

Compito ①

Robotica con Laboratorio - Esonero 20 novembre 2023

COGNOME:

NOME:

MATRICOLA:

CFU da verbalizzare:

N.B. Si consegna solo il presente foglio, il compito deve essere contenuto completamente in esso (fronte/retro).

- Si consideri la matrice di rotazione simmetrica R riportata qui a destra.

$$R = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$
 - Verificare che l'angolo della rotazione descritta da R è 180° e determinare l'asse di rotazione [2+3pt]
 - Mostrare che una matrice di rotazione simmetrica diversa dall'identità descrive necessariamente una rotazione di 180° [3pt]
- Si consideri un robot antropomorfo con parametri $d_1 = 40\text{cm}$, $\ell_1 = 5\text{cm}$, $\ell_2 = 60\text{cm}$, $d_4 = 50\text{cm}$ e $d_6 = 10\text{cm}$.
 - Si assuma $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_6 = 90^\circ$ e che tutti gli altri angoli di giunto siano nulli. Disegnare il robot visto di profilo (cioè visto lateralmente), determinando le coordinate del punto di chiusura della pinza [3+3pt]
 - Si consideri ora il problema di cinematica inversa in cui si vuole posizionare la pinza in $(-30, 20, 25)$ con gli assi x_6 e y_6 diretti rispettivamente come $-z_0$ e x_0 . Calcolare solo gli angoli θ_1 e θ_3 di una delