

# Robot antropomorfo

In questa sezione si procederà a calcolare la trasformazione cinematica diretta e inversa per un robot di tipo ANTROPOMORFO (detto anche *articolato*, vedi Fig. 1). Si tratta di un robot a 6 gradi di libertà con soli giunti rotoidali. Differisce dallo SCORBOT per la presenza di un *polso sferico*. È un manipolatore molto utilizzato in ambito industriale per la sua elevata destrezza: anche se non è molto robusto e può sollevare solo pesi non molto elevati, tuttavia è di poco ingombro e riesce a raggiungere punti anche molto distanti dalla base. Avendo 6 gradi di libertà può raggiungere, nei limiti del suo spazio di lavoro, qualsiasi posizione con qualsiasi orientamento desiderato. La cinematica diretta e inversa richiede come passo preliminare la soluzione del solo *polso sferico*, che è l'organo a tre gradi di libertà collocato all'estremità del manipolatore.

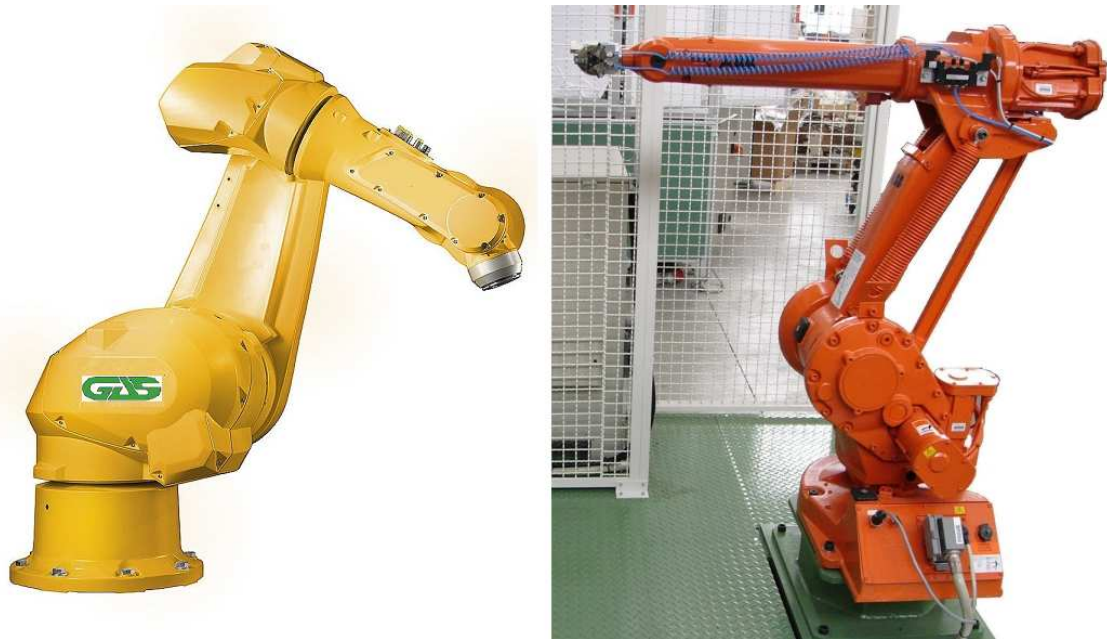


Figure 1: Due esemplari di robot antropomorfo

## 1 Il polso sferico

### 1.1 Problema cinematico diretto del polso sferico

La struttura di un polso sferico ed i sistemi di riferimento, assegnati seguendo la procedura di Denavit-Hartenberg, sono riportati nella Fig. 2

Analizzando la Fig. 2, è possibile ricavare i parametri cinematici che caratterizzano un polso sferico. I loro valori sono riportati in Tabella 1, in cui sono stati evidenziati con un asterisco quelli variabili, che costituiscono quindi le variabili di giunto.

