

Esercizi su rotazioni, manipolatori, ecc.

①

- Mostrare che rotazione di θ attorno a un asse $\vec{r}$ seguita da una traslazione di α lungo lo stesso asse $\vec{r}$ commutano. Calcolare la matrice di rototraslazione complessiva e applicarla a $\vec{r} = \vec{e}_z$, $\theta = 90^\circ$ e $\alpha = 1$.

Soluzione

Si ha:
$$\begin{bmatrix} R_\theta & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \alpha \vec{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\theta & \alpha \vec{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{perché } R_\theta \cdot \vec{r} = \vec{r})$$

$$\begin{bmatrix} I & \alpha \vec{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_\theta & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\theta & \alpha \vec{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi la T in gen. caso è:

$$T_{\vec{r}}(\theta, \alpha) = \begin{bmatrix} R_\theta & \alpha \vec{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nel caso specifico, $\vec{r} = \vec{e}_z$, $\theta = 90^\circ$ e $\alpha = 1$, $T_z(90^\circ, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Calcolare la matrice ^{R_{TOT}} complessiva ^{di rotazione} corrispondente alla seguente sequenza di rotazioni elementari:

1) rotazione di 60° attorno a e_x ;

2) " " 90° " " e_z (quindi asse è fisso).

Applicare quindi il teorema di Eulero calcolando $\vec{r}$ e θ tali che

~~la~~ ~~la~~ ~~la~~ $R_{TOT} = R_{\vec{r}}(\theta)$.

Soluzione

$$R_{TOT} = R_z(90^\circ) (R_x(60^\circ)) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} =$$

premultiplico perché la seconda rotazione è rispetto al sistema fisso.
$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\theta = \pm \arccos \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) = \pm \arccos \left(\frac{1}{4} \right) = \pm 104.48^\circ \Rightarrow \text{scegliamo } \boxed{+104.48^\circ}$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.45 \\ 0.77 \end{bmatrix} \quad \text{che ha in effetti norma unitaria.}$$

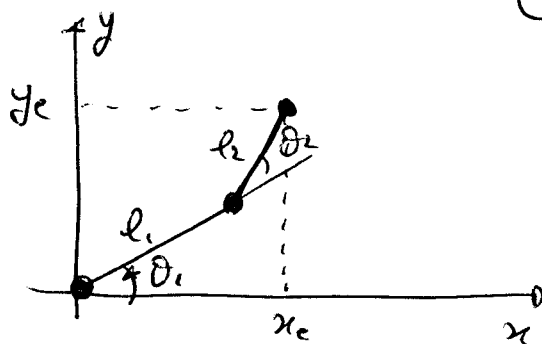
- 5. Consider un manipolatore planare a 2 gradi di libertà come quello in figura
 Con $l_1 = 30 \text{ cm}$ e $l_2 = 20 \text{ cm}$

(i) ~~La~~ Supponendo $\theta_1(t) = t$, calcolare

$\theta_2(t)$ affinché $y_e(t) = 0 \quad \forall t \in (0, t^*)$

Con t^* il tempo oltre il quale non si riesce a mantenere $y_e(t) = 0$.
 Calcolare anche t^* .

(ii) Calcolare i punti $(x, 0)$ con $x > 0$ raggiungibili dal manipolatore.



Soluzione

(i) Si ha $y_e(t) = l_1 \sin[\theta_1(t)] + l_2 \sin[\theta_1(t) + \theta_2(t)]$
 $= l_1 \sin(t) + l_2 \sin[t + \theta_2(t)]$

Affinché $y_e(t) = 0$, deve essere $l_1 \sin t = -l_2 \sin(t + \theta_2(t))$, cioè

$$\sin(t + \theta_2(t)) = -\frac{l_1 \sin t}{l_2} \Rightarrow \boxed{\theta_2(t) = -t - \arcsin\left(\frac{l_1 \sin t}{l_2}\right)}$$

(essendo $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$).

