Richiami di geometria e proprietà preliminari

1 Richiami su vettori e numeri complessi

1.1 Vettori

Un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ è un segmento orientato. Se è applicato nell'origine di un sistema di riferimento ortonormale con assi individuati dai versori $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, può essere scritto nel seguente modo:

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z, \tag{1}$$

dove le componenti v_x, v_y e v_z di $\vec{v}$ sono le coordinate del punto P collocato sull'estremo libero del vettore (cioè $\overline{OP} = \vec{v}$, vedasi Fig. 1).

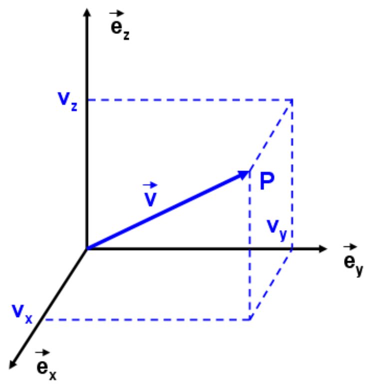

Figure 1: Un vettore dello spazio

La somma di due vettori $\vec{v} + \vec{w}$ si può ottenere come mostrato in Fig. 2 (o equivalentemente con la regola del parallelogramma). Le componenti del vettore ottenuto dalla somma di due vettori sono date dalla somma delle componenti dei due vettori: $(\vec{v}+\vec{w})_x = \vec{v}_x+\vec{w}_x$, $(\vec{v}+\vec{w})_y = \vec{v}_y+\vec{w}_y$ e $(\vec{v}+\vec{w})_z = \vec{v}_z+\vec{w}_z$.

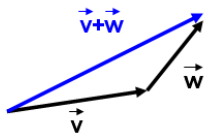

Figure 2: La somma di due vettori

La norma $\|v\|$ di un vettore $\vec{v}$ corrisponde alla lunghezza di $\vec{v}$ ed è data da $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

1.2 Numeri complessi

Un numero complesso $z \in \mathcal{C}$ è dato da $z = a + jb$, dove j è l'unità immaginaria ($j^2 = -1$) e $a, b \in \mathbb{R}$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di z (Fig. 3). Il modulo di z si indica con $|z|$ ed è la lunghezza del segmento $\overline{Oz}$. Si ha: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

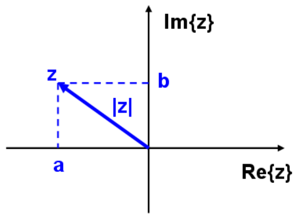

Figure 3: Il piano complesso

Dato z, il complesso coniugato z^* di z ha la stessa parte reale di z e parte immaginaria opposta: se $z = a + jb$, allora $z^* = a - jb$. È chiaro che $z \cdot z^* = a^2 + b^2 = |z|^2$, e che quindi $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$.

2 Il prodotto scalare

2.1 Definizione del prodotto scalare

Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ due vettori dello spazio euclideo. Il *prodotto scalare* è lo scalare definito da:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|cos(\theta), \tag{2}$$

dove $\|\vec{v}\|$ è la norma di $\vec{v}$ e θ è l'angolo compreso tra i due vettori (si veda la Fig. 4).

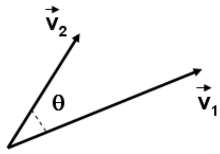

Figure 4: L'angolo θ compreso tra due vettori

2.2 Alcune proprietà del prodotto scalare

- **Ortogonalità:** Due vettori (non nulli) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono ortogonali (cioè $\theta = \pm\pi/2$) se e solo se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
- Se due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno la stessa direzione (cioè $\theta = 0$), $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$. In particolare, se $\vec{v} = \vec{w}$, si ricava $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.
- Il prodotto scalare è **commutativo:** $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ (segue banalmente dalla definizione).
- Il prodotto scalare di $\vec{v}$ per un versore $\vec{e}_u$ è la componente (o la proiezione) di $\vec{v}$ lungo $\vec{e}_u$. Pertanto si può scrivere: $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$, dove $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ costituisce una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e $v_x = \vec{v} \cdot \vec{e}_x$, $v_y = \vec{v} \cdot \vec{e}_y$ e $v_z = \vec{v} \cdot \vec{e}_z$.
- $(a\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{v} \cdot \vec{w})$ e $\vec{v} \cdot (a\vec{w}) = a(\vec{v} \cdot \vec{w})$, dove $a \in \mathbb{R}$ (segue banalmente dalla definizione).
- **Proprietà distributiva rispetto alla somma:** $\vec{v} \cdot (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{v} \cdot \vec{w_1} + \vec{v} \cdot \vec{w_2}$ e $(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot \vec{w} = \vec{v_1} \cdot \vec{w} + \vec{v_2} \cdot \vec{w}$. Questa proprietà si dimostra facilmente usando il fatto che il prodotto scalare di $\vec{v}$ per un altro vettore $\vec{w}$ costituisce la componente di $\vec{v}$ lungo $\vec{w}$ moltiplicata per la lunghezza di $\vec{w}$ (e anche la componente di $\vec{w}$ lungo $\vec{v}$ moltiplicata per la lunghezza di $\vec{v}$) e il fatto che la componente della somma di due vettori lungo un certo versore è la somma delle loro componenti (si veda la Fig. 5). Pertanto:

  $$\vec{v} \cdot (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \|\vec{v}\|\vec{e}_v \cdot (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \|\vec{v}\|(\vec{w_1} + \vec{w_2})_v = \|\vec{v}\|(\vec{w_1})_v + \|\vec{v}\|(\vec{w_2})_v = \vec{v} \cdot \vec{w_1} + \vec{v} \cdot \vec{w_2}.$$

  Sfruttando la commutatività si dimostra immediatamente anche l'altra relazione.

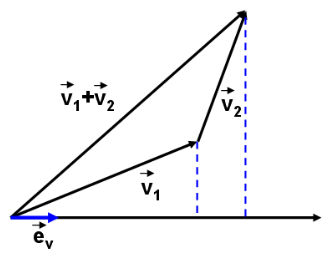

Figure 5: Componenti della somma di due vettori lungo un versore $\vec{e}_v$

Operativamente il prodotto scalare può essere calcolato sfruttando il seguente teorema.

