COGNOME: COMPITO (1) NOME: CFU da verbalizzare:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

1. Calcolare la matrice R corrispondente alla seguente sequenza di rotazioni del sistema mobile SR rispetto a quello fisso SR': 1) Rotazione di 90^o attorno a e'_y; 2) Rotazione di 30^o attorno a e'_z; 3) Rotazione di -90^o attorno a e'_x. Mostrare che effettuando le rotazioni indicate in verso opposto e in ordine inverso si ottiene come matrice finale la trasposta di R. Discutere se questo vale in generale anche se la sequenza dovesse comprendere sia rotazioni rispetto al sistema fisso sia rispetto a quello mobile [10pt]

2. Si consideri un manipolatore planare a 3 gradi di libertà con $\ell_1 = 40$, $\ell_2 = 30$ e $\ell_3 = 5\ cm$. Il robot si trova in una configurazione tale per cui i primi due angoli di giunto sono dati da $\theta_1 = 90^o$ e $\theta_2 = 30^o$, mentre l'orientamento della pinza è $\phi_t = 90^o$. Calcolare θ_3 e le coordinate (x_t, y_t) del punto terminale del robot. Esistono altri valori degli angoli di giunto che permettono di raggiungere lo stesso punto (x_t, y_t) con lo stesso orientamento della pinza? Se si, quali? [10pt]

3. Si consideri un polso sferico e si indichi con (x_3, y_3, z_3) la terna di base e con (x_6, y_6, z_6) la terna associata alla pinza.

   a) Calcolare θ_4, θ_5 e θ_6 tali che z_6 sia diretto come y_3 e x_6 come z_3. Se la soluzione non è unica, calcolarle tutte [5+2pt]

   b) Supponendo che i parametri d_4 e d_6 valgano entrambi 3 cm, determinare le coordinate del punto terminale del robot corrispondenti alle diverse soluzioni trovate al punto precedente [2pt]

   c) In generale, se esistono più soluzioni θ_4, θ_5 e θ_6 che permettono di ottenere un certo orientamento della pinza, le coordinate del punto terminale dipendono dalla particolare soluzione considerata? Giustificare con chiarezza la risposta [2pt]

Es. 1) Essendo tutte rotazioni rispetto al sistema fisso, si premoltiplica:

$$\underline{R = R_x(-90^\circ)R_z(30^\circ)R_y(90^\circ)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

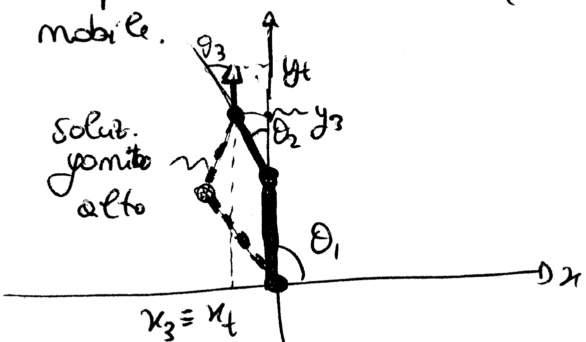
Se si inverte l'ordine e il verso: $\underline{R_{TOT} = R_y(-90^\circ)R_z(-30^\circ)R_x(90^\circ)}$.

Ora, $R_y(-90^\circ) = [R_y(90^\circ)]^{-1} = R_y^T(90^\circ)$, $R_z(-30^\circ) = R_z^T(30^\circ)$ e $R_x(90^\circ) = R_x^T(-90^\circ)$.

Pertanto: $R_{TOT} = R_y^T(90^\circ)R_z^T(-30^\circ)R_x^T(-90^\circ) = [R_x(-90^\circ)R_z(-30^\circ)R_y(90^\circ)]^T = R^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Questa proprietà non vale in generale. Per esempio se avessi le seguenti tre rotazioni attorno a e_x, e'_y, e_z $\Rightarrow R = R_y R_x R_z$ mentre le rotazioni inverse attorno a e_z, e'_y, e_x danno luogo a $R_{TOT} = R_y^T R_z^T R_x^T = (R_x R_z R_y)^T \neq R^T$. La proprietà vale se le rotazioni sono tutte rispetto al sistema fisso (come in questo caso) o tutte rispetto al sistema mobile. ☒

Es. 2) $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$, $\varphi_t = 90^\circ$.