La soluzione esiste se e solo se $\frac{l_1 \sin t}{l_2} \leq 1 \Rightarrow t^* = \arcsin\left(\frac{l_2}{l_1}\right) =$

N.B. Se $l_1 < l_2$, la soluzione esisteva sempre.

$$= \arcsin(2/3) = 0.73 \text{ sec.}$$

(ii) Il punto $(x, 0)$ è raggiungibile se $\theta_2 = \pm \arccos\left(\frac{x^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right)$ ammette soluzione.

Ciò accade se e solo se

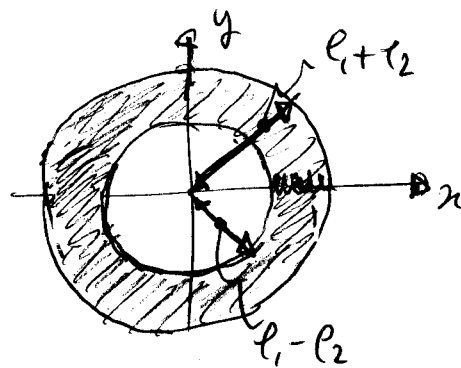
$$-1 \leq \frac{x^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \leq 1$$

cioè se e solo se

$$(l_1 - l_2)^2 \leq x^2 \leq (l_1 + l_2)^2$$

Poiché $l_1 > l_2$, ^{per $x > 0$} ciò vale se e solo se

$$x \in (l_1 - l_2, l_1 + l_2)$$



(3)

- Si consideri il manipolatore planare a 3 gradi di libertà in figura. Calcolare la cinematica diretta e inverse senza utilizzare Denavit-Hartenberg.

Soluzione

Cinematica diretta $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \rightarrow (x_t, y_t, \alpha_t)$

$$\begin{cases} x_t = (l_1 + d_2) \cos \theta_1 + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_3) \\ y_t = (l_1 + d_2) \sin \theta_1 + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_3) \\ \alpha_t = \theta_1 + \theta_3 \end{cases}$$

Cinematica inversa $(x_t, y_t, \alpha_t) \rightarrow (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

$$\begin{cases} x_w = x_t - l_3 \cos \alpha_t \\ y_w = y_t - l_3 \sin \alpha_t \end{cases}$$

Ma:

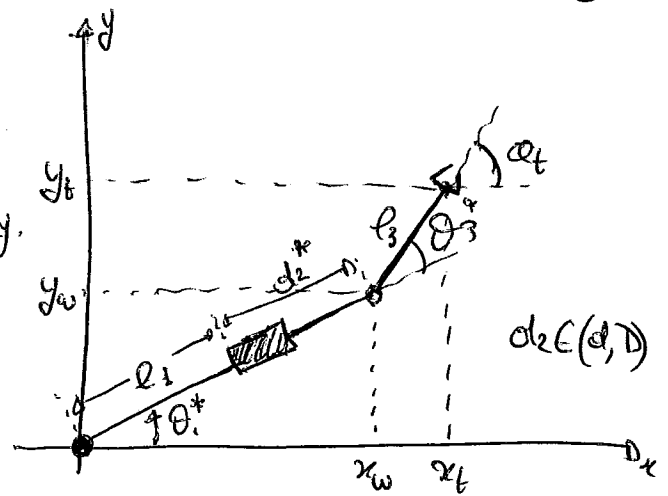
$$\begin{cases} x_w = (l_1 + d_2) \cos \theta_1 \\ y_w = (l_1 + d_2) \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \arctan^2(y_w, x_w) = \arctan^2(y_t - l_3 \sin \alpha_t, x_t - l_3 \cos \alpha_t)$$

