θ_1, θ_2 e θ_3 (da cui la posizione del polso dipende). Si completa quindi determinando gli altri due angoli. Questo approccio è basato su un disaccoppiamento geometrico del problema.

Vediamo prima la soluzione dei primi tre gradi di libertà (avendo specificato quindi direttamente la posizione del polso) e applichiamo poi quanto trovato al problema completo.

2.1 Soluzione per i primi tre gradi di libertà

Supponiamo di voler trovare θ_1, θ_2 e θ_3 tali che il polso, cioè l'origine O_3, si trovi in un certo punto desiderato $(x_{polso}, y_{polso}, z_{polso})$. Abbiamo visto ((7)-(9)) che le coordinate del polso sono date da:

$$\begin{aligned} x_{polso} &= \cos\theta_1(\ell_1 + \ell_2\cos\theta_2 + \ell_3\cos(\theta_2 + \theta_3)), &(22)\\ y_{polso} &= \sin\theta_1(\ell_1 + \ell_2\cos\theta_2 + \ell_3\cos(\theta_2 + \theta_3)), &(23)\\ z_{polso} &= d_1 - \ell_2\sin\theta_2 - \ell_3\sin(\theta_2 + \theta_3). &(24) \end{aligned}$$

2.1.1 Determinazione dell'angolo θ_1

Dalle equazioni (22)-(23) si ricava facilmente[1]:

$$\theta_1 = \text{ atan2 } (y_{polso}, x_{polso}), \tag{25}$$

2.1.2 Determinazione dell'angolo θ_3

Per calcolare le altre variabili di giunto, si considerino le tre equazioni (22) - (24). In particolare si sommi la (22), moltiplicata per $\cos\theta_1$, alla (23), moltiplicata per $\sin\theta_1$, ottenendo (con la abituale notazione compatta):

$$x_{polso}C_1 + y_{polso}S_1 = \ell_1 + \ell_2C_2 + \ell_3C_{23}. \tag{26}$$

Introdotta la variabile ausiliaria:

$$A_1 = x_{polso}C_1 + y_{polso}S_1 - \ell_1, \tag{27}$$

che, a questo punto della soluzione può essere calcolata, perchè dipende solo da grandezze note, si ha:

$$A_1 = (\ell_2\cos(\theta_2) + \ell_3\cos(\theta_2+\theta_3)). \tag{28}$$

In modo analogo, si consideri la variabile ausiliaria:

$$A_2 = d_1 - z_{polso}, \tag{29}$$

che dipende solo da grandezze note; in base alla (24), si ha:

$$A_2 = \ell_2S_2 + \ell_3S_{23}. \tag{30}$$

Procedendo ora come nel caso del robot planare, si ricava:

$$A_1^2 + A_2^2 = \ell_2^2 + \ell_3^2 + 2\ell_2\ell_3\cos\theta_3, \tag{31}$$

e quindi:

$$\theta_3 = \pm arcos\frac{A_1^2 + A_2^2 - \ell_2^2 - \ell_3^2}{2\ell_2\ell_3}. \tag{32}$$

2.1.3 Determinazione dell'angolo θ_2

Procedendo ancora come nel caso del robor planare, si vede che le equazioni (28) e (30) possono essere riscritte secondo il seguente sistema di due equazioni lineari nelle incognire C_2 ed S_2 (con la notazione compatta $C_3 = \cos(\theta_3), S_3 = \sin(\theta_3)$):

$$\begin{aligned} A_1 &= (\ell_2 + \ell_3C_3)C_2 - \ell_3S_3S_2, && (33)\\ A_2 &= \ell_3S_3\,C_2 + (\ell_2 + \ell_3C_3)S_2, && (34) \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{(\ell_2 + \ell_3C_3)A_1 + \ell_3S_3A_2}{\ell_2^2 + \ell_3^2 + 2\ell_2\ell_3C_3}, && (35)\\ S_2 &= \frac{(\ell_2 + \ell_3C_3)A_2 - \ell_3S_3A_1}{\ell_2^2 + \ell_3^2 + 2\ell_2\ell_3C_3}, && (36) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\theta_2 = \text{ atan2 } \left((\ell_2 + \ell_3C_3)A_2 - \ell_3S_3A_1, (\ell_2 + \ell_3C_3)A_1 + \ell_3S_3A_2\right). \tag{37}$$

[1] L'equazione (25), che può invero essere dedotta anche da semplici considerazioni geometriche, presuppone che la quantità $\ell_1 + \ell_2C_2 + \ell_3C_{23}$ sia positiva: questo corrisponde a scegliere come soluzione alle (22)-(23) quella in cui lo SCORBOT è rivolto *in avanti*, cioè con il segmento $O_1 - O_4$ che non interseca l'asse z_0 (l'altra soluzione si ottiene lavorando all'*indietro*, cioè scegliendo $\theta_1 = atan2(y_{polso}, x_{polso}) + \pi$, che porterà a $\ell_1 + \ell_2C_2 + \ell_3C_{23} < 0$)

2.1.4 Soluzione completa a tre gradi di libertà

Ricapitolando, i valori di θ_1, θ_2 e θ_3 che permettono di posizionare il polso dello SCORBOT in un punto desiderato $(x_{polso}, y_{polso}, z_{polso})$, sono dati da:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \operatorname{atan2}\left(y_{polso}, x_{polso}\right), && (38)\\
\theta_3 &= \pm arcos\frac{A_1^2 + A_2^2 - \ell_2^2 - \ell_3^2}{2\ell_2\ell_3}, && (39)\\
\theta_2 &= \operatorname{atan2}\left((\ell_2 + \ell_3 C_3)A_2 - \ell_3 S_3 A_1, (\ell_2 + \ell_3 C_3)A_1 + \ell_3 S_3 A_2\right), && (40)
\end{aligned}$$

ove C_3 indica la funzione $\cos\theta_3$, S_3 indica la funzione $\sin\theta_3$, ed inoltre

$$\begin{aligned}
A_1 &:= x_{polso}\cos\theta_1 + y_{polso}\sin\theta_1 - \ell_1, && (41)\\
A_2 &:= d_1 - z_{polso}. && (42)
\end{aligned}$$

2.2 Soluzione completa per i 5 gradi di libertà

Assegnata come detto sopra la posizione desiderata (x_d, y_d, z_d) per O_5 (il punto di chiusura della pinza) e gli angoli di beccheggio β_d e di roll ω_d, si vuole trovare il vettore di giunto $\vec{q}$ che porti la pinza nella configurazione desiderata. Innanzitutto, per definizione, si ha immediatamente:

$$\theta_5 = \omega_d. \quad (43)$$

Analogamente a quanto fatto nel caso a tre gradi di libertà, θ_1 può essere ricavato immediatamente dalle prime due componenti del vettore p_0^5 in (16), che esprime le coordinate di O_5 rispetto alla base[2]:

$$\theta_1 = atan2(y_d, x_d)$$

Poi, ricordando il legame che sussiste tra coordinate di O_5 e polso (confronta (17)-(19)), e tenendo conto di (21), possiamo ricavare le coordinate desiderate per il polso:

$$\begin{aligned}
x_{polso} &= x_d + C_1 d_5 sin(\beta_d - \pi/2) && (44)\\
y_{polso} &= y_d + S_1 d_5 sin(\beta_d - \pi/2) && (45)\\
z_{polso} &= z_d + d_5 cos(\beta_d - \pi/2). && (46)
\end{aligned}$$

Si noti che tutte le quantità a destra delle equazioni precedenti sono note e che pertanto le coordinate desiderate per il polso sono effettivamente calcolabili.

Applicando la soluzione a tre gradi di libertà descritta nella sezione precedente, possiamo quindi ricavare immediatamente gli angoli θ_2 e θ_3 secondo, rispettivamente, le (37) e (32). Queste due equazioni dipendono da A_1 e A_2, definiti rispettivamente in (27) e (29). Sostituendo in tali espressioni le (44)-(46), si ricava

$$\begin{aligned}
A_1 &= x_d C_1 + y_d S_1 + d_5 sin(\beta_d - \pi/2) - \ell_1 && (47)\\
A_2 &= d_1 - z_d - d_5 cos(\beta_d - \pi/2). && (48)
\end{aligned}$$

Ricordando poi che $sin(\alpha - \pi/2) = -cos(\alpha)$ e $cos(\alpha - \pi/2) = sin(\alpha)$, le precedenti possono anche essere scritte nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
A_1 &= x_d C_1 + y_d S_1 - d_5 cos(\beta_d) - \ell_1 && (49)\\
A_2 &= d_1 - z_d - d_5 sin(\beta_d). && (50)
\end{aligned}$$

Poiché (si veda (21)) $\beta_d = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \pi/2$, è immediato ricavare

$$\theta_4 = \beta_d - \theta_2 - \theta_3 - \pi/2 \quad (51)$$

[2]Questo sempre nell'ipotesi accennata in precedenza che si operi lo SCORBOT scegliendo la soluzione del robot, questa volta compresa la pinza, proteso *in avanti*, cioè con il segmento $O_1 - O_5$ che non interseca z_0

2.2.1 Soluzione completa a cinque gradi di libertà

Ricapitolando, i valori di θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 e θ_5 che permettono di posizionare la pinza dello SCORBOT in un punto desiderato (x_d, y_d, z_d) con angolo di beccheggio β_d e angolo di roll ω_d, sono dati da:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \text{atan2}\,(y_d, x_d), && (52)\\
\theta_3 &= \pm arcos\frac{A_1^2 + A_2^2 - \ell_2^2 - \ell_3^2}{2\ell_2\ell_3}, && (53)\\
\theta_2 &= \text{atan2}\,\left((\ell_2 + \ell_3 C_3)A_2 - \ell_3 S_3 A_1, (\ell_2 + \ell_3 C_3)A_1 + \ell_3 S_3 A_2\right), && (54)\\
\theta_4 &= \beta_d - \theta_2 - \theta_3 - \pi/2, && (55)\\
\theta_5 &= \omega_d. && (56)
\end{aligned}$$

ove C_3 indica la funzione $\cos\theta_3$, S_3 indica la funzione $\sin\theta_3$, ed inoltre

$$\begin{aligned}
A_1 &= x_d C_1 + y_d S_1 - d_5 cos(\beta_d) - \ell_1 && (57)\\
A_2 &= d_1 - z_d - d_5 sin(\beta_d). && (58)
\end{aligned}$$