Ora, $\varphi_t = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \Rightarrow \boxed{\theta_3 = -30^\circ}$

$\boxed{x_t =} \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123} = \boxed{-15\ cm}$

$\boxed{y_t =} \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123} = \boxed{70.98\ cm}$

Si. Questa è la soluzione gomito basso ($\theta_2 > 0$).

L'altra possibile è quella gomito alto ($\boxed{\theta_2 = -30^\circ} < 0$).

$\boxed{\theta_1 =}$ $\mathrm{atan2}(-\ell_2 s_2 x_3 + (\ell_1 + \ell_2 c_2) y_3, (\ell_1 + \ell_2 c_2) x_3 + \ell_2 s_2 y_3) =$

$= \mathrm{atan2}(4128.5, -1978.4) = \boxed{115.62^\circ}$

essendo $x_3 = x_t - \ell_3 \cos\varphi_t = -15$ e $y_3 = y_t - \ell_3 \sin\varphi_t = 65.98\ cm$

$\boxed{\theta_3 =} \varphi_t - \theta_1 - \theta_2 = \boxed{4.38^\circ}$

ES. 3) (a) Si ha:

$$R_{des,polso} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_6 \text{ di conseguenza per avere una matrice ortogonale speciale}$$

x_6 come z_3 $\quad$ z_6 come y_3

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_5 = \operatorname{atan2}\left(\sqrt{(a_x^3)^2+(a_y^3)^2},\ a_z^3\right) = \operatorname{atan2}(1,0) = 90^\circ \\
&\text{Poiché } s_5 = \sin\theta_5 \neq 0,\quad \theta_4 = \operatorname{atan2}(a_y^3, a_x^3) = \operatorname{atan2}(1,0) = 90^\circ \\
&\qquad\qquad \theta_6 = \operatorname{atan2}(s_z^3, -n_z^3) = \operatorname{atan2}(0,-1) = 180^\circ \\
&\underline{\text{Oppure}}:\quad \theta_5 = \operatorname{atan2}\left(-\sqrt{(a_x^3)^2+(a_y^3)^2},\ a_z^3\right) = \operatorname{atan2}(-1,0) = -90^\circ \\
&\qquad\qquad \theta_4 = \operatorname{atan2}(-a_y^3, -a_x^3) = \operatorname{atan2}(-1,0) = -90^\circ \\
&\qquad\qquad \theta_6 = \operatorname{atan2}(-s_z^3, n_z^3) = \operatorname{atan2}(0,1) = 0^\circ
\end{aligned}\right\} (\theta_4,\theta_5,\theta_6) = \begin{cases} (90^\circ, 90^\circ, 180^\circ) \\ (-90^\circ, -90^\circ, 0^\circ) \end{cases}$$

(b) In entrambi i casi si ha:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_6 c_4 s_5 \\ d_6 s_4 s_5 \\ d_4 + d_6 c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_6 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(c) Vale in generale. Infatti, la terza colonna del blocco di rotazione R_3^6 (che individua l'orientamento di z_6 rispetto alla base (x_3, y_3, z_3)) è data da:

$$\begin{bmatrix} a_x^3 \\ a_y^3 \\ a_z^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 s_5 \\ s_4 s_5 \\ c_5 \end{bmatrix}.$$

Se l'orientamento è fissato, questi elementi non dipendono quindi dalla particolare scelta di θ_4 e θ_5 (cioè, entrambe le soluzioni, o le infinite soluzioni nel caso $s_5 = 0$, danno lo stesso valore per $c_4 s_5$, $s_4 s_5$ e c_5). Ma allora, poiché

$$p_3^6 = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_6 c_4 s_5 \\ d_6 s_4 s_5 \\ d_6 c_5 + d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_6 a_x^3 \\ d_6 a_y^3 \\ d_6 a_z^3 + d_4 \end{bmatrix},$$

p_3^6 sarà lo stesso a prescindere dalla soluzione adottata.

■