Teorema 1 *Il prodotto scalare di due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ è dato dalla somma dei prodotti delle loro componenti:*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z.$$

Dimostrazione:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z) \cdot (w_x \vec{e}_x + w_y \vec{e}_y + w_z \vec{e}_z).$$

Applicando la proprietà distributiva rispetto alla somma ed essendo $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ (per cui $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$ e $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$), si ottiene facilmente la tesi. $\square$

Dal teorema segue immediatamente che, se $\vec{v}$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^T \vec{w}$, dove $\vec{v}^T$ è il vettore $\vec{v}$ trasposto.

3 Il prodotto vettoriale

3.1 Definizione del prodotto vettoriale

Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ due vettori dello spazio. Il *prodotto vettoriale* è il vettore definito da:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| sin\theta) \vec{e}_w, \tag{3}$$

dove $\vec{e}_w$ è il versore ortogonale al piano che contiene $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e diretto come indicato in Fig. 6 (il verso può essere ricavato in base alla cosiddetta *regola della mano destra*).

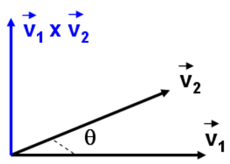

Figure 6: Il prodotto vettoriale

3.2 Alcune proprietà del prodotto vettoriale

- Il prodotto vettoriale è **anticommutativo:** $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ (segue banalmente dalla definizione).
- **Proprietà distributiva rispetto alla somma:** $\vec{v} \times (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{v} \times \vec{w_1} + \vec{v} \times \vec{w_2}$ e $(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \times \vec{w} = \vec{v_1} \times \vec{w} + \vec{v_2} \times \vec{w}$ (per la dimostrazione di questa proprietà si rimanda ai testi di geometria).

Operativamente il prodotto vettoriale può essere calcolato in base al seguente teorema.

Teorema 2 *Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è dato da:*

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\vec{e}_x + (v_z w_x - v_x w_z)\vec{e}_y + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{e}_z.$$

Dimostrazione: segue facilmente dalla proprietà distributiva e dal fatto che $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$, $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$, $\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$ e infine $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$. $\square$

Un modo semplice per calcolare il prodotto vettoriale di $\vec{v} \times \vec{w}$ è quello di ricavarlo come il determinante della seguente matrice (o della sua trasposta):

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}.$$

Un altro modo per calcolare il prodotto vettoriale si basa sulla definizione della seguente matrice antisimmetrica (cioè $S_v^T = -S_v$):

$$S_v = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Definita tale matrice, $\vec{v} \times \vec{w} = S_v \vec{w}$.

4 Rotazioni di sistemi di riferimento ortonormali (destrorsi)

Un sistema di riferimento $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ è detto **ortonormale** se i tre versori $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ ed $\vec{e}_z$ sono ortogonali tra di loro. È detto **destrorso** se inoltre $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$. Nel seguito si considereranno solo sistemi di riferimento ortonormali destrorsi.

Si considerino due sistemi di riferimento $SR = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ed $SR' = (\vec{e}_x{}', \vec{e}_y{}', \vec{e}_z{}')$ inizialmente coincidenti tra loro. Uno spostamento rigido di SR rispetto a SR' che lascia le origini dei due sistemi coincidenti è detto **rotazione**. Il nome è giustificato dal fatto che, come si vedrà nel seguito, è sempre possibile trovare un asse $\vec{r}$ e un angolo θ tali che, ruotando SR attorno a $\vec{r}$ di θ, si ottiene la trasformazione considerata. Siano $q = (x, y, z)$ e $q' = (x', y', z')$ le coordinate di un punto P in SR e SR' rispettivamente. Si ha:

$$\overline{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x'\vec{e}_x{}' + y'\vec{e}_y{}' + z'\vec{e}_z{}'.$$

Si scrivano $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ in funzione di $\vec{e}_x{}', \vec{e}_y{}', \vec{e}_z{}'$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= r_{xx}\vec{e}_x{}' + r_{xy}\vec{e}_y{}' + r_{xz}\vec{e}_z{}' \\ \vec{e}_y &= r_{yx}\vec{e}_x{}' + r_{yy}\vec{e}_y{}' + r_{yz}\vec{e}_z{}' \\ \vec{e}_z &= r_{zx}\vec{e}_x{}' + r_{zy}\vec{e}_y{}' + r_{zz}\vec{e}_z{}'. \end{aligned}$$

Si fa osservare come $r_{xx} = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x{}'$, $r_{xy} = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y{}'$, $r_{xz} = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z{}'$ e così via. In particolare si osservi che in generale $r_{xy} \neq r_{yx}$, $r_{xz} \neq r_{zx}$ e $r_{yz} \neq r_{zy}$.

Si costruisca ora la matrice

$$R = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{yx} & r_{zx} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{zy} \\ r_{xz} & r_{yz} & r_{zz} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

che ha per colonne le componenti della base di SR rispetto a SR'. Vedremo tra breve le proprietà di R. Si ha:

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\ &= x(r_{xx}\vec{e}_x{}' + r_{xy}\vec{e}_y{}' + r_{xz}\vec{e}_z{}') + y(r_{yx}\vec{e}_x{}' + r_{yy}\vec{e}_y{}' + r_{yz}\vec{e}_z{}') + z(r_{zx}\vec{e}_x{}' + r_{zy}\vec{e}_y{}' + r_{zz}\vec{e}_z{}') \\ &= (xr_{xx} + yr_{yx} + zr_{zx})\vec{e}_x{}' + (xr_{xy} + yr_{yy} + zr_{zy})\vec{e}_y{}' + (xr_{xz} + yr_{yz} + zr_{zz})\vec{e}_z{}', \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x' &= xr_{xx} + yr_{yx} + zr_{zx} \\ y' &= xr_{xy} + yr_{yy} + zr_{zy} \\ z' &= xr_{xz} + yr_{yz} + zr_{zz} \end{aligned}$$

cioè anche

$$q' = Rq.$$

4.1 Proprietà della matrice R

La matrice R è una matrice **ortogonale**, cioè è tale che $R \cdot R^T = R^T \cdot R = I$, ossia $R^T = R^{-1}$. Questo segue facilmente dal fatto che è la matrice di cambiamento di base tra due sistemi ortonormali, ed ha quindi per colonne le componenti dei versori di SR rispetto a SR', cioè $R = [\vec{e}_x|\vec{e}_y|\vec{e}_z]$. Pertanto si ha:

$$
\begin{aligned}
R^T \cdot R &= \begin{bmatrix} \vec{e_x}^T \\ \vec{e_y}^T \\ \vec{e_z}^T \end{bmatrix} \cdot [\vec{e}_x|\vec{e}_y|\vec{e}_z] \\
&= \begin{bmatrix} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda $R \cdot R^T$ si ha:

$$R^T q' = R^T R q = q,$$

da cui

$$q = R^T q',$$

cioè R^T è la matrice del passaggio di coordinate inverso e quindi ha come colonne le componenti della base di SR' rispetto a SR. Vale allora lo stesso ragionamento fatto sopra e cioè

$$(R^T)^T R^T = I,$$

cioè

$$RR^T = I.$$

Le matrici ortogonali hanno **autovalori di modulo unitario**. Si noti che in generale gli autovalori di una matrice ortogonale sono numeri complessi, e pertanto quando si parla di modulo dell'autovalore si fa riferimento al modulo di un numero complesso (che coincide in effetti con il valore assoluto dell'autovalore nel caso di autovalore reale). Il fatto che il modulo degli autovalori di una matrice ortogonale sia pari a uno può essere dimostrato utilizzando il cosiddetto prodotto hermitiano $< \vec{v}, \vec{w} >$ tra due vettori complessi $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (che coincide con il prodotto scalare definito in precedenza nel caso i vettori considerati siano reali). Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori complessi (cioè se hanno per elementi numeri complessi), il loro prodotto hermitiano viene definito come $< \vec{v}, \vec{w} > = \vec{v}^T \vec{w}^*$, dove $\vec{w}^*$ è il vettore complesso coniugato di $\vec{w}$, cioè il vettore che ha per elementi il complesso coniugato degli elementi di $\vec{w}$. Si noti che se $\vec{v}$ è complesso, $< \vec{v}, \vec{v} > = \vec{v}^T \vec{v}^* = \sum_i |v_i|^2 = \|\vec{v}\|^2$ è la norma (al quadrato) di $\vec{v}$ come vettore complesso.

Sia quindi λ un qualsiasi autovalore di R e $\vec{v}$ un autovettore nell'autospazio di λ. Si ha per definizione:

$$R\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Si consideri ora il prodotto hermitiano

$$< R\vec{v}, R\vec{v} > = (R\vec{v})^T (R\vec{v})^* = \vec{v}^T R^T R \vec{v}^* = \vec{v}^T \vec{v}^* = < \vec{v}, \vec{v} > = \|\vec{v}\|^2. \tag{5}$$

D'altra parte $R\vec{v} = \lambda\vec{v}$ e pertanto:

$$< R\vec{v}, R\vec{v} > = < \lambda\vec{v}, \lambda\vec{v} > = (\lambda\vec{v})^T (\lambda\vec{v})^* = |\lambda|^2 \|\vec{v}\|^2. \tag{6}$$

Confrontando le equazioni (5) e (6) si conclude che $|\lambda|^2 = 1$, cioè che il modulo $|\lambda|$ di un qualsiasi autovalore di R è unitario. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda = \pm 1$. Se $\lambda \in \mathcal{C}$, anche λ^* è autovalore di R e si ha $\lambda\lambda^* = |\lambda|^2 = 1$.

Siccome il determinante di una matrice è pari al prodotto dei suoi autovalori, e poiché R ha dimensione 3, si ha che il suo determinante può essere solo $+1$ o -1. Infatti, se R ha un autovalore λ_1 complesso, avrà come autovalore anche il suo complesso coniugato λ_1^* e un altro autovalore λ_2 necessariamente reale e pari a ± 1. Quindi $det(R) = |\lambda_1|^2 \lambda_2 = \pm 1$. Se tutti gli autovalori di R sono reali, sono tutti pari a ± 1 e pertanto anche in questo caso $det(R) = \pm 1$.

Nel caso particolare considerato in questo corso, $det(R) = +1$ e si dice che R è ortogonale **speciale**. Il termine speciale sta proprio ad indicare che R (che essendo ortogonale potrebbe avere determinante pari a ± 1) ha determinante pari a $+1$. Questo accade perché R è la matrice di cambiamento di coordinate tra due sistemi destrorsi per i quali vale per esempio che

$$\vec{e}_x \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) = 1$$

(essendo $\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$). Ora, sviluppando il determinante di $R = [\vec{e}_x|\vec{e}_y|\vec{e}_z]$ rispetto alla prima colonna, si ottiene proprio l'espressione $\vec{e}_x \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_z)$.

Teorema 3 (Eulero) *Sia SR' una base fissa di $\mathbb{R}^3$ e SR un'altra base inizialmente coincidente con SR'. Un movimento rigido di SR rispetto a SR' che lascia le origini coincidenti (descritto come si è visto da una matrice R ortogonale speciale), può sempre essere ottenuto come rotazione di SR attorno a un opportuno asse fisso $\vec{r}$ di un opportuno angolo θ.*

Cenni alla dimostrazione. Sia R la matrice ortogonale speciale associata alla trasformazione rigida considerata. Per quanto visto, $det(R) = +1$. Siccome $det(R) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, si hanno le seguenti possibilità:

i) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$;

ii) $\lambda_1 \in \mathcal{C} \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1^*$ e $\lambda_3 = +1$;

iii) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = +1$.

Il primo caso corrisponde necessariamente, come è possibile verificare[1], a $R = I$. In questo caso il teorema vale banalmente prendendo un qualsiasi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ e $\theta = 0$.

Nei casi (ii) e (iii), l'autovalore $\lambda = 1$ appare invece con molteplicità 1. L'autovettore $\vec{v}$ ad esso relativo è tale che, per ogni costante c, si ha

$$R(c\vec{v}) = c(R\vec{v}) = c\vec{v}.$$

Il vettore $\vec{v}$ individua cioè una direzione che non viene modificata da R e potrebbe quindi a tutti gli effetti essere un asse di rotazione. È veramente un asse di rotazione se fuori di questa direzione (cioè se sul piano π_v ortogonale a $\vec{v}$) si ha effettivamente una rotazione.

Per verificare questo, si consideri un qualsiasi vettore $\vec{u} \in \pi_v$ (cioè un qualsiasi vettore $\vec{u}$ ortogonale a $\vec{v}$). Si ha:

$$(R\vec{u}) \cdot \vec{v} = (R\vec{u}) \cdot (R\vec{v}) = \vec{u}^T R^T R\vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 0,$$

ossia $R\vec{u}$ è ancora ortogonale a $\vec{v}$. Pertanto il piano π_v ortogonale a $\vec{v}$ risulta invariante, nel senso che moltiplicando R per i vettori di π_v si producono vettori che appartengono ancora a π_v. Ora, la trasformazione indotta da R nel piano π_v è caratterizzata dagli autovalori λ_1 e λ_2.

Poiché λ_1 e λ_2 hanno modulo unitario, sia nel caso complesso (ii) in cui $\lambda_1 = \lambda_2^*$ sia in quello reale (iii) in cui $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, questi due autovalori possono essere scritti nella forma $\lambda_1 = cos(\theta) + jsin(\theta)$ e $\lambda_2 = cos(\theta) - jsin(\theta)$, con $\theta = \pm\pi$ nel caso reale e θ generico nel caso complesso.

Se si ricordano le rotazioni nel piano (introdotte nella trattazione del manipolatore planare), gli autovalori di una matrice di rotazione del piano sono in effetti del tipo $cos(\theta) \pm jsin(\theta)$ (con $\theta = \pm\pi$ se la rotazione è appunto di 180^o). Sul piano ortogonale a $\vec{v}$ pertanto, la matrice R definisce proprio una rotazione attorno all'origine. Ne segue che complessivamente R definisce una rotazione nello spazio attorno a $\vec{v}$. Infatti, qualsiasi vettore $\vec{w}$ dello spazio può essere scritto come $\vec{w} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{u}$ (con $\vec{u}$ giacente nel piano ortogonale a $\vec{v}$). Si ha allora:

$$R\vec{w} = \alpha R\vec{v} + \beta R\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta R\vec{u},$$

che mostra come la componente di $\vec{w}$ lungo $\vec{v}$ resti invariata mentre quella lungo $\vec{u}$ ruoti. Questo corrisponde a una rotazione di $\vec{w}$ attorno all'asse $\vec{v}$. □

Osservazione: in base a quanto visto nella prova del teorema di Eulero, l'asse e l'angolo di rotazione possono ricavarsi calcolando l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 1$ e le parti reale e immaginaria degli altri due autovalori. Si vedrà tuttavia nel seguito un metodo più diretto per ricavare l'asse di rotazione $\vec{r}$ e l'angolo θ associato a una certa matrice di rotazione R.

Osservazione: come visto nel caso planare, la trasformazione

$$q' = Rq$$

può essere interpretata in due modi: il cambiamento di coordinate di un punto P da SR a SR' oppure, assumendo P solidale con SR e in movimento con esso rispetto a SR', come le coordinate di P rispetto a SR' dopo lo spostamento. Siccome poi, per quanto visto, R corrisponde a una rotazione di un angolo θ attorno a un asse $\vec{r}$, la trasformazione $q' = Rq$ può anche essere interpretata come la trasformazione delle coordinate di un punto P ruotato di θ attorno a $\vec{r}$ (con q le coordinate prima della rotazione e q' quelle dopo la rotazione).

[1] La dimostrazione di questo fatto consiste nel provare che in questo caso la molteplicità geometrica dell'unico autovalore $\lambda = 1$ è 3 (pari cioè alla sua molteplicità algebrica) e quindi tutto $\mathbb{R}^3$ è autospazio di $\lambda = 1$ e pertanto $R\vec{v} = \vec{v}$ per qualsiasi $\vec{v}$, ossia $R = I$. La dimostrazione può essere fatta per assurdo utilizzando la forma di Jordan della matrice R.

5 Rotazioni elementari

Si assume come al solito inizialmente $SR \equiv SR'$. Una rotazione elementare è la rotazione di SR attorno a uno dei 3 assi coordinati di SR'. Vediamo le matrici di rotazione corrispondenti nei 3 casi.

5.1 Rotazione elementare attorno a $\vec{e_z}'$ di un angolo α

La matrice R si ricava, come visto, scrivendo nelle sue colonne le componenti di $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ ed $\vec{e}_z$ rispetto a $\vec{e_x}'$, $\vec{e_y}'$ ed $\vec{e_z}'$ dopo la rotazione. Con riferimento alla Fig. 7:

$$R = R_{z,\alpha} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

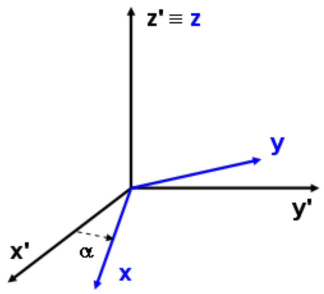

Figure 7: Rotazione elementare attorno all'asse z

5.2 Rotazione elementare attorno a $\vec{e_y}'$ di un angolo β

Con riferimento alla Fig. 8:

$$R = R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

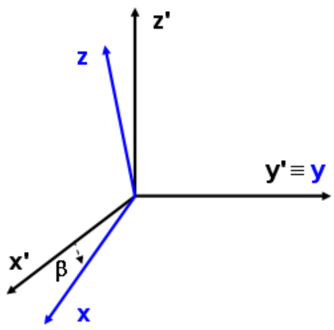

Figure 8: Rotazione elementare attorno all'asse y

5.3 Rotazione elementare attorno a $\vec{e_x}'$ di un angolo γ

Analogamente si ricava:

$$R = R_{x,\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\gamma) & -sin(\gamma) \\ 0 & sin(\gamma) & cos(\gamma) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