Sostituendo il valore dei parametri riportati in Tabella 1 nell'espressione generale della matrice di trasformazione  $T_{i-1}^i$  ( $i = 4, 5, 6$ ) riportata nella trattazione della rappresentazione di Denavit-Hartenberg, è possibile ricavare le matrici di trasformazione associate ai 3 giunti del polso:

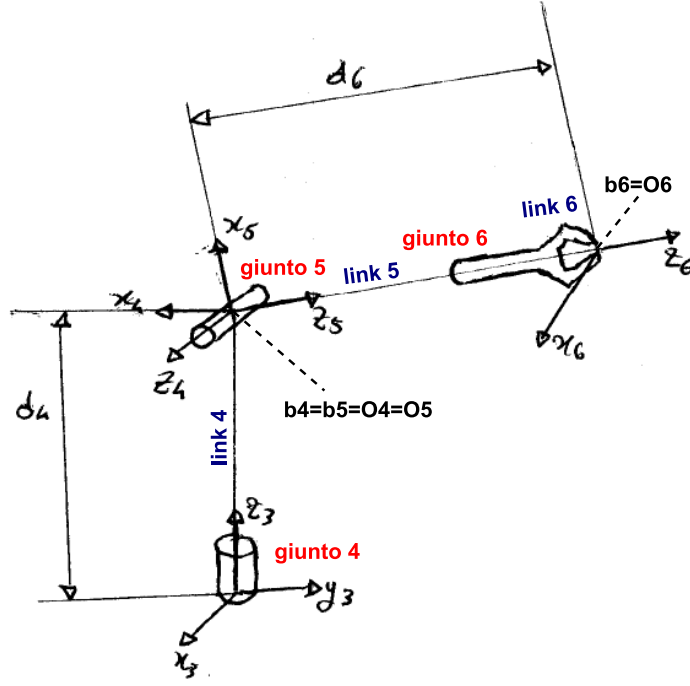


Figure 2: Un polso sferico. La base parte dal sistema  $L_3$  in quanto tipicamente un polso sferico viene montato su un manipolatore a partire dal quarto grado di libertà. Nella figura vengono indicati anche i punti  $b_i$  ( $i = 4, 5, 6$ ) che, secondo Denavit-Hartenberg, sono i punti di intersezione tra gli assi  $x_i$  e  $z_{i-1}$

	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
4	$\theta_4^*$	$d_4$	0	$-\pi/2$
5	$\theta_5^*$	0	0	$\pi/2$
6	$\theta_6^*$	$d_6$	0	0

Table 1: I parametri cinematici del polso sferico: il significato geometrico dei parametri  $d_4$  e  $d_6$  è illustrato in Fig. 2

$$T_3^4 = \begin{pmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$T_4^5 = \begin{pmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$T_5^6 = \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La matrice di trasformazione completa  $T_3^6$  è data da:

$$T_3^6 = T_3^4 \cdot T_4^5 \cdot T_5^6 = \begin{pmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & d_6 c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & d_6 s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & d_6 c_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

con la solita convenzione su  $c_i = \cos(\theta_i)$  e  $s_j = \sin(\theta_j)$ . Nel seguito, il minore formato dalle prime tre righe e le prime tre colonne di  $T_3^6$  verrà indicato come  $R_3^6$  e costituisce la matrice di rotazione che fornisce l'orientamento di  $L_6$  rispetto a  $L_3$ .

## 1.2 Problema cinematico inverso del polso sferico

La trasformazione cinematica inversa del polso sferico riguarda solo l'individuazione degli angoli  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  e  $\theta_6$  tali che l'orientamento del polso sia quello desiderato (è questo quello che serve come si vedrà nella soluzione del manipolatore antropomorfo). Pertanto, assegnata una matrice di rotazione (cioè ortogonale speciale) desiderata per il polso (cioè per la terna finale  $L_6$  rispetto a  $L_3$ ):

$$R_{des,polso} = \begin{pmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{pmatrix}$$

dove la prima colonna  $\vec{n} = [n_x^3, n_y^3, n_z^3]^T$  contiene le coordinate desiderate per il versore  $\vec{e}_{x_6}$  rispetto alla terna  $L_3$ , la seconda colonna  $\vec{s} = [s_x^3, s_y^3, s_z^3]^T$  contiene le coordinate desiderate per il versore  $\vec{e}_{y_6}$  rispetto alla terna  $L_3$  e infine la terza colonna  $\vec{a} = [a_x^3, a_y^3, a_z^3]^T$  contiene le coordinate desiderate per il versore  $\vec{e}_{z_6}$  rispetto alla terna  $L_3$  ( $n$  può essere letto come l'iniziale di *normale*,  $s$  di *scorrimento* e  $a$  di *approach* o *avanzamento*), gli angoli  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  e  $\theta_6$  tali che

$$R_3^6(\theta_4, \theta_5, \theta_6) = R_{des,polso}$$

si possono ricavare facilmente dalle seguenti formule (che rappresentano tra l'altro l'inversione di una terna di Eulero data dalle rotazioni ZYZ):

$$\theta_4 = \text{atan2}(a_y^3, a_x^3) \quad (5)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(\sqrt{[a_x^3]^2 + [a_y^3]^2}, a_z^3) \quad (6)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(s_z^3, -n_z^3) \quad (7)$$

Tali formule corrispondono a una scelta di  $\theta_5 \in (0, \pi)$ , che assicura  $\sin(\theta_5) > 0$ . L'altra scelta possibile,  $\theta_5 \in (-\pi, 0)$  porta alle seguenti formule equivalenti:

$$\theta_4 = \text{atan2}(-a_y^3, -a_x^3) \quad (8)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(-\sqrt{[a_x^3]^2 + [a_y^3]^2}, a_z^3) \quad (9)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(-s_z^3, n_z^3) \quad (10)$$

Nel caso  $\sin(\theta_5) = 0$ , le rotazioni del quarto e del sesto giunto avvengono lungo il medesimo asse per cui, come si era visto anche nel caso della terna di Eulero *RPY*, si può ricavare solo la somma  $\theta_4 + \theta_6 = \text{atan2}(n_y^3, n_x^3)$  (se  $\theta_5 = 0$ ) o la differenza  $\theta_4 - \theta_6 = \text{atan2}(-n_y^3, -n_x^3)$  (se  $\theta_5 = \pi$ ).

## 2 Il robot antropomorfo

### 2.1 Problema cinematico diretto del robot antropomorfo

Tornando ora al problema del robot antropomorfo, riportiamo innanzitutto in Fig. 3 la struttura del robot ed i sistemi di riferimento, assegnati seguendo la procedura di Denavit-Hartenberg: si noti come, sebbene i primi tre giunti siano identici a quelli dello SCORBOT,  $z_1$  e  $z_2$  sono stati scelti in verso opposto. La Tab. 2 riporta i parametri di Denavit-Hartenberg per il robot completo (le ultime 3 righe della tabella coincidono con quelle del polso sferico in Tab. 1).

Sostituendo il valore dei parametri riportati in Tabella 2 (solo le prime tre righe, essendo le altre già state considerate con il polso sferico) nell'espressione generale della matrice di trasformazione  $T_{i-1}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) si ha:

$$T_0^1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & \ell_1 c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & \ell_1 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

