

# Il problema cinematico nel caso di un manipolatore planare

## 1 Il problema cinematico per un manipolatore planare a due gradi di libertà

In questo esempio si vedrà come determinare il legame analitico tra le coordinate di giunto e le coordinate di lavoro per un robot planare a due gradi di libertà (si veda la Fig. 1), giungendo all'introduzione del concetto di trasformazione **cinematica diretta** e di trasformazione **cinematica inversa**.

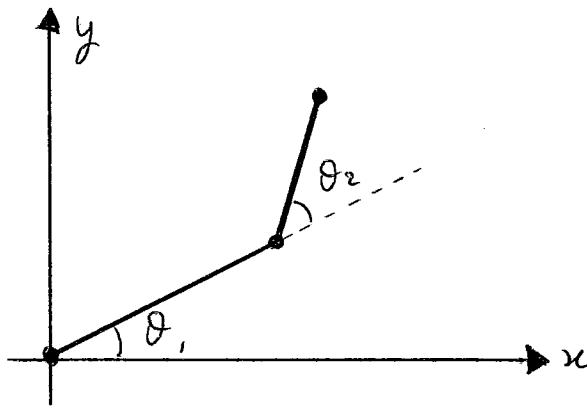


Figure 1: Un robot planare a due link

Il robot è realizzato con due giunti rotazionali, il primo segmento (o link) è compreso tra i giunti 1 e 2 ed ha lunghezza  $l_1$ , il secondo segmento è compreso tra il giunto 2 ed il punto terminale ed ha lunghezza  $l_2$ .

### 1.1 La trasformazione cinematica diretta di un robot planare

La trasformazione cinematica diretta corrisponde a passare dalle coordinate di giunto  $\theta_1$  e  $\theta_2$  a quelle nello spazio di lavoro dell'organo terminale  $(x_t, y_t)$ .

Da semplici considerazioni geometriche è facile vedere che l'angolo tra il secondo segmento e l'asse  $x$  è pari a  $\theta_1 + \theta_2$ . Ne segue che le coordinate  $x_t$  e  $y_t$  del punto terminale, in funzione degli angoli di giunto  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , sono espresse da:

$$x_t = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad (1)$$

$$y_t = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad (2)$$

Le due relazioni precedenti possono essere riscritte in modo compatto come:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = h(\theta_1, \theta_2), \quad (3)$$

con la funzione vettoriale  $h$  definita da:

$$h(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

La funzione  $h$  appena introdotta prende il nome di *trasformazione cinematica diretta*, e mette in relazione i valori delle coordinate di giunto di un robot con le coordinate del punto terminale, rispetto ad un opportuno sistema di riferimento<sup>1</sup>. In altre parole, la trasformazione cinematica diretta consente di passare dalla caratterizzazione della configurazione del robot in termini delle coordinate nello spazio dei giunti alla caratterizzazione della configurazione dell'organo terminale del robot in termini delle coordinate nello spazio di lavoro. La trasformazione cinematica diretta è unica, e può essere determinata in modo semplice, anche se spesso laborioso, per un qualunque robot. Nel corso verrà presentata una procedura sistematica per calcolare tale trasformazione, e verranno dati alcuni esempi.

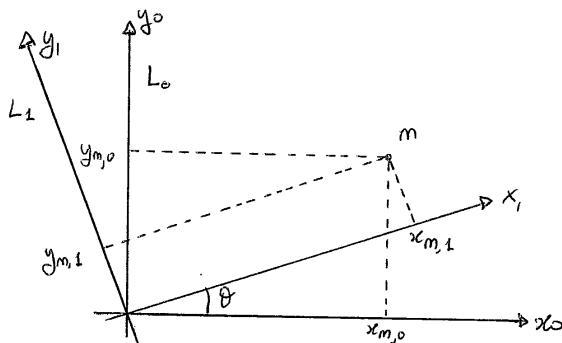


Figure 2: Rotazione di due sistemi di riferimento

È opportuno premettere alla presentazione di tale procedura alcuni concetti di base sulle trasformazioni di coordinate tramite matrici di rotazione e di traslazione. A tal fine, si consideri la situazione illustrata in Fig. 2, in cui i due sistemi di riferimento  $L_0$  ed  $L_1$  hanno l'origine coincidente e sono ruotati di un angolo pari a  $\theta$ , misurato in senso antiorario nel verso che porta l'asse  $x$  di  $L_0$  sullo stesso asse di  $L_1$ . Le coordinate di un punto  $m$  rispetto al sistema di riferimento  $L_1$  siano  $(x_{m,1}, y_{m,1})$ , e le coordinate dello stesso punto rispetto al riferimento  $L_0$  siano date da  $(x_{m,0}, y_{m,0})$ .

Se indichiamo con  $\mathbf{e}_{x_0}$  ed  $\mathbf{e}_{y_0}$  i versori della base di  $L_0$  (riportati in grassetto per indicare che sono vettori) e con  $\mathbf{e}_{x_1}$  ed  $\mathbf{e}_{y_1}$  i versori della base di  $L_1$ , il vettore  $\mathbf{m}$  che collega l'origine dei due sistemi al punto  $m$ , può quindi essere scritto rispetto a  $L_0$  nel seguente modo:

$$\mathbf{m} = x_{m,0}\mathbf{e}_{x_0} + y_{m,0}\mathbf{e}_{y_0} \quad (5)$$

e rispetto a  $L_1$ :

$$\mathbf{m} = x_{m,1}\mathbf{e}_{x_1} + y_{m,1}\mathbf{e}_{y_1} \quad (6)$$

Esprimiamo ora i versori di  $L_1$  rispetto alla base di  $L_0$ . Da semplici considerazioni geometriche (vedasi Fig. 2) si ricava:

$$\mathbf{e}_{x_1} = \cos(\theta)\mathbf{e}_{x_0} + \sin(\theta)\mathbf{e}_{y_0} \quad (7)$$

$$\mathbf{e}_{y_1} = -\sin(\theta)\mathbf{e}_{x_0} + \cos(\theta)\mathbf{e}_{y_0} \quad (8)$$

Sostituendo le precedenti in (6), si ottiene

$$\mathbf{m} = [x_{m,1}\cos(\theta) - y_{m,1}\sin(\theta)] \mathbf{e}_{x_0} + [x_{m,1}\sin(\theta) + y_{m,1}\cos(\theta)] \mathbf{e}_{y_0} \quad (9)$$

la quale, confrontata con (5), permette di dedurre la relazione che sussiste tra le coordinate dello stesso punto nei due sistemi di riferimento:

$$x_{m,0} = x_{m,1}\cos(\theta) - y_{m,1}\sin(\theta), \quad (10)$$

$$y_{m,0} = x_{m,1}\sin(\theta) + y_{m,1}\cos(\theta). \quad (11)$$

<sup>1</sup>La trasformazione cinematica diretta comprende in realtà anche l'orientamento dell'organo terminale (non disegnato in figura). In questo caso tale orientamento coincide con l'angolo  $\theta_1 + \theta_2$  e, fissata la posizione desiderata dell'organo terminale, non può essere scelto ad arbitrio (occorrerebbero almeno tre gradi di libertà per poter posizionare l'organo terminale in un qualsiasi punto con qualsiasi orientamento)

Riscrivendo le ultime due equazioni in forma matriciale si ha:

$$\begin{pmatrix} x_{m,0} \\ y_{m,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m,1} \\ y_{m,1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

La matrice:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (13)$$

consente quindi di trasformare le coordinate di un punto  $m$  rispetto ad un sistema di riferimento nelle coordinate dello stesso punto in un secondo sistema di riferimento ruotato rispetto al precedente di un angolo  $\theta$ : la matrice  $R(\theta)$  è la matrice che descrive tale rotazione.

È interessante notare come le colonne di tale matrice siano proprio le coordinate dei due versori della base ruotata  $L_1$  ( $\mathbf{e}_{x_1}$  e  $\mathbf{e}_{y_1}$ ) rispetto alla base  $L_0$ . Questo fornisce anche un metodo per costruire la matrice di cambiamento di coordinate.

La precedente trasformazione può essere vista anche secondo un'altra interessante interpretazione (molto utile per quello che si vedrà nel seguito del corso):  $L_0$  può essere considerato un sistema di riferimento fisso mentre  $L_1$ , solidale col punto  $m$ , si può muovere rispetto a  $L_0$ . Inizialmente i due sistemi coincidono e così anche le coordinate di  $m$  nei due sistemi. Quando ruoto  $L_1$  (e con esso  $m$ ) rispetto a  $L_0$  come in Fig. 2, le coordinate di  $m$  rispetto a  $L_1$  rimangono ovviamente le stesse, mentre quelle rispetto a  $L_0$  sono espresse dalle (12).

Si noti infine come moltiplicando  $R$  per la sua trasposta si ottenga la matrice identità, cioè:  $R \cdot R^T = R^T \cdot R = I$  (dove con l'apice  $T$  si è indicata l'operazione di trasposizione della matrice  $R$ ). Questo significa che l'inversa di  $R$  (che rappresenta anche la matrice di cambiamento di coordinate da  $L_0$  a  $L_1$ ) coincide con la sua trasposta. Questa è una proprietà generale delle matrici di rotazione che sono quindi matrici *ortogonali*. Si usa anche dire che sono *matrici ortogonali speciali* in quanto hanno l'ulteriore proprietà di avere un determinante pari ad 1 (mentre in generale una matrice ortogonale ha determinante pari a  $\pm 1$ , e questo perché  $1 = \det(I) = \det(R \cdot R^T) = \det(R) \cdot \det(R^T) = [\det(R)]^2$ , con  $I$  la matrice identità). Il motivo per cui nel presente caso il determinante è  $+1$  discende direttamente dal fatto che le colonne di  $R$  sono costituite dalle coordinate dei vettori di una base ortonormale con assi  $x$  e  $y$  orientati nel verso positivo nel primo quadrante rispetto a una base fatta nello stesso modo. Calcolando gli autovalori di  $R$  si trova:

$$\lambda_{1,2} = \cos(\theta) \pm \sqrt{\cos^2(\theta) - 1}$$

Se  $\theta = 0$  (e quindi  $R$  coincide con l'identità),  $\lambda_{1,2} = 1$  (con molteplicità 2). Questo ha l'interessante interpretazione geometrica secondo cui, se ruoto un vettore di 0 gradi, ottengo lo stesso vettore moltiplicato per 1 (cioè  $R(0) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ ), che coincide col fatto che  $R(0)$  ha autovalore 1 e un autospazio di dimensione 2, ossia tutto il piano. Se  $\theta = \pi$ ,  $\lambda_{1,2} = -1$  (con molteplicità 2). Questo ha l'interessante interpretazione geometrica secondo cui, se ruoto un vettore di 180 gradi, ottengo lo stesso vettore moltiplicato per  $-1$  (cioè  $R(\pi) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ ), che coincide col fatto che  $R(\pi)$  ha autovalore  $-1$  e un autospazio di dimensione 2, ossia tutto il piano. Se  $\theta \neq 0$  e  $\theta \neq \pi$ , si ha:

$$\lambda_{1,2} = \cos(\theta) \pm j \sin(\theta)$$

dove  $j$  è l'unità immaginaria ( $j^2 = -1$ ). Si noti come tali autovalori sono numeri complessi con modulo unitario (come accade per tutti gli autovalori di una matrice ortogonale: tale proprietà vale infatti anche nei casi precedenti in cui gli autovalori erano  $\pm 1$ ). Il motivo per cui sono complessi dipende dal fatto che se  $\theta \neq 0$  e  $\theta \neq \pi$ , non esiste nessuna costante reale  $c$  e nessun vettore  $\mathbf{v}$  tali che  $R(\theta) \cdot \mathbf{v} = c\mathbf{v}$  (avendo ruotato un qualsiasi vettore di un certo angolo  $\theta$  diverso da 0 e da  $\pi$ , non otterrò mai lo stesso vettore moltiplicato per una costante).

Tutte le proprietà appena viste sulle matrici di rotazione verranno richiamate e approfondite più avanti in un contesto più generale che è quello dello spazio tridimensionale  $\mathfrak{R}^3$ .

Si consideri ora il caso in cui i due sistemi di riferimento siano anche traslati di una distanza  $l$  lungo  $x_1$ , come illustrato nella Fig. 3. Tenendo conto delle (10) e (11) è facile vedere che le relazioni tra le coordinate del punto  $m$  nei due sistemi di riferimento sono date da:

$$x_{m,0} = x_{m,1} \cos(\theta) - y_{m,1} \sin(\theta) + l \cos(\theta), \quad (14)$$

$$y_{m,0} = x_{m,1} \sin(\theta) + y_{m,1} \cos(\theta) + l \sin(\theta). \quad (15)$$

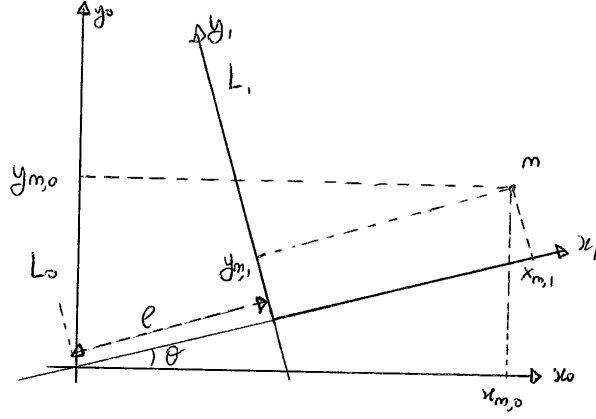


Figure 3: Rotazione e traslazione di due sistemi di riferimento

Per riscrivere le precedenti in forma matriciale (tramite matrici quadrate) è bene introdurre, nello specificare le coordinate di un punto, una terza coordinata ausiliaria, il cui valore è sempre uno, e che ha lo scopo di tenere in conto anche gli effetti legati alla traslazione tra i due sistemi di riferimento. Con tale variabile ausiliaria, le equazioni (14), (15) possono essere riscritte come:

$$\begin{pmatrix} x_{m,0} \\ y_{m,0} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \ell \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & \ell \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m,1} \\ y_{m,1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

La matrice:

$$T(\theta, \ell) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \ell \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & \ell \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

esprime in modo completo il legame che sussiste tra due sistemi di riferimento nel piano ottenuti secondo il procedimento di Fig. 3 (in cui  $L_1$  viene prima ruotato di un angolo  $\theta$  rispetto a  $L_0$  e quindi traslato di  $\ell$  lungo l'asse  $x$  di  $L_1$ ). Questo tipo di trasformazione è quello che lega i sistemi di riferimento che assoceremo nel seguito al manipolatore. Se considero una roto-traslazione generale in cui il sistema  $L_1$  è ruotato rispetto a  $L_0$  di un angolo  $\theta$  e l'origine di  $L_1$  ha coordinate  $[\ell_x; \ell_y]$  in  $L_0$ , è facile dimostrare che la matrice di cambiamento di coordinate ha la seguente espressione:

$$T(\theta, \ell_x, \ell_y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \ell_x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & \ell_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

Si noti l'ultima riga delle matrici  $T$  appena calcolate, composta di tutti zeri, salvo l'ultimo elemento unitario, che è utilizzata per tener conto della variabile ausiliaria introdotta nelle coordinate di posizione.