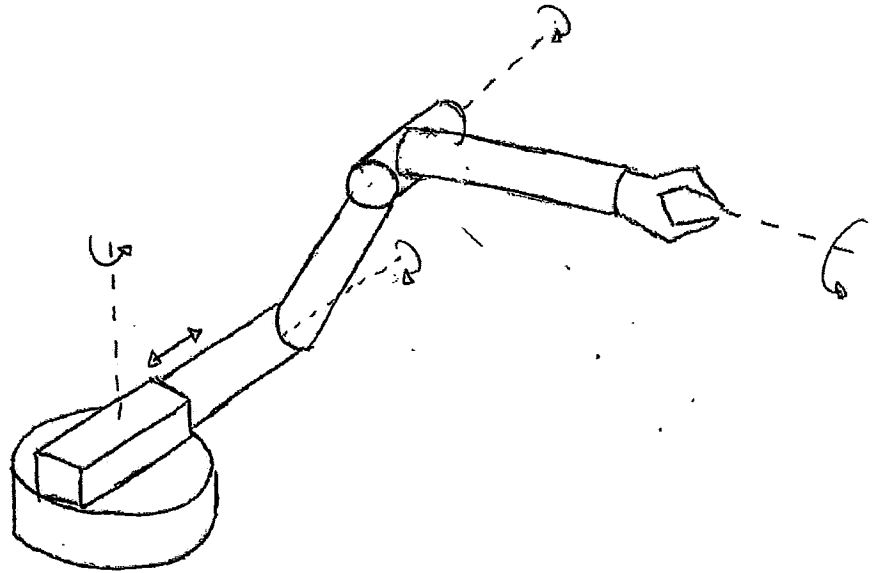
$$\Rightarrow d_2 = \sqrt{x_w^2 + y_w^2} - l_1 = \sqrt{(x_t - l_3 \cos \alpha_t)^2 + (y_t - l_3 \sin \alpha_t)^2} - l_1$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \alpha_t - \theta_1$$

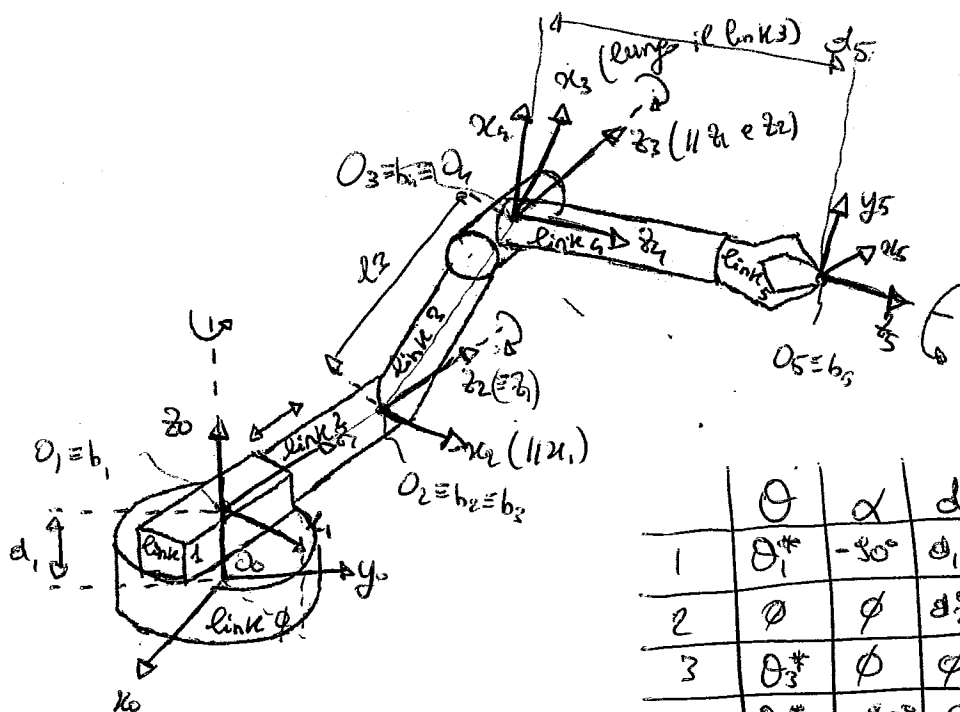
Ha soluzione se $\overset{\text{e solto}}{d_2} \in (d, D)$, cioè è compreso tra escursione minima e massima del giunto prismatica.