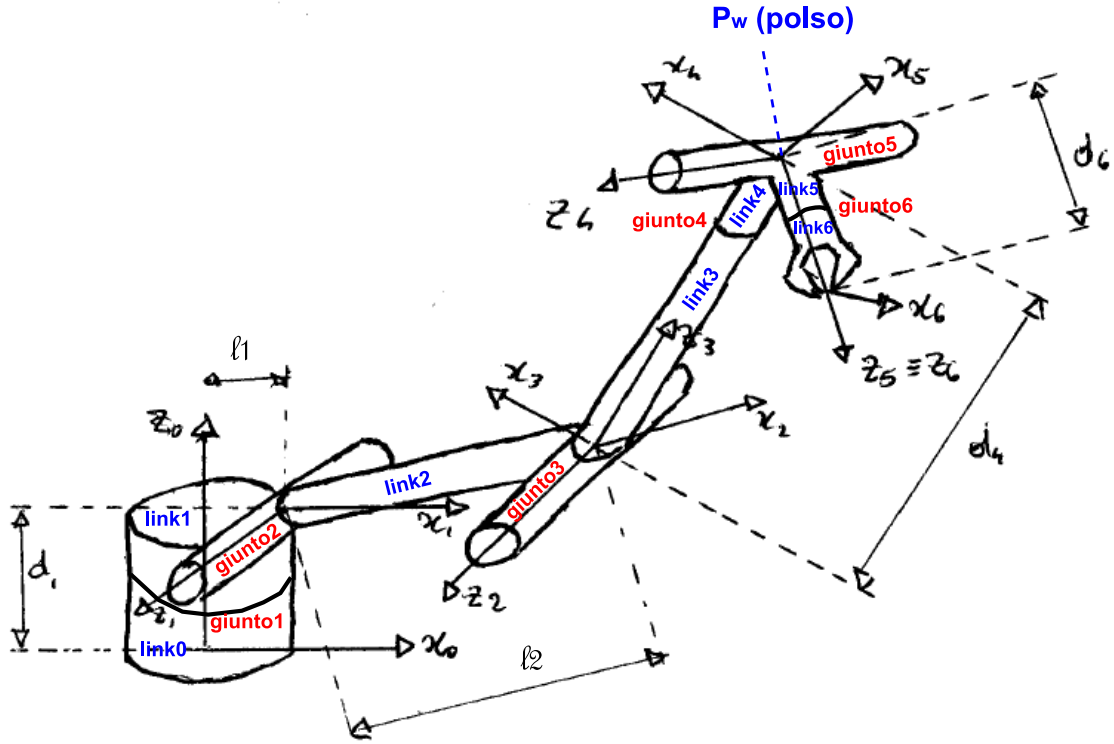


Figure 3: Struttura e terne di riferimento per un robot antropomorfo

	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
1	$\theta_1^*$	$d_1$	$l_1$	$\pi/2$
2	$\theta_2^*$	0	$l_2$	0
3	$\theta_3^*$	0	0	$\pi/2$
4	$\theta_4^*$	$d_4$	0	$-\pi/2$
5	$\theta_5^*$	0	0	$\pi/2$
6	$\theta_6^*$	$d_6$	0	0

Table 2: I parametri cinematici del robot antropomorfo: il significato geometrico dei parametri  $l_1$ ,  $l_2$  e  $d_1$  è illustrato in Fig. 3 ( $d_4$  e  $d_6$  sono già stati introdotti trattando il polso)

$$T_1^2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$T_2^3 = \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

La matrice complessiva relativa ai primi tre gradi di libertà è data da:

$$T_0^3 = T_0^1 \cdot T_1^2 \cdot T_2^3 = \begin{pmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & c_1 s_{23} & l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} & -c_1 & s_1 s_{23} & l_1 s_1 + l_2 s_1 c_2 \\ s_{23} & 0 & -c_{23} & d_1 + l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

dove al solito  $c_{ij}$  rappresenta  $\cos(\theta_i + \theta_j)$  e  $s_{ij}$  rappresenta  $\sin(\theta_i + \theta_j)$ . Facendo il prodotto di tale matrice

per la  $T_3^6$  in (4) si ricava la matrice completa  $T_0^6$ :

$$T_0^6 = T_0^3 \cdot T_3^6 = \begin{pmatrix} \vec{n}^0 & \vec{s}^0 & \vec{a}^0 & \vec{p}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove le espressioni di  $\vec{n}^0$ ,  $\vec{s}^0$  e  $\vec{a}^0$  (che rappresentano rispettivamente le coordinate dei versori  $\vec{e}_{x_6}$ ,  $\vec{e}_{y_6}$  e  $\vec{e}_{z_6}$  rispetto alla terna di base) sono riportate in Fig. 4, mentre il vettore  $\vec{p}^0$  che esprime la posizione della pinza (cioè di  $O_6$ ) rispetto alla terna di base è dato da:

$$\vec{p}^0 = \begin{pmatrix} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} + d_6 (c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + s_1 s_4 s_5) \\ \ell_1 s_1 + \ell_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} + d_6 (s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - c_1 s_4 s_5) \\ d_1 + \ell_2 s_2 - d_4 c_{23} + d_6 (s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5) \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \vec{n}^0 &= \begin{bmatrix} c_1 (c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6) + s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1 (c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6) - c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + c_{23} s_5 c_6 \end{bmatrix} \\ \vec{s}^0 &= \begin{bmatrix} c_1 (-c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6) + s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1 (-c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6) - c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ -s_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - c_{23} s_5 s_6 \end{bmatrix} \\ \vec{a}^0 &= \begin{bmatrix} c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + s_1 s_4 s_5 \\ s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - c_1 s_4 s_5 \\ s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Figure 4: Le coordinate dei tre versori della terna  $L_6$  rispetto alla terna di base  $L_0$