La matrice  $T(\theta, \ell)$  prima introdotta può essere scomposta in due blocchi significativi, secondo lo schema seguente:

$$T(\theta, \ell) = \begin{pmatrix} R(\theta) & p(\theta, \ell) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

in cui la matrice  $R(\theta)$  è quella introdotta nella (13), e descrive la rotazione dei due sistemi di riferimento, ed il vettore  $p(\theta, \ell)$ , dato da:

$$p(\theta, \ell) = \begin{pmatrix} \ell \cos(\theta) \\ \ell \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

esprime la traslazione delle due origini; in particolare, si noti che la prima componente del vettore  $p(\theta, \ell)$  indica la traslazione lungo l'asse  $x$  del riferimento  $L_0$ , e la seconda componente indica la traslazione lungo l'asse  $y$  dello stesso riferimento. È immediato constatare che il vettore  $p(\theta, \ell)$  indica la posizione dell'origine del sistema di riferimento  $L_1$  rispetto al riferimento  $L_0$ . Lo stesso discorso si applica nel caso della matrice  $T(\theta, \ell_x, \ell_y)$  della rototraslazione generale calcolata in (18).

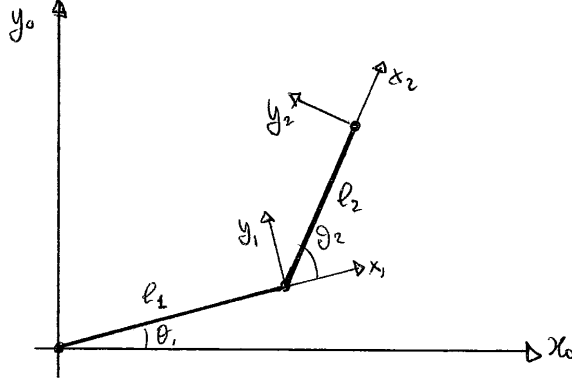


Figure 4: Un robot planare ed i sistemi di riferimento

Quanto visto relativamente al caso di due generici sistemi di riferimento può essere esteso al caso di un robot a due gradi di libertà, come quello in Fig. 1.

In questo caso la posizione del punto terminale è data da (si vedano le equazioni (1) e (2)):

$$x_t = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (21)$$

$$y_t = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad (22)$$

Ad ogni link del robot si può associare un sistema di riferimento, con origine nel punto terminale del link stesso ed asse  $x$  allineato con il segmento (si veda la Fig. 4). Questa scelta particolare dei sistemi di riferimento permette di utilizzare come matrice di cambiamento di coordinate tra sistemi di riferimento di link successivi la  $T(\theta, \ell)$  riportata in (17) anziché la forma generale (18). Questo ha il vantaggio che bastano due parametri ( $\theta$  ed  $\ell$ ) per descrivere il cambiamento di coordinate anziché i tre che sarebbero necessari per individuare univocamente posizione e orientamento di un corpo rigido nel piano (vedremo come nel caso tridimensionale ne basteranno 4 invece dei 6 necessari per esprimere una rototraslazione generica nello spazio).

In base alla (17), i riferimenti  $L_2$  ed  $L_1$  sono legati tra loro dalla matrice di trasformazione:

$$T_1^2(\theta_2, \ell_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & \ell_2 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & \ell_2 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

mentre i riferimenti  $L_1$  ed  $L_0$ , sempre in base alla (17), sono legati tra loro dalla matrice di trasformazione:

$$T_0^1(\theta_1, \ell_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & \ell_1 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & \ell_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

In base alla definizione di matrice di trasformazione, e tenendo conto delle equazioni (16) e (17), si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = T_1^2(\theta_2, \ell_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

avendo indicato con  $(x_2, y_2)$  le coordinate di un punto rispetto al sistema di riferimento  $L_2$ , e con  $(x_1, y_1)$  le coordinate dello stesso punto rispetto al sistema di riferimento  $L_1$ ; in modo simile si ottiene:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_0^1(\theta_1, \ell_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

avendo indicato con  $(x_0, y_0)$  le coordinate dello stesso punto rispetto al sistema di riferimento  $L_0$ . Combinando le due equazioni precedenti si ottiene:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_0^1(\theta_1, \ell_1) T_1^2(\theta_2, \ell_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

che fornisce la trasformazione dal sistema di riferimento  $L_2$  al sistema di riferimento  $L_0$ , e che verrà indicata in modo breve con  $T_0^2$ . Tale matrice è data da:

$$T_0^2 = T_0^1 T_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & \ell_1 \sin(\theta_1) + \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

in cui si è fatto uso delle relazioni trigonometriche:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta). \quad (29)$$

Confrontando l'espressione di  $T_0^2$  con quella generale riportata in (18), si deduce facilmente il significato dei vari elementi ottenuti. In particolare, è immediato verificare che l'ultima colonna della matrice  $T_0^2$  (che rappresenta l'origine del secondo sistema di riferimento rispetto a  $L_0$ ) è proprio il vettore della posizione del punto terminale del robot dato dalle equazioni (21)-(22) e calcolato sulla base di considerazioni geometriche. Notare anche come il blocco  $2 \times 2$  che compare in  $T_0^2$  nella (28), che rappresenta la matrice di rotazione  $R_0^2$  tra il sistema di riferimento solidale con la base  $L_0$  e quello solidale con l'organo terminale  $L_2$ , ha la forma di una matrice di rotazione (confrontare con la (13)) ed ha come argomento di seno e coseno l'angolo  $\theta_1 + \theta_2$ , che infatti rappresenta proprio l'orientamento dell'organo terminale rispetto alla base.

## 1.2 La trasformazione cinematica inversa di un robot planare

Nella precedente sezione si è visto come determinare la configurazione della mano di un robot sulla base della conoscenza delle variabili di giunto, e cioè come calcolare la trasformazione cinematica diretta. In questa sezione si vedrà come risolvere il problema inverso, la cui soluzione prende infatti il nome di **trasformazione cinematica inversa**, che consente di calcolare le variabili di giunto corrispondenti ad una data configurazione della mano. In altre parole, la trasformazione cinematica inversa consente di trasformare la descrizione di un compito data in termini delle coordinate di lavoro, nella descrizione dello stesso compito nelle coordinate di giunto. Infatti, poichè il moto del robot è prodotto da azionamenti ai giunti, il controllo di tale moto va necessariamente realizzato in termini di variabili di giunto.

La trasformazione cinematica diretta di un robot planare a due gradi di libertà, calcolata nella sezione precedente (equazioni (1), (2)), è data da:

$$x = \ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad (30)$$

$$y = \ell_1 \sin(\theta_1) + \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad (31)$$

Si tratta ora di risolvere le due precedenti equazioni rispetto alle incognite  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

Per determinare  $\theta_2$  si può procedere sommando tra loro il quadrato del primo e secondo membro delle (30) e (31), ottenendo

$$x^2 + y^2 = \ell_1^2 \cos^2(\theta_1) + \ell_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_2) + \ell_1^2 \sin^2(\theta_1) + \ell_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + 2\ell_1 \ell_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad (32)$$

Tenendo conto della relazione trigonometrica  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ , ed applicando la prima delle (29) (con  $\alpha = -\theta_1, \beta = \theta_1 + \theta_2$ , e ricordando che  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ ), si ha:

$$x^2 + y^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\theta_2), \quad (33)$$

da cui si ricava:

$$\cos(\theta_2) = \frac{x^2 + y^2 - \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1 \ell_2}, \quad (34)$$

e quindi:

$$\theta_2 = \pm \arccos \frac{x^2 + y^2 - \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1 \ell_2}. \quad (35)$$

Si noti che  $\theta_2$  può essere determinato a meno del segno, e questo per la ben nota proprietà di parità della funzione coseno, e cioè  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ . La libertà nella scelta del segno dell'angolo  $\theta_2$  corrisponde al fatto che, per un dato punto terminale, vi sono due diverse configurazioni del robot nello spazio dei giunti (si veda la Fig. 5): quella con gomito "alto", corrispondente ad un angolo  $\theta_2$  negativo, e quella con gomito "basso", corrispondente ad un angolo  $\theta_2$  positivo.

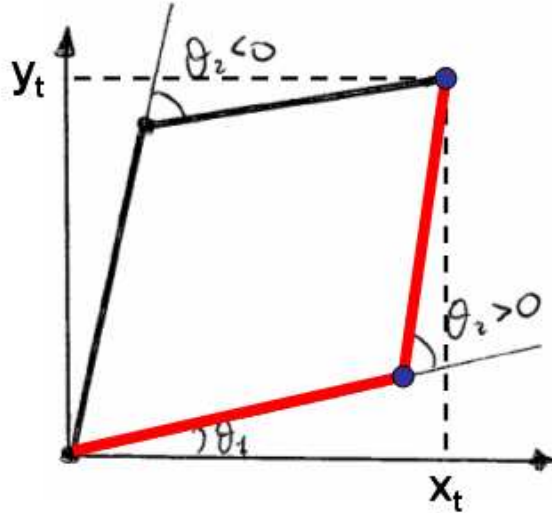


Figure 5: Un robot planare a due link: in rosso la configurazione *gomito basso*, in nero la configurazione *gomito alto*. Entrambe le configurazioni portano l'organo terminale nello stesso punto  $(x_t, y_t)$ .