6 Composizione di matrici di rotazione

In questa sezione si presenta uno degli argomenti più importanti per quello che si utilizzerà nel seguito nel risolvere il problema della cinematica dei manipolatori, e cioè come è fatta la matrice di rotazione corrispondente a una certa sequenza di rotazioni. Una sequenza di rotazioni è in effetti equivalente a una rotazione fatta attorno a un asse opportuno: infatti, una sequenza di rotazioni corrisponde in ultima analisi a una trasformazione di coordinate tra SR e SR' che ha la proprietà di lasciare le origini dei due sistemi coincidenti. Per quanto si è visto prima, tale trasformazione viene descritta da una matrice di rotazione R che, in base al Teorema di Eulero, è sempre associata a una rotazione. Pertanto ha senso porsi la domanda precedente: *calcolare la matrice di rotazione R corrispondente a una certa sequenza di rotazioni.* Ci occupiamo inizialmente del caso di una sequenza di due sole rotazioni e distinguiamo due possibili casi: nel primo caso, dopo la prima rotazione, SR viene ruotato rispetto a un asse cosiddetto mobile, cioè espresso nelle coordinate del sistema SR stesso; nel secondo caso la seconda rotazione avviene rispetto a un asse cosiddetto fisso, cioè espresso nelle coordinate del sistema SR' che è rimasto fermo.

6.1 Rotazioni rispetto al sistema mobile SR

Si assuma inizialmente $SR \equiv SR'$, con P un punto che possiamo ipotizzare solidale con SR. Si indichino come al solito con q le coordinate di P rispetto a SR e con q' quelle rispetto a SR'. Dopo la prima rotazione, le coordinate di P rispetto a SR' divengono:

$$q' = R_1 q,$$

dove R_1 è la matrice che descrive la prima rotazione. Si consideri un sistema $\overline{SR}$ coincidente con SR prima della seconda rotazione, e si indichino con $\bar{q}$ le coordinate di P rispetto a $\overline{SR}$. Chiaramente:

$$q' = R_1 \bar{q}.$$

Effettuare una rotazione rispetto al sistema mobile equivale a fare una rotazione di SR rispetto a $\overline{SR}$ (che rimane fermo durante la seconda rotazione). Se R_2 è allora la matrice associata alla seconda rotazione, si può scrivere:

$$\bar{q} = R_2 q.$$

Mettendo insieme le due equazioni precedenti si ha:

$$q' = R_1 R_2 q, \tag{10}$$

che mostra come, effettuando rotazioni in successione rispetto al sistema mobile, la matrice complessiva (che per quanto detto e come è anche facile da verificare è sempre una matrice di rotazione) si ottiene **postmoltiplicando** le matrici delle singole rotazioni:

$$R_{tot} = R_1 \cdot R_2.$$

6.2 Rotazioni rispetto al sistema fisso SR'

Dopo la prima rotazione, che come prima porta alla relazione:

$$q' = R_1 q,$$

si esegua una seconda rotazione (descritta da R_2) di SR ma questa volta rispetto ancora a SR'. Questa trasformazione è la stessa che si ottiene lasciando SR fisso e muovendo SR' secondo la trasformazione inversa di R_2 (cioè secondo R_2^{-1}). A tal fine, si indichi con $\overline{SR}$ il sistema coincidente con SR' prima della seconda rotazione. Chiaramente:

$$\bar{q} = R_1 q. \tag{11}$$

Si muova quindi SR' rispetto a $\overline{SR}$ (che supponiamo fisso durante la seconda rotazione) secondo $R_2^{-1} = R_2^T$. Per quanto visto in precedenza:

$$\bar{q} = R_2^T q',$$

cioè

$$q' = R_2 \bar{q}. \tag{12}$$

Mettendo insieme le equazioni (11) e (12) si ottiene:

$$q' = R_2 R_1 q, \tag{13}$$

che mostra come, effettuando rotazioni in successione rispetto al sistema fisso, la matrice complessiva (che per quanto detto e come è anche facile da verificare è sempre una matrice di rotazione) si ottiene **premoltiplicando** le matrici delle singole rotazioni:

$$R_{tot} = R_2 \cdot R_1.$$

6.3 Esempio

Si consideri la sequenza delle 4 seguenti rotazioni:

1. attorno a $\vec{e_y}'$ di un angolo ϕ (la prima è indifferente se rispetto al sistema fisso o mobile in quanto i due sistemi sono inizialmente coincidenti);
2. attorno a $\vec{e}_z$ di un angolo θ (rispetto quindi al sistema mobile);
3. attorno a $\vec{e}_x$ di un angolo α (rispetto quindi al sistema mobile);
4. attorno a $\vec{e_x}'$ di un angolo ψ (rispetto quindi al sistema fisso).

Si ha:

$$R_{tot} = R_x(\psi) R_y(\phi) R_z(\theta) R_x(\alpha).$$

Infatti, dopo la prima rotazione, ho: $q' = R_y(\phi)q$. Dopo la seconda (postmoltiplico perché è rispetto al sistema mobile) avrò: $q' = R_y(\phi)R_z(\theta)q$. Analogamente dopo la terza: $q' = R_y(\phi)R_z(\theta)R_x(\alpha)q$. La quarta è rispetto al sistema fisso per cui se ne tiene conto premoltiplicando $R_x(\psi)$ alla matrice associata alla trasformazione effettuata finora, cioè $q' = R_x(\psi)R_y(\phi)R_z(\theta)R_x(\alpha)q$.

7 Matrici generali di rotazione

In questa sezione si affrontano i seguenti due importanti problemi, uno l'inverso dell'altro:

- ricavare l'espressione della matrice R corrispondente alla rotazione di un angolo θ attorno ad un asse $\vec{r}$;
- data una matrice ortogonale speciale R, calcolare l'angolo θ e l'asse $\vec{r}$ della rotazione che (in base al Teorema di Eulero) essa descrive.

7.1 Dalla rotazione alla matrice

Sappiamo già come sono fatte le matrici di rotazione associate alle rotazioni elementari, cioè attorno ai 3 assi coordinati. Ci chiediamo in questa sezione quale sia l'espressione della matrice di rotazione che descrive la rotazione di un angolo θ attorno ad un asse generico $\vec{r}$.