## 2.2 Problema cinematico inverso del robot antropomorfo

Assegnati la posizione  $\vec{p}_e$  e l'orientamento  $R_e = [\vec{n}_e \ \vec{s}_e \ \vec{a}_e]$  desiderati per l'effettore del robot rispetto alla terna di base  $L_0$ , si vogliono trovare (se esistono) gli angoli di giunto  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) tali che

$$\vec{p}^0(\vec{q}) = \vec{p}_e$$

$$\vec{n}^0(\vec{q}) = \vec{n}_e$$

$$\vec{s}^0(\vec{q}) = \vec{s}_e$$

$$\vec{a}^0(\vec{q}) = \vec{a}_e$$

dove  $\vec{q}$  è il vettore dei 6 angoli di giunto  $\theta_i$ ,  $\vec{p}^0(\vec{q})$  è riportato nella (15), mentre  $\vec{n}^0(\vec{q})$ ,  $\vec{s}^0(\vec{q})$  e  $\vec{a}^0(\vec{q})$  sono riportati in Fig. 4. Il problema risulta più semplice del previsto essendo possibile disaccoppiarlo mediante la posizione del polso. In particolare si attua la procedura che segue, valida in generale per ogni robot manipolatore che presenti un polso sferico.

### 2.2.1 Determinazione delle prime tre variabili di giunto $\theta_1$ , $\theta_2$ e $\theta_3$

Affinché la pinza sia in  $\vec{p}_e$  con orientamento  $R_e$  occorre che il polso sia in

$$\vec{P}_w = \vec{p}_e - d_6 \cdot \vec{a}_e \quad (16)$$

D'altra parte, rispetto a  $L_3$ , il polso ha coordinate omogenee  $(0, 0, d_4, 1)^T$ , per cui rispetto alla base, in funzione di  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , le sue coordinate possono scriversi nel seguente modo:

$$\vec{P}_w = T_0^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tenendo conto di (14):

$$\vec{P}_w = \begin{pmatrix} d_4 c_1 s_{23} + \ell_2 c_1 c_2 + \ell_1 c_1 \\ d_4 s_1 s_{23} + \ell_2 s_1 c_2 + \ell_1 s_1 \\ -d_4 c_{23} + \ell_2 s_2 + d_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [d_4 s_{23} + \ell_2 c_2 + \ell_1] c_1 \\ [d_4 s_{23} + \ell_2 c_2 + \ell_1] s_1 \\ -d_4 c_{23} + \ell_2 s_2 + d_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Indicando con  $(P_{wx}, P_{wy}, P_{wz})$  le coordinate di  $\vec{P}_w$  (calcolate con (16) e quindi note) e ponendole uguali alle rispettive funzioni appena determinate in (17), si ricava immediatamente<sup>1</sup>:

$$\theta_1 = \text{atan2}(P_{wy}, P_{wx}) \quad (18)$$

Noto  $\theta_1$ , si possono calcolare le seguenti due quantità:

$$A_1 = P_{wx} c_1 + P_{wy} s_1 - \ell_1 \quad (19)$$

$$A_2 = d_1 - P_{wz} \quad (20)$$

Usando (17), queste due quantità sono legate alle variabili di giunto nel seguente modo:

$$A_1 = d_4 s_{23} + \ell_2 c_2 \quad (21)$$

$$A_2 = d_4 c_{23} - \ell_2 s_2 \quad (22)$$

Sommando i quadrati delle precedenti si ottiene:

$$A_1^2 + A_2^2 = d_4^2 + \ell_2^2 + 2\ell_2 d_4 s_3$$

(essendo  $c_2 s_{23} - s_2 c_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_2) = s_3$ ). Dalla precedente si ricava immediatamente:

$$\theta_3 = \arcsin\left(\frac{A_1^2 + A_2^2 - d_4^2 - \ell_2^2}{2\ell_2 d_4}\right), \quad (23)$$

che è ben definita se e solo se l'argomento dell' $\arcsin$  è in modulo minore o uguale a 1. Vale inoltre per la (23) il solito discorso su gomito basso e gomito alto in quanto anche la funzione  $\arcsin$ , al pari dell' $\arccos$ , ammette due possibili soluzioni. Come fatto per il manipolatore planare, una volta noto  $\theta_3$  si può scrivere il seguente sistema lineare nelle incognite  $s_2$  e  $c_2$ :

$$d_4 c_3 s_2 + (d_4 s_3 + \ell_2) c_2 = A_1 \quad (24)$$

$$-(d_4 s_3 + \ell_2) s_2 + d_4 c_3 c_2 = A_2 \quad (25)$$

la cui soluzione è data da<sup>2</sup>:

$$s_2 = \frac{d_4 c_3 A_1 - (d_4 s_3 + \ell_2) A_2}{d_4^2 + \ell_2^2 + 2d_4 \ell_2 s_3} \quad (26)$$

$$c_2 = \frac{(d_4 s_3 + \ell_2) A_1 + d_4 c_3 A_2}{d_4^2 + \ell_2^2 + 2d_4 \ell_2 s_3} \quad (27)$$

Dalle precedenti segue quindi:

$$\theta_2 = \text{atan2}(d_4 c_3 A_1 - (d_4 s_3 + \ell_2) A_2, (d_4 s_3 + \ell_2) A_1 + d_4 c_3 A_2) \quad (28)$$

## 2.2.2 Determinazione delle ultime tre variabili di giunto $\theta_4$ , $\theta_5$ e $\theta_6$

Noti ora  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , si può calcolare  $R_0^3$  (è il blocco  $3 \times 3$  di rotazione nella matrice  $T_0^3$  in (14)). Quindi, poiché  $R_0^6 = R_0^3 \cdot R_3^6$ , si determina:

$$R_3^6 = (R_0^3)^T \cdot R_0^6 = (R_0^3)^T \cdot R_e$$

Nota  $R_3^6$ , gli angoli  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  e  $\theta_6$  si ricavano immediatamente con le formule (5)-(7) (o (8)-(10)) riportate in Sezione 1.2.

<sup>1</sup>La formula (18) vale sotto l'ipotesi (analogha a quella fatta a proposito dello SCORBOT) che il robot lavori sempre proteso *in avanti*, cioè che non si trovi mai in una configurazione in cui il segmento che congiunge  $O_1$  con  $O_4$  intersechi l'asse  $z_0$ : questo garantisce che  $d_4 s_{23} + \ell_2 c_2 + \ell_1 > 0$ .

<sup>2</sup>Le equazioni (26) e (27) risultano non definite solo nel caso in cui si annulli il loro denominatore, cioè solo se  $d_4^2 + \ell_2^2 + 2d_4 \ell_2 s_3 = 0$ . Ora, per ogni  $\theta_3$ ,  $d_4^2 + \ell_2^2 + 2d_4 \ell_2 s_3 \geq d_4^2 + \ell_2^2 - 2d_4 \ell_2 = (d_4 - \ell_2)^2 \geq 0$  e vale 0 solo quando  $d_4 = \ell_2$  e  $\theta_3 = -90^\circ$ . Ma  $\theta_3 = -90^\circ$  equivale ad avere il link 3 sovrapposto al link 2 (si veda la Fig. 3). Questo, nell'ipotesi  $d_4 = \ell_2$ , porta a coincidere  $O_4$  con  $O_1$  qualsiasi sia il valore di  $\theta_2$ : tale angolo può quindi essere assegnato ad arbitrio (si era osservata una situazione analoga calcolando  $\theta_1$  nel caso del manipolatore planare quando si aveva  $\theta_2 = \pm 180^\circ$  e  $\ell_1 = \ell_2$ ).