Da notare anche che l'equazione (35) ammette soluzione se e solo se l'argomento dell'arcocoseno in modulo è minore o uguale a uno, cioè se e solo se  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq l_1 + l_2$  e  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq |l_1 - l_2|$ . La prima condizione risulta soddisfatta quando il punto desiderato non è troppo lontano dal robot (la distanza  $\sqrt{x^2 + y^2}$  infatti del punto che si vuole raggiungere con l'organo terminale non può superare l'estensione massima  $l_1 + l_2$  del braccio completamente disteso). La seconda condizione (che se si assume  $l_1 > l_2$  si scrive  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq l_1 - l_2$ ) risulta soddisfatta quanto il punto desiderato non risulta all'interno del cerchio di raggio  $l_1 - l_2$  che in effetti rappresenta una zona dove il robot, anche col secondo giunto ripiegato a 180 gradi, non può arrivare. L'insieme di tutti i punti  $(x, y)$  per cui la (35) ammette soluzione, rappresenta lo spazio di lavoro  $\mathcal{W}$  del robot ed è in questo caso costituito da una corona circolare centrata nell'origine, con raggio interno  $l_1 - l_2$  e raggio esterno  $l_1 + l_2$ .

La non unicità della soluzione e la sua non esistenza in alcuni casi è un aspetto tipico della cinematica inversa: mentre nel caso diretto la soluzione esiste sempre ed è unica, nel caso inverso esistenza ed unicità non sono sempre garantite. Inoltre la procedura per determinare la trasformazione cinematica inversa è generalmente più complessa rispetto a quella diretta (come risulta anche evidente dal presente esempio).

Avendo determinato l'angolo  $\theta_2$ , per completare il calcolo della trasformazione cinematica inversa si deve determinare l'angolo  $\theta_1$ . Si può procedere sviluppando i due termini  $\cos(\theta_1 + \theta_2)$  e  $\sin(\theta_1 + \theta_2)$  nelle (30) e (31), rispettivamente, utilizzando le (29) ed introducendo la notazione compatta  $C_1 = \cos(\theta_1)$ ,  $S_1 = \sin(\theta_1)$ ,  $C_2 = \cos(\theta_2)$ ,  $S_2 = \sin(\theta_2)$ :

$$x = l_1 C_1 + l_2 C_1 C_2 - l_2 S_1 S_2, \quad (36)$$

$$y = l_1 S_1 + l_2 S_1 C_2 + l_2 C_1 S_2. \quad (37)$$

Raccogliendo i fattori comuni rispetto a  $C_1$  e  $S_1$ , si ottiene il seguente sistema lineare in due equazioni e nelle due incognite  $C_1$  e  $S_1$ :

$$x = (l_1 + l_2 C_2) C_1 - l_2 S_2 S_1, \quad (38)$$

$$y = l_2 S_2 C_1 + (l_1 + l_2 C_2) S_1, \quad (39)$$

la cui soluzione è data da:

$$S_1 = \frac{-l_2 S_2 x + (l_1 + l_2 C_2) y}{(l_2 S_2)^2 + (l_1 + l_2 C_2)^2} \quad (40)$$

$$C_1 = \frac{(l_1 + l_2 C_2) x + l_2 S_2 y}{(l_2 S_2)^2 + (l_1 + l_2 C_2)^2}. \quad (41)$$

Si noti che il sistema di due equazioni lineari in due incognite (38), (39) ammette una ed una sola soluzione se e solo se vale la condizione  $(\ell_2 S_2)^2 + (\ell_1 + \ell_2 C_2)^2 \neq 0$ , e cioè se e solo se

$$\ell_1^2 + \ell_2^2 + 2\ell_1\ell_2\cos(\theta_2) \neq 0. \quad (42)$$

È facile vedere che, se  $\ell_1 \neq \ell_2$ , la condizione (42) vale sempre, viceversa, se  $\ell_1 = \ell_2$ , la condizione vale per tutti i valori  $\theta_2$  tali che  $\cos(\theta_2) \neq -1$ , cioè per tutti i valori  $\theta_2 \neq \pm\pi$ . Del resto, se  $\ell_1 = \ell_2$  ed inoltre  $\theta_2 = \pi$ , la posizione desiderata per il punto terminale del robot è l'origine del sistema di riferimento, ed a tal fine il valore dell'angolo  $\theta_1$  è ininfluente.

Avendo a disposizione sia il coseno che il seno dell'angolo  $\theta_1$  (e notando che i due termini hanno denominatore uguale e positivo), si può utilizzare la funzione  $\text{atan2}$ , che restituisce l'angolo senza l'indeterminazione del segno<sup>2</sup>. La trasformazione cinematica inversa per il robot planare a due gradi di libertà è data quindi da:

$$\theta_2 = \pm \arccos \frac{x^2 + y^2 - \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1\ell_2}, \quad (43)$$

$$\theta_1 = \text{atan2} [-\ell_2 S_2 x + (\ell_1 + \ell_2 C_2)y, (\ell_1 + \ell_2 C_2)x + \ell_2 S_2 y]. \quad (44)$$

## 2 Il manipolatore planare a tre link

Come visto, un robot planare a due gradi di libertà non permette di risolvere il problema di posizionare l'organo terminale in un punto qualsiasi con un orientamento arbitrario: questo dipende dal fatto che occorrono almeno tre gradi di libertà (cioè tre variabili libere) per risolvere un problema di tre equazioni (un'equazione per ogni parametro della postura dell'organo terminale che è in effetti definita da tre coordinate, le due relative alla posizione  $(x_t, y_t)$  e quella che ne definisce l'orientamento  $\phi_t$  rispetto all'asse  $x$  del sistema di riferimento).

