

- ① Dati $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, calcolare $v_1 \cdot v_2$ e $v_1 \times v_2$.
Calcolare quindi $v_1 \cdot (v_1 \times v_2)$.

Soluzione.

$$v_1 \cdot v_2 = -1$$

$$v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 \cdot (v_1 \times v_2) = 0$$

- ② Calcolare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tali che la seguente matrice sia di rotazione:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & -1/\sqrt{2} \\ \alpha & 1/\sqrt{2} & \delta \end{bmatrix}$$

Soluzioni • $\alpha = 0, \gamma = 0, \beta = \delta = 1/\sqrt{2}$ che corrisponde a $R = R_x(45^\circ)$

• $\alpha = 0, \gamma = 0, \beta = \delta = -1/\sqrt{2}$ " " " $R = R_x(135^\circ)$

- ③ Si scriva la matrice di rotazione corrispondenti alle seguenti
~~rotazioni~~ sequente di rotazioni:
- di 60° attorno a $\vec{e}_x$;
- di 90° " " $\vec{e}_y$.

Soluzioni

$$R_{\text{TOT}} = R_x(60^\circ) R_y(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

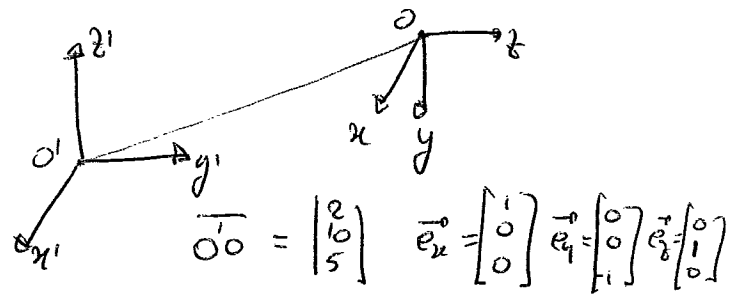
- ④ Con riferimento alla R_{TOT} precedente, applicare il teorema di Eulero calcolando $\vec{r}$ e θ tali che $R_{\text{TOT}} = R_{\vec{r}}(\theta)$.

Soluzioni

$$\theta = \pm \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) = \pm \arccos(-1/4) = \pm 104.48^\circ$$

Se scegli $\theta = 104.48^\circ$, $\vec{r} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.78 \\ 0.45 \end{bmatrix}$ $\left(\vec{r} = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}\right)$

- ⑤ Calcolare T per la rototraslazione indicata in figura e quindi T^{-1}



$$\vec{OO'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solution

$$T = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z & \vec{OO'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Coordinate rispetto a } S_{R'}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \vec{OO'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

- ⑥ Calcolare angoli di Eulero R, P, Y (roll θ , pitch ϕ , yaw ψ) corrispondenti a $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

■ Solution Due scelte possibili:

a) $\theta = 0^\circ, \phi = 0^\circ, \psi = -90^\circ$

b) $\theta = 180^\circ, \phi = 180^\circ, \psi = 90^\circ$

■

- ⑦ Con riferimento al robot ~~planar~~ planar a 3 gradi di libertà, con $l_1 = 30, l_2 = 20, l_3 = 10$, calcolare $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ tali

che $\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ \alpha_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 28 \\ 100^\circ \end{bmatrix}$

Solution

Giunto alto: $\theta_1 = 34.3^\circ, \theta_2 = -30.8^\circ, \theta_3 = 96.5^\circ$