Si consideri dunque un versore $\vec{r} = [r_x, r_y, r_z]^T$ (con $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$) e si effettui una rotazione di SR attorno a $\vec{r}$ (asse fisso solidale con SR') di un angolo θ. Si vuole trovare la matrice di rotazione R che permette di scrivere le coordinate di un punto P rispetto a SR' in funzione delle coordinate q dello stesso punto rispetto a SR, ovvero rispetto a SR' prima della rotazione: $q' = Rq$. Con riferimento alla Fig. 9, siano β l'angolo tra $\vec{e_z}'$ e $\vec{r}$ e α l'angolo tra $\vec{e_x}'$ e la proiezione di $\vec{r}$ sul piano $x'y'$ di SR'. La rotazione di un angolo θ attorno a $\vec{r}$ può essere ottenuta anche come la sequenza delle seguenti rotazioni:

1. rotazione di $-\alpha$ intorno a $\vec{e_z}'$;
2. rotazione di $-\beta$ intorno a $\vec{e_y}'$;
3. rotazione di θ intorno a $\vec{e_z}'$;
4. rotazione di β intorno a $\vec{e_y}'$;
5. rotazione di α intorno a $\vec{e_z}'$.

Le prime due rotazioni portano $\vec{r}$ a coincidere con $\vec{e_z}'$. A questo punto una rotazione attorno a $\vec{r}$ equivale a una rotazione attorno a $\vec{e_z}'$ che è infatti la terza trasformazione nella sequenza. Per riportare $\vec{r}$ nella sua posizione originaria, si effettuano le trasformazioni (4) e (5) che in effetti sono l'inverso delle trasformazioni (1) e (2). Poiché tutte le trasformazioni vengono fatte rispetto al sistema fisso SR', la matrice complessiva risulta essere data dalla moltiplicazione in senso inverso (premoltiplicazione) delle matrici associate alle singole trasformazioni:

$$R_{\vec{r}}(\theta) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\theta)R_y(-\beta)R_z(-\alpha). \tag{14}$$

Facendo il prodotto indicato sopra e sostituendo (come si ricava osservando la Fig. 9):

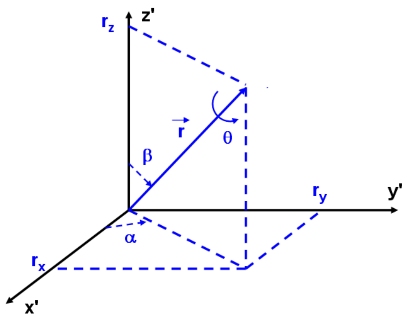

Figure 9: Parametrizzazione di un asse di rotazione $\vec{r}$

$$sin(\alpha) = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \quad cos(\alpha) = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}$$

$$sin(\beta) = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad cos(\beta) = r_z$$

(essendo $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$), si trova:

$$R_{\vec{r}}(\theta) = \begin{bmatrix} r_x^2(1-c\theta)+c\theta & r_xr_y(1-c\theta)-r_zs\theta & r_xr_z(1-c\theta)+r_ys\theta \\ r_yr_x(1-c\theta)+r_zs\theta & r_y^2(1-c\theta)+c\theta & r_yr_z(1-c\theta)-r_xs\theta \\ r_zr_x(1-c\theta)-r_ys\theta & r_zr_y(1-c\theta)+r_xs\theta & r_z^2(1-c\theta)+c\theta \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Nell'espressione precedente si è adottata la notazione compatta $c\theta := cos(\theta)$ e $s\theta := sin(\theta)$.

7.2 Dalla matrice alla rotazione

Avendo una matrice di rotazione R con elementi r_{ij} e volendo determinare l'asse $\vec{r}$ e l'angolo θ della rotazione descritta da R, si può procedere nel seguente modo. In base al Teorema di Eulero sappiamo che certamente esistono $\vec{r}$ e θ tali che $R = R_{\vec{r}}(\theta)$. Da un'ispezione della (15) è abbastanza semplice ricavare la seguente formula:

$$\theta = \pm arcos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right). \tag{16}$$

Se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pm\pi$, allora l'asse di rotazione $\vec{r}$ si può ricavare facilmente sempre da un'ispezione diretta della (15):

$$\vec{r} = \frac{1}{2sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Si nota innanzitutto in (16) che ci sono due possibilità di scelta per θ: in effetti una rotazione di θ attorno a $\vec{r}$ equivale a una rotazione di $-\theta$ attorno a $-\vec{r}$: cioè $R_{\vec{r}}(\theta) = R_{-\vec{r}}(-\theta)$. Sono quindi possibili entrambe le scelte (si noti come la scelta del segno di θ condizioni in (17) la scelta del segno di $\vec{r}$).

Escludendo il caso banale in cui $\theta = 0$ (in cui R è la matrice identità e $\vec{r}$ può essere scelto arbitrariamente), se $\theta = \pm\pi$ la (15) diventa

$$R_{\vec{r}}(\pi) = \begin{bmatrix} 2r_x^2 - 1 & 2r_xr_y & 2r_xr_z \\ 2r_yr_x & 2r_y^2 - 1 & 2r_yr_z \\ 2r_zr_x & 2r_zr_y & 2r_z^2 - 1 \end{bmatrix},$$

da cui risulta facile ricavare (r_x, r_y, r_z). Si noti come in questo caso $\vec{r}$ è definito a meno del segno, come è ragionevole attendersi essendo la rotazione di $\pm 180^o$.

8 Angoli di Eulero e orientamento di un corpo rigido

Il motivo per cui si sono studiate le rotazioni di un sistema di riferimento rispetto ad un altro è che, avendo associato una terna SR solidale all'organo terminale del robot (che è un corpo rigido) e una terna SR' solidale con la base del robot (cioè nello spazio di lavoro), tutti i possibili orientamenti dell'organo terminale rispetto alla base possono essere descritti da tutti i possibili orientamenti del sistema SR rispetto a SR', e quindi da tutte le possibili matrici di rotazione R.

Ora una matrice di rotazione R ha 9 parametri, che però non sono tutti liberi in quanto devono soddisfare, come si è visto, diverse equazioni[2]. Osservando l'equazione (14), si nota come in effetti una qualsiasi matrice di rotazione possa essere parametrizzata utilizzando 3 parametri (i tre angoli α, β e θ). In effetti, tre sono anche i parametri liberi di una rotazione scritta in termini di angolo θ e asse di rotazione $\vec{r}$ (in questo caso abbiamo 4 parametri: r_x, r_y, r_z e θ e una condizione: $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$ per cui i parametri liberi sono effettivamente $4 - 1 = 3$). Il fatto che una matrice di rotazione possa essere parametrizzata completamente conoscendo tre parametri (che ne costituiscono quindi una parametrizzazione minima) discende direttamente dal fatto che l'orientamento di un corpo rigido rispetto a una terna inerziale è definito univocamente da tre parametri. Vediamo perché.