- Applicar Denavit-Hartenberg determinando le matrici T_{i-1}^i , per $i=1,2,\dots,5$ per il seguente manipolatore, indicando come n determinare la trasformazione cinematica diretta. ④



Solution Individuiamo i sistemi di riferimento e costruiamo la tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg:



	θ	α	d	a
1	θ_1^*	-90°	d_1	ϕ
2	ϕ	ϕ	d_2^*	ϕ
3	θ_3^*	ϕ	ϕ	l_3
4	θ_4^*	-90°	ϕ	ϕ
5	θ_5^*	ϕ	d_5	ϕ

Vedere immagine a colori dopo pag. ⑤

Le matrici sono allora:

(5)

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_3 c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & l_3 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

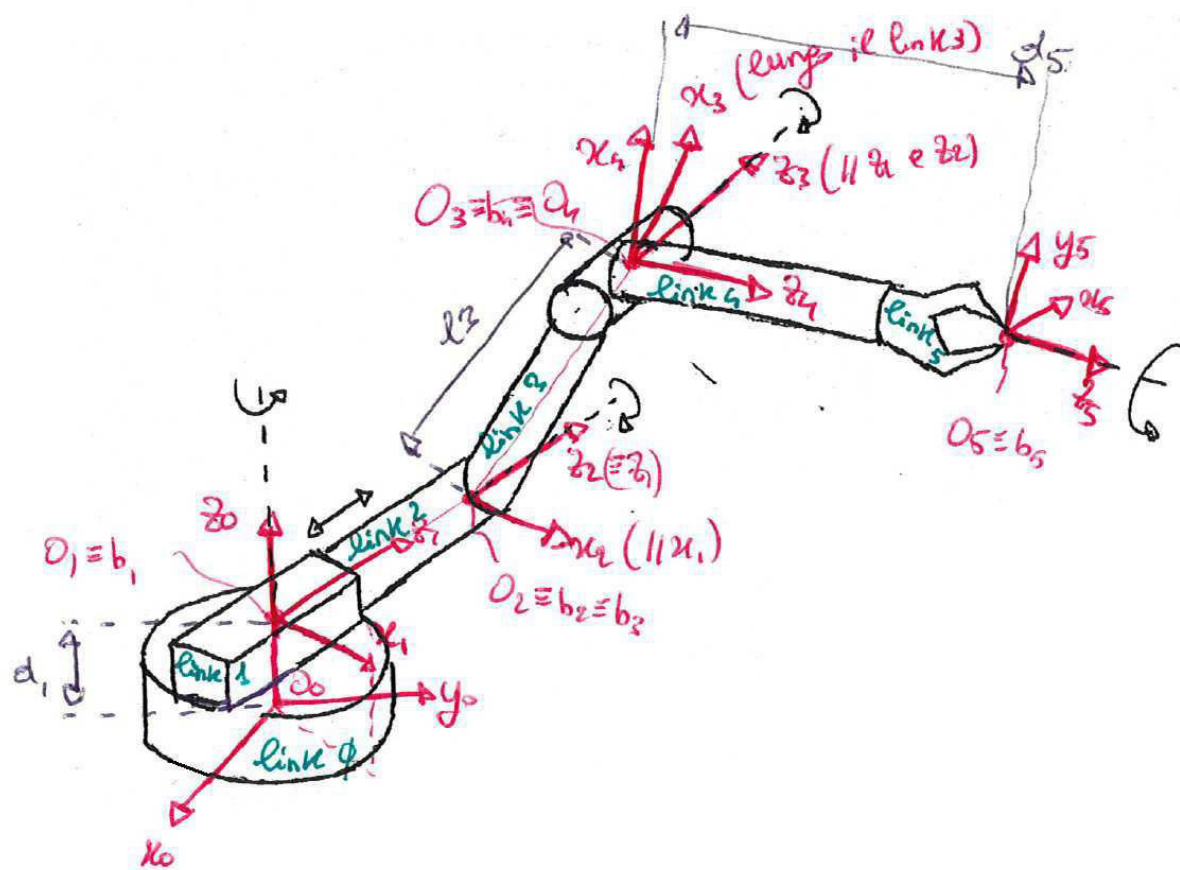
$$T_3^4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice complessiva della cinematica diretta è:

$$T_0^5 = \begin{bmatrix} R^5 & P^5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_0^1 \cdot T_1^2 \cdot T_2^3 \cdot T_3^4 \cdot T_4^5$$

dove P^5 è la posizione di C_5 rispetto alla base e R^5 ha per colonne le componenti di $\vec{e}_{x5}$, $\vec{e}_{y5}$, $\vec{e}_{z5}$ rispetto alla base