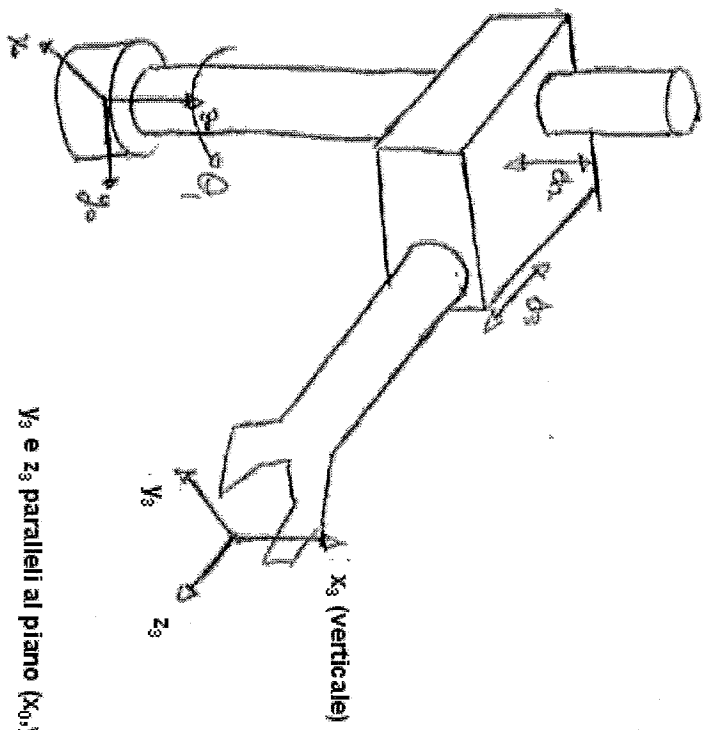
Giunto basso: $\theta_1 = 9.8^\circ, \theta_2 = 30.8^\circ, \theta_3 = 59.6^\circ$

■

Soluzione

Risolvere il problema cinematico diretto per il seguente manipolatore a 3 gradi di libertà (RTT): fissare i sistemi di riferimento, individuare la tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg e calcolare la matrice T_0^3

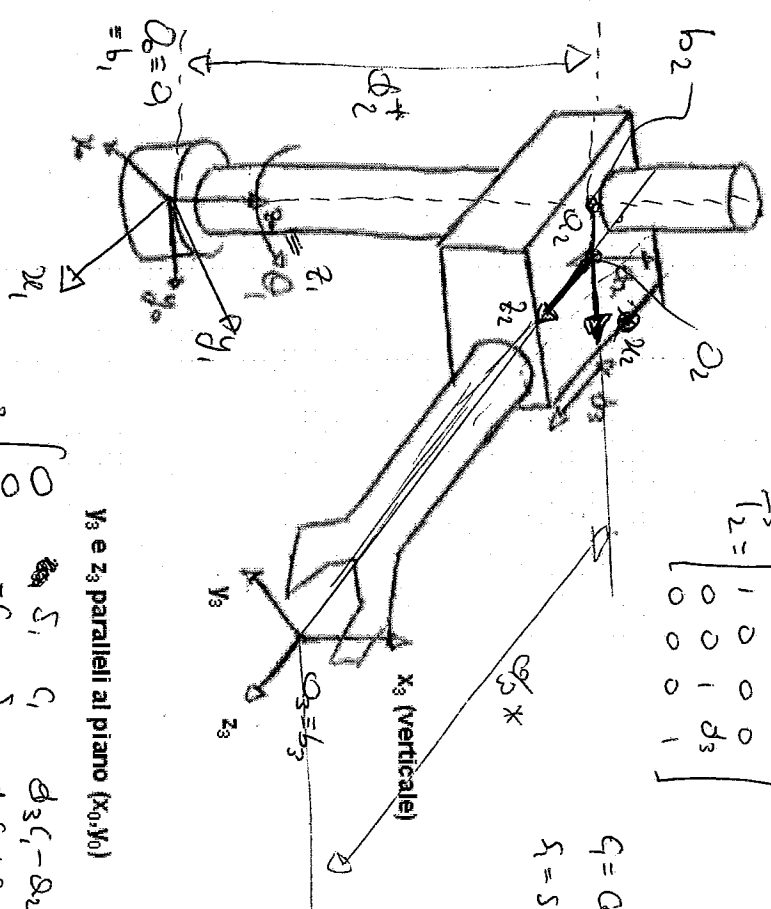
$R = \text{rotation}$
 $T = \text{translation}$



y_3 e z_3 paralleli al piano (x_0, y_0)

	a	α	d	θ
1	d_1	0	0	θ_1
2	a_2	90°	d_2	0
3	0	0	d_3	90°

Risolvere il problema cinematico diretto per il seguente manipolatore a 3 gradi di libertà (RTT): fissare i sistemi di riferimento, individuare la tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg e calcolare la matrice T_0^3



y_3 e z_3 paralleli al piano (x_0, y_0)

$$T_{01}^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{12}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{23}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_i = \cos \theta_i$$

$$s_i = \sin \theta_i$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & c_1 & d_3 c_1 - d_2 s_1 \\ 0 & c_1 & s_1 & d_3 s_1 + d_2 c_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$