Compito ②

COGNOME: NOME: MATRICOLA: CFU da verbalizzare:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Calcolare la matrice R corrispondente alla seguente sequenza di rotazioni, tutte effettuate rispetto al sistema mobile SR: 1) 180^o intorno a $\vec{e}_z$; 2) 90^o intorno a $\vec{e}_y$; 3) 30^o intorno a $\vec{e}_x$. Determinare quindi, dopo le rotazioni, come è orientato l'asse $\vec{e}_z$ del sistema mobile SR rispetto al sistema fisso SR' e come è orientato l'asse $\vec{e}_{y'}$ del sistema fisso SR' rispetto a SR [5+3+2pt]
2. Si consideri un robot antropomorfo.
   a) Supponendo $d_6 = 5$, calcolare θ_1 affinché la pinza del robot raggiunga il punto $(0, -5, 30)$ con $\vec{e}_{z_6} = \vec{e}_{y_0}$ [5pt]
   b) Supponendo $\theta_4 = \theta_5 = 180^o$ e $\theta_6 = 0^o$, calcolare θ_1, θ_2 e θ_3 affinché il sistema di riferimento della pinza L_6 sia orientato come L_0, discutendo se la soluzione è unica oppure no [3+2pt]
   c) Mostrare che se si vuole risolvere un problema di cinematica inversa con $\vec{e}_{z_6} \equiv \vec{e}_{z_0}$, qualsiasi sia il punto p_e da raggiungere e l'orientamento desiderato per gli assi $\vec{e}_{x_6}$ ed $\vec{e}_{y_6}$, se la soluzione esiste, si può sempre scegliere $\theta_4 = 0$ [3pt]
3. Siano v_R e v_L (in cm/s) rispettivamente le velocità delle ruote destra e sinistra di un uniciclo (con distanza d tra le ruote pari a 5 cm) e si assuma $v_R = 3v_L$ con $v_L = 10$ cm/s. Calcolare la velocità lineare v_1 e rotazionale v_2 dell'uniciclo e determinare il tempo che questo impiega per tornare al punto di partenza. Calcolare quindi il raggio della circonferenza che viene percorsa discutendo se, sempre con $v_R = 3v_L$, tale raggio dipende dal particolare valore di v_L [3+2+2+1pt]

Es. 1) Si ha:

$$R = R_z(180°)R_y(90°)R_x(30°) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

Senza fare i calcoli precedenti, si poteva notare che questo prodotto è la parametrizzazione RPY di una matrice di rotazione con $\varphi = 180°$, $\theta = 90°$ e $\psi = 30°$.
Pertanto

$$R = R_{RPY}(\underset{\varphi}{180°}, \underset{\theta}{90°}, \underset{\psi}{30°}) = \begin{bmatrix} c\varphi c\theta & c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\theta c\psi + s\varphi s\psi \\ s\varphi c\theta & s\varphi s\theta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\theta c\psi - c\varphi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}$$ che fornisce la stessa R.

Ora, $R = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix}$, per cui $\vec{e}_z = 3^a$ colonna di $R = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Mentre $R^{-1} = R^T = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \end{bmatrix}$, per cui $\vec{e}_{y'} = (2^a \text{ riga di } R)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$. ■

Es. 2a) $\vec{p}_w = \vec{p}_e - d_6\,\vec{a}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 30 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 30 \end{bmatrix} \Rightarrow \theta_1 = \text{atan2}(-10, 0) = \underline{\underline{-90°}}$

$\left(\vec{a}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ perché } \vec{e}_{z_6} = \vec{e}_{y_0}\right)$. ■

2b) Si ha $R_0^6 = I$ essendo $L_6 \equiv L_0$. Con $\theta_4 = \theta_5 = 180°$ e $\theta_6 = 0$,

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ è tra l'altro una matrice simmetrica (in questo caso).

Ma $R_0^3 R_3^6 = R_0^6 = I \Rightarrow R_0^3 = (R_3^6)^{-1} = (R_3^6)^T = R_3^6$. Quindi, essendo

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1 & c_1s_{23} \\ s_1c_{23} & -c_1 & s_1s_{23} \\ s_{23} & 0 & -c_{23} \end{bmatrix},$$ ne segue che $c_1 = 1 \rightarrow \boxed{\theta_1 = 0}$ e $c_{23} = 1 \rightarrow \boxed{\theta_2 + \theta_3 = 0}$

Esistono quindi <u>infinite soluzioni</u> con $\theta_1 = 0$ e θ_2 e θ_3 tali che $\theta_2 + \theta_3 = 0$.
Una scelta per esempio è $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$. ■

2c) Con $\vec{e}_{z6} = \vec{e}_{z0}$, $R_e = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$ essendo $\vec{a}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ora, $R_3^6 = (R_0^3)^T \cdot R_e = \begin{bmatrix} * & * & S_{23} \\ * & * & 0 \\ * & * & -C_{23} \end{bmatrix}$ e ci sono vari casi:

i) se $S_{23} = 0$, allora $\theta_5 = \text{atan2}(0, -C_{23}) = 0°$ o $180°$ secondo il segno di C_{23}. Ma in questo caso si può solo determinare $\theta_4 + \theta_6$ o $\theta_4 - \theta_6$, per cui si può sempre scegliere $\theta_4 = 0$.

ii) se $S_{23} \neq 0$, $\theta_4 = \text{atan2}(\pm a_y^3, \pm a_x^3) = \text{atan2}(0, \pm S_{23})$ e basta scegliere il '+' o il '−' in modo tale che $\pm S_{23}$ sia positivo con $\theta_4 = 0$.

<u>Più intuitivamente</u>, se $\vec{e}_{z6} = \vec{e}_{z0}$, l'asse $\vec{e}_{z6}$ della pinza è certamente contenuto nel piano verticale che contiene il robot e quindi la configurazione è ottenibile anche con uno <u>SCORBOT</u>, che coincide in effetti con un antropomorfo ~~con~~ senza il giunto 4, cioè con $\theta_4 = 0$. ■

ES. 3) $V_1 = \dfrac{V_R + V_L}{2} = \dfrac{4 V_L}{2} = \underline{20 \text{ cm/s}}$

$$V_2 = \frac{V_R - V_L}{d} = \frac{2 V_L}{d} = \underline{4 \text{ rad/s}}$$

Essendo V_1 e V_2 costanti, l'uniciclo percorre una circonferenza. Per fare un giro completo impiegherà

$$T = \frac{2\pi}{V_2} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \underline{1.57 \text{ s}}.$$

Il raggio R della circonferenza si può calcolare osservando che $V_1 = V_2 \cdot R$, per cui

$$R = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(V_R + V_L)/2}{(V_R - V_L)/d} = \frac{d}{2} \, \frac{4 \cancel{V_L}}{2 \cancel{V_L}} = d = \underline{5 \text{ cm}}$$

e <u>non</u> dipende dal valore di V_L. ■