• Robot antropomorfo : cinematica inversa

⑥

Calcolare $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$ tali che la pinta sia nel punto

$\vec{p}_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 \\ 26 \\ 37 \end{bmatrix}$ e l'orientamento della pinta stessa, espresso mediante gli angoli di Eulero Roll, Pitch, Yaw sia

$(\phi, \theta, \psi) = (-90^\circ, 0^\circ, 180^\circ)$ - Disegnare quindi il robot visto da profilo in tale *Configuration*.

I parametri del robot sono: $d_1 = 30 \text{ cm}$, $l_1 = 10 \text{ cm}$, $l_2 = 60 \text{ cm}$, $d_4 = 60 \text{ cm}$, $d_6 = 10 \text{ cm}$.

Soluzione

La matrice R associata agli angoli di Eulero RPY indicati è:

$$R_e = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \end{bmatrix} = R_{RPY} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ma la pinta punta verso il basso!

Coordinate pinto: $\vec{p}_w = \vec{p}_e - d_1 \vec{a}_e = \begin{bmatrix} 98 \\ 26 \\ 37 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 \\ 26 \\ 47 \end{bmatrix}$

$\theta_1 = \text{atan2}(p_{wy}, p_{wx}) = \text{atan2}(26, 98) = \underline{14.86^\circ}$

$A_1 = p_{wx} c_1 + p_{wy} s_1 - l_1 = 91.39$

$A_2 = d_1 - p_{wz} = -17 = 0.2 \text{ (10.21 < 1: OK)}$

$\theta_3 = \arcsin \left(\frac{A_1^2 + A_2^2 - d_4^2 - l_2^2}{2 l_2 d_4} \right) = \underline{11.55^\circ}$ [altra soluzione possibile: $\theta_3 = 168.5^\circ$]

$\theta_2 = \text{atan2}(d_4 c_3 A_1 - (d_4 s_3 + l_2) A_2, (d_4 s_3 + l_2) A_1 + d_4 c_3 A_2) = \underline{49.76^\circ}$

$R_6 = (R_0^3)^T R_e$

Con $R_0^3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & c_1 s_{23} \\ s_1 c_{23} & -c_1 & s_1 s_{23} \\ s_{23} & 0 & -c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.26 & 0.85 \\ 0.12 & -0.97 & 0.23 \\ 0.88 & 0 & -0.48 \end{bmatrix}$

Pertanto $R_3^6 = (R_0^3)^T R_6 = \begin{bmatrix} -0.12 & -0.46 & -0.88 \\ 0.97 & -0.26 & 0 \\ -0.23 & -0.85 & 0.48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix} \quad (7)$