Si consideri allora un robot planare a tre gradi di libertà come quello riportato in Fig. 6. Il robot è

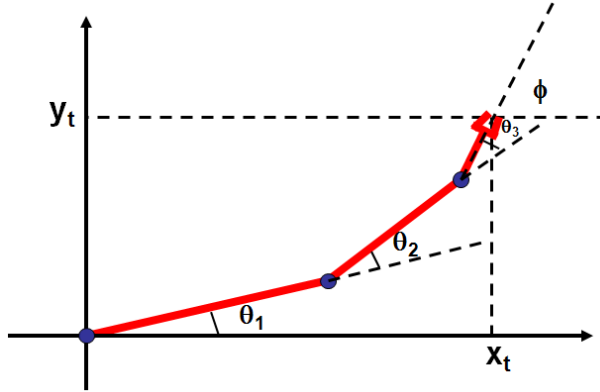


Figure 6: Un robot planare a tre link

realizzato ora con tre giunti rotazionali, il primo segmento (o link) è compreso tra i giunti 1 e 2 ed ha lunghezza  $\ell_1$ , il secondo segmento è compreso tra il giunto 2 ed il giunto 3 ed ha lunghezza  $\ell_2$  e infine il terzo è compreso tra il giunto 3 ed il punto terminale ed ha lunghezza  $\ell_3$ .

<sup>2</sup>La funzione  $\text{atan2}$  è definita per ovviare all'indeterminatezza di  $\pi$  presente nella funzione arcotangente (a causa infatti della periodicità di  $\pi$  della funzione tangente, un angolo  $\theta$  e  $\theta + \pi$  hanno la stessa tangente e la normale funzione arcotangente non è in grado di capire se si tratta di  $\theta$  o di  $\theta + \pi$ ). La funzione  $\text{atan2}$  è definita quindi come l'arcotangente ma permette di discriminare i due casi. A tal fine prende due argomenti:  $\text{atan2}(y, x)$  è l'angolo compreso tra l'asse  $x$  e la semiretta che collega l'origine al punto  $(x, y)$  e può corrispondere ad  $\text{atan}(y/x)$  oppure ad  $\text{atan}(y/x) + \pi$ . Chiaramente, in base a questa definizione,  $\text{atan2}(y, x) \equiv \text{atan2}(c \cdot y, c \cdot x)$  per ogni costante positiva  $c$



## 2.1 La trasformazione cinematica diretta di un robot planare a tre gradi di libertà

La trasformazione cinematica diretta corrisponde a passare dalle coordinate di giunto  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  a quelle nello spazio di lavoro dell'organo terminale  $(x_t, y_t, \phi_t)$ , essendo  $\phi_t$  l'orientamento dell'organo terminale rispetto all'asse  $x$ .

Da semplici considerazioni geometriche è facile vedere che l'angolo tra il secondo segmento e l'asse  $x$  è pari a  $\theta_1 + \theta_2$  e quello tra il terzo segmento e l'asse  $x$  è pari a  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ . Ne segue che le coordinate  $x_t$  e  $y_t$  del punto terminale, in funzione degli angoli di giunto  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , sono espresse da:

$$x_t = \ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \ell_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad (45)$$

$$y_t = \ell_1 \sin(\theta_1) + \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \ell_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \quad (46)$$

Per quanto riguarda l'orientamento  $\phi_t$  dell'organo terminale è immediato ricavare:

$$\phi_t = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad (47)$$

Le tre relazioni precedenti possono essere riscritte in modo compatto come:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ \phi_t \end{pmatrix} = h(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad (48)$$

con la funzione vettoriale  $h$  definita da:

$$h(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} \ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \ell_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \ell_1 \sin(\theta_1) + \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \ell_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

che costituisce quindi la *trasformazione cinematica diretta*.

## 2.2 La trasformazione cinematica inversa di un robot planare a 3 link

Per risolvere il problema cinematico inverso, e cioè trovare la trasformazione che permette di ricavare le coordinate di giunto  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  che permettono di avere l'organo terminale posizionato in un punto  $(x_t, y_t)$  con orientamento  $\phi_t$ , si ricorre a un metodo che come vedremo ha validità piuttosto generale. Tale metodo permette di disaccoppiare il problema della cinematica inversa in quello del posizionamento e in quello dell'orientamento, affidando a tutti i giunti a monte di un certo punto del manipolatore (in questo caso i primi due giunti) il problema relativo al posizionamento dell'organo terminale e a tutti i giunti a valle di tale punto (che tipicamente costituiscono un polso, in questo caso si tratta del terzo giunto) il problema relativo all'orientamento.