Definizione Un corpo rigido può essere descritto come un insieme di masse puntiformi le cui posizioni $\vec{p}_i(t)$ devono soddisfare il vincolo di *rigidità*: $\|\vec{p}_i(t) - \vec{p}_j(t)\| = r_{ij} = costante$, per ogni i, j e per ogni tempo t. □

Per individuare l'orientamento di un corpo rigido occorre fissare le coordinate di tre suoi punti (non allineati), cioè occorre fissare $3 \times 3 = 9$ parametri. Questi 9 parametri tuttavia devono soddisfare 6 equazioni: i 3 vincoli di rigidità che definiscono la distanza reciproca dei 3 punti scelti e i 3 vincoli di rigidità che definiscono la distanza di ciascuno di questi 3 punti dall'origine (stiamo infatti considerando rotazioni pure in cui il corpo rigido si sposta attorno ad un punto di riferimento fisso, l'origine appunto, che potrebbe essere scelto coincidente col centro di massa del corpo rigido stesso).

Una matrice di rotazione quindi, anche se sufficiente a descrivere un qualsiasi orientamento del corpo rigido, risulta una descrizione non minima. Un modo per dare una descrizione minima dell'orientamento di un corpo rigido (cioè del sistema di riferimento SR solidale con esso) rispetto a una terna fissa SR' è quello degli **angoli di Eulero**. Si sceglie una sequenza di tre rotazioni elementari (purché non ci siano due rotazioni successive intorno allo stesso asse) e si scrive la matrice R come composizione di queste rotazioni. Delle 27 combinazioni possibili quindi, solo 12 sono sfruttabili: xyx, xyz, xzx, xzy, yxy, yxz, yzx, yzy, zxy, zxz, zyx e zyz. Tra queste molto utilizzata è la sequenza zyx detta degli angoli RPY ($R = Roll$, $P = Pitch$ e $Y = Yaw$) molto usati in ambito nautico e aeronautico dove hanno il significato illustrato in Fig. 10. Si assume che il sistema di riferimento SR solidale con il corpo rigido sia definito con l'asse z nella direzione di avanzamento del corpo, l'asse y in quella di scorrimento laterale e l'asse x individuato di conseguenza: è questa la convenzione che verrà adottata più avanti per fissare la terna solidale con la mano del robot. Dalla corrispondenza di Roll, Pitch e Yaw con gli assi z, y e x rispettivamente, segue che la sequenza ispirata a Roll, Pitch e Yaw è come detto la zyx. Secondo questa convenzione la matrice R viene ottenuta come la sequenza delle seguenti tre rotazioni elementari rispetto al sistema mobile:

- rotazione di un angolo ϕ attorno a $\vec{e_z}$;
- rotazione di un angolo θ attorno a $\vec{e_y}$;
- rotazione di un angolo ψ attorno a $\vec{e_x}$.

[2] Le equazioni da soddisfare sono sei: quelle relative alla norma delle 3 colonne di R (che devono essere unitarie) e quelle dei 3 prodotti scalari tra le colonne stesse (che devono essere nulli). Come è possibile verificare (facilmente nel caso di matrice di rotazione nel piano), la condizione sul determinante (che deve essere pari a $+1$), è solo una condizione di positività che non va a restringere ulteriormente l'insieme dei parametri liberi (le condizioni sulle norme e i prodotti scalari menzionate dianzi già implicano infatti che il determinante di R sia pari a ± 1). In conclusione, dovendo i 9 parametri di una matrice di rotazione R soddisfare 6 equazioni indipendenti, lo spazio soluzione avrà tre gradi di libertà.

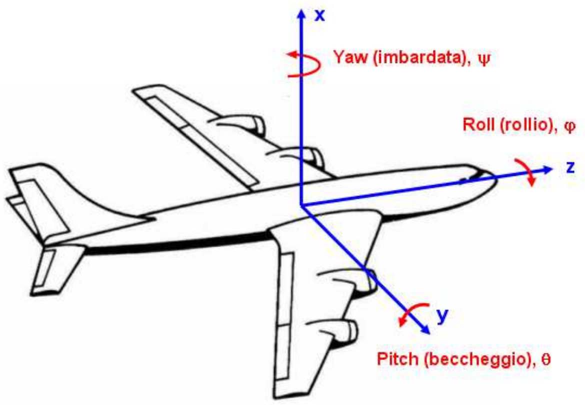

Figure 10: Angoli di Roll, Pitch e Yaw di un aereo

Si ha quindi:

$$R_{RPY}(\phi,\theta,\psi) = R_z(\phi)R_y(\theta)R_x(\psi) = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}, \tag{18}$$

dove anche qui è stata adottata la notazione compatta secondo cui $c\alpha$ e $s\alpha$ rappresentano rispettivamente coseno e seno di un angolo α.

Il problema inverso, cioè data R trovare gli angoli ϕ, θ e ψ tali che $R = R_{RPY}(\phi,\theta,\psi)$, è risolto dalle relazioni riportate qui di seguito che si possono verificare immediatamente tramite ispezione diretta della (18). Innanzitutto si ricava θ:

$$\theta = atan2\left(-r_{31}, \pm\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right).$$

La doppia possibilità di scelta di tale angolo produce due diverse coppie di valori per ψ e ϕ e corrisponde a due possibili scelte di roll, pitch e yaw che producono la stessa matrice R. Se $\theta \neq \pm\pi/2$ si possono calcolare gli altri due angoli:

$$\begin{aligned} \psi &= atan2\left(\frac{r_{32}}{c\theta}, \frac{r_{33}}{c\theta}\right), \\ \phi &= atan2\left(\frac{r_{21}}{c\theta}, \frac{r_{11}}{c\theta}\right). \end{aligned}$$

Se invece $\theta = \pi/2$, si trova:

$$R_{RPY}(\phi,\pi/2,\psi) = \begin{bmatrix} 0 & -sin(\phi-\psi) & cos(\phi-\psi) \\ 0 & cos(\phi-\psi) & sin(\phi-\psi) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In questo caso si può solo ricavare $\phi - \psi$: uno dei due angoli va quindi fissato arbitrariamente. Questo dipende dal fatto che se $\theta = \pi/2$, la prima e l'ultima rotazione avvengono in effetti attorno allo stesso asse (ma con verso opposto). Ricapitolando, se $\theta = \pi/2$, la formula da utilizzare è $\phi - \psi = atan2\,(r_{23}, r_{13})$ e, fissato per esempio arbitrariamente ψ, è possibile ricavare ϕ. Analogamente, se $\theta = -\pi/2$, si trova che la formula da utilizzare è $\phi + \psi = atan2\,(-r_{23}, -r_{13})$ e anche qui, fissato ψ, si può ricavare ϕ.

9 Trasformazione generale di coordinate

Lo spostamento generale di SR rispetto a SR' può essere descritto come una rotazione di SR rispetto a SR' seguita da una traslazione (o viceversa). Dalla Fig. 11 si vede come le coordinate q' di un punto rispetto a SR' e le coordinate q dello stesso punto rispetto a SR sono legate da:

$$q' = \overline{O'O} + Rq, \tag{19}$$

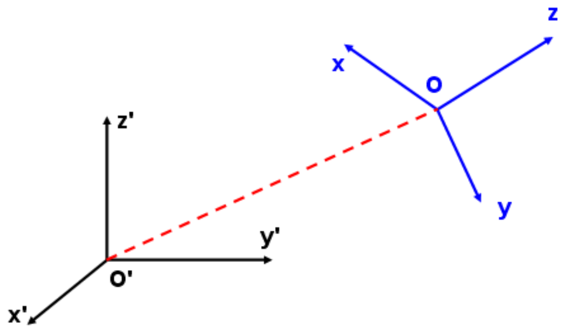

Figure 11: Cambiamento generale di coordinate

semplice estensione della relazione ricavata studiando le rotazioni. La precedente può anche essere scritta nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{x'} \\ O_{y'} \\ O_{z'} \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

essendo $[O_{x'}, O_{y'}, O_{z'}]^T$ le coordinate dell'origine O di SR rispetto a SR'. La precedente può anche essere scritta come

$$\left[\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & O_{x'} \\ & R & & O_{y'} \\ & & & O_{z'} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline 1 \end{array}\right],$$

avendo introdotto le coordinate *omogenee* $[x, y, z, 1]^T$. In forma compatta scriviamo la precedente nel seguente modo:

$$\tilde{q}' = T\tilde{q}, \tag{20}$$

dove $\tilde{q}$ sono appunto le coordinate omogenee di un punto con coordinate q.

Premoltiplicando entrambi i membri dell'equazione (19) per R^T, si ottiene:

$$R^T q' = R^T \overline{O'O} + R^T R q = R^T \overline{O'O} + q,$$

ossia

$$q = R^T q' - R^T \overline{O'O},$$

che è quindi la trasformazione di coordinate inversa (da SR' a SR). Pertanto:

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} & R^T & & -R^T\overline{O'O} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

e

$$\tilde{q} = T^{-1}\tilde{q}',$$

essendo T la matrice definita nella (20).

Si noti come la matrice T di cambiamento di coordinate contenga 3 parametri (liberi) oltre a quelli necessari per definire una matrice di rotazione R. Questo corrisponde al fatto che la posa di un corpo rigido rispetto a una terna fissa è definita da 6 parametri indipendenti (6 gradi di libertà): la posizione di un punto di riferimento del corpo (per esempio il suo centro di massa) e il suo orientamento.

Si richiama per completezza, anche senza fornirne una dimostrazione, un teorema che estende alle trasformazioni generali di roto-traslazione quello che il teorema di Eulero formulava in relazione alle sole rotazioni.

Teorema 4 (Chasles) *Un generico spostamento rigido (del tipo descritto da una matrice T come quella riportata in (20)) si può sempre ottenere come rotazione attorno a un opportuno asse fisso $\vec{r}$ seguita da una traslazione lungo lo stesso asse $\vec{r}$.*

9.1 Composizione di rototraslazioni

Seguendo lo stesso ragionamento fatto a proposito delle matrici di rotazione, è immediato verificare che effettuando in successione spostamenti rigidi rispetto al sistema mobile SR, la matrice T complessiva si ottiene *postmoltiplicando* le matrici delle singole trasformazioni mentre si ottiene *premoltiplicando* nel caso gli spostamenti siano effettuati rispetto al sistema fisso SR'.

9.2 Rotazioni e traslazioni rispetto a uno stesso asse

Come accade per le rotazioni, in generale

$$T_1 T_2 \neq T_2 T_1.$$

Tuttavia, se T_1 descrive una rotazione attorno a un certo asse $\vec{r}$ e T_2 una traslazione lungo lo stesso asse $\vec{r}$, vale la commutatività, come è intuitivo e come è facile verificare. Per vedere questo, sia T_1 la matrice associata a una rotazione di un angolo θ attorno a un asse $\vec{r}$ e T_2 la matrice associata ad una traslazione di una lunghezza d lungo lo stesso asse $\vec{r}$. Indicando con I_3 la matrice identità 3×3 si ha:

$$T_1 T_2 = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ R_{\vec{r}}(\theta) & 0 \\ & 0 \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_3 & d \cdot \vec{r} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R_{\vec{r}}(\theta) & R_{\vec{r}}(\theta) d \cdot \vec{r} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R_{\vec{r}}(\theta) & d \cdot \vec{r} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right],$$

essendo $R_{\vec{r}}(\theta)\vec{r} = \vec{r}$. Se si calcola il prodotto nell'ordine inverso, si ottiene la stessa espressione:

$$T_2 T_1 = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & d \cdot \vec{r} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ R_{\vec{r}}(\theta) & 0 \\ & 0 \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R_{\vec{r}}(\theta) & d \cdot \vec{r} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esempio. Si consideri $\vec{r} = \vec{e_z}'$. Si ha:

$$T_1 T_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

e anche

$$T_2 T_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

□