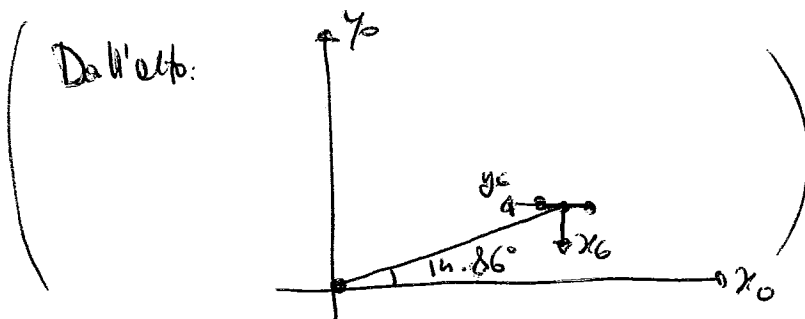
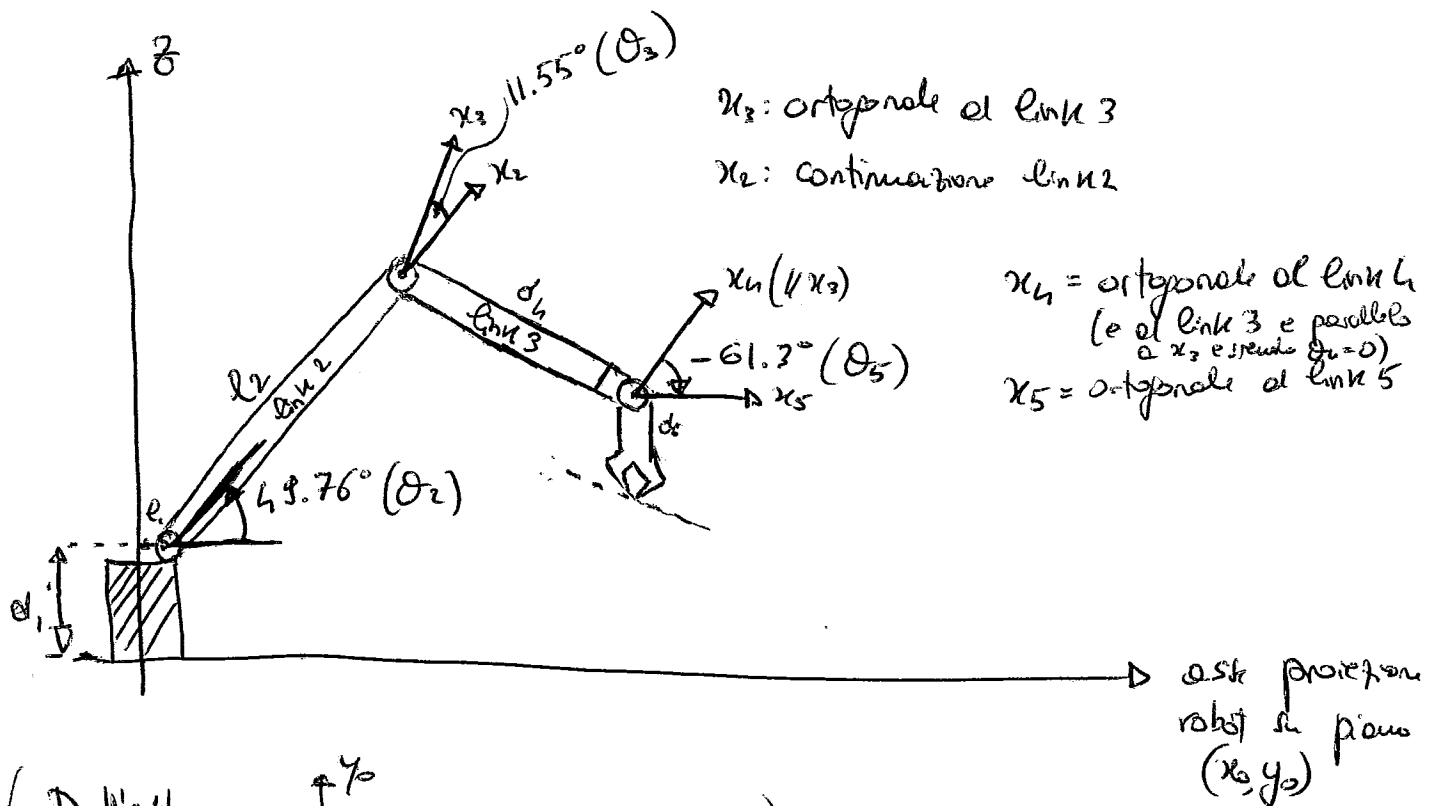
Scegliendo il gruppo (8)-(10) di formule nella sezione del robot antropomorfo:

$$\theta_4 = \text{atan2}(-a_y^3, -a_x^3) = \text{atan2}(0, 0.88) = \underline{0^\circ}$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3) = \text{atan2}(-0.88, 0.48) = \underline{-61.3^\circ}$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(-s_z^3, n_z^3) = \text{atan2}(0.85, -0.23) = \underline{106.86^\circ}$$

Visto di profilo il robot appare più o meno così:



N.B. $\theta_2 + (\theta_3 - 90^\circ) + \theta_5 = -90^\circ$