Si consideri pertanto il punto  $(x_3, y_3)$  costituito dalla posizione del terzo giunto (vedasi Fig. 7).

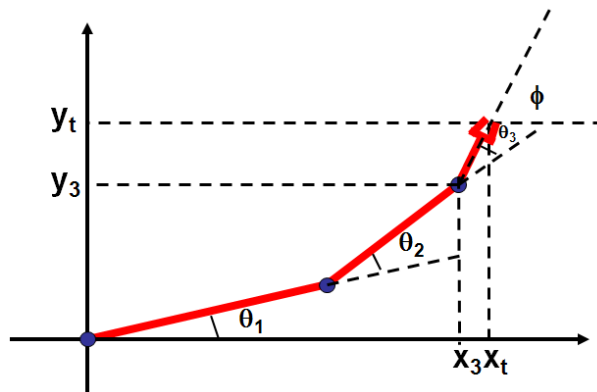


Figure 7: Un robot planare a tre link con indicate le coordinate  $(x_3, y_3)$  del terzo giunto

Assegnata quindi la postura dell'organo terminale  $(x_t, y_t, \phi_t)$ , è possibile esprimere le coordinate del terzo giunto rispetto a  $(x_t, y_t, \phi_t)$  nel seguente modo:

$$x_3 = x_t - \ell_3 \cos(\phi_t) \quad (50)$$

$$y_3 = y_t - \ell_3 \sin(\phi_t) \quad (51)$$

Queste sono in effetti le coordinate che il terzo giunto deve assumere affinché (con un'opportuna scelta di  $\theta_3$ ) il punto terminale sia nella posizione desiderata  $(x_t, y_t)$  con un orientamento  $\phi_t$ .

Il problema di scegliere  $\theta_1$  e  $\theta_2$  tali che il terzo giunto sia in una certa posizione  $(x_3, y_3)$  è già stato risolto nella sezione precedente. Sostituendo quindi le coordinate desiderate  $(x_3, y_3)$  nelle (43)-(44) si ricava:

$$\theta_2 = \pm \arccos \frac{(x_t - \ell_3 \cos(\phi_t))^2 + (y_t - \ell_3 \sin(\phi_t))^2 - \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1 \ell_2}, \quad (52)$$

$$\theta_1 = \text{atan2} [-\ell_2 S_2(x_t - \ell_3 \cos(\phi_t)) + (\ell_1 + \ell_2 C_2)(y_t - \ell_3 \sin(\phi_t)), \\ (\ell_1 + \ell_2 C_2)(x_t - \ell_3 \cos(\phi_t)) + \ell_2 S_2(y_t - \ell_3 \sin(\phi_t))]. \quad (53)$$

A questo punto, dalla (47), si ottiene immediatamente:

$$\theta_3 = \phi_t - \theta_1 - \theta_2$$

Assegnati quindi posizione e orientamento desiderati  $(x_t, y_t, \phi_t)$  dell'organo terminale, la trasformazione cinematica inversa complessivamente è data da:

$$\theta_2 = \pm \arccos \frac{(x_t - \ell_3 \cos(\phi_t))^2 + (y_t - \ell_3 \sin(\phi_t))^2 - \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1 \ell_2}, \quad (54)$$

$$\theta_1 = \text{atan2} [-\ell_2 \sin(\theta_2)(x_t - \ell_3 \cos(\phi_t)) + (\ell_1 + \ell_2 \cos(\theta_2))(y_t - \ell_3 \sin(\phi_t)), \\ (\ell_1 + \ell_2 \cos(\theta_2))(x_t - \ell_3 \cos(\phi_t)) + \ell_2 \sin(\theta_2)(y_t - \ell_3 \sin(\phi_t))] \quad (55)$$

$$\theta_3 = \phi_t - \theta_1 - \theta_2 \quad (56)$$

e valgono per essa considerazioni analoghe a quelle fatte nel caso a due gradi di libertà in relazione alla sua esistenza ed unicità.

In questo caso si può distinguere uno spazio di lavoro  $\mathcal{W}$  che comprende tutti i punti  $(x_t, y_t)$  che possono essere raggiunti dall'organo terminale con almeno un orientamento  $\phi_t$  e uno spazio di lavoro *destro*  $\mathcal{W}_D \subset \mathcal{W}$  che comprende tutti i punti  $(x_t, y_t)$  che possono essere raggiunti dall'organo terminale con tutti i possibili orientamenti  $\phi_t$ . Per dare un'idea, se assumiamo  $\ell_1 > \ell_2 + \ell_3$ , avremo  $\mathcal{W}$  costituito da una corona circolare con raggio interno  $\ell_1 - \ell_2 - \ell_3$  e raggio esterno  $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ , mentre  $\mathcal{W}_D \subset \mathcal{W}$  sarà una corona circolare con raggio interno  $\ell_1 - \ell_2 + \ell_3$  e raggio esterno  $\ell_1 + \ell_2 - \ell_3$  (risultando non vuoto se e solo se  $\ell_2 > \ell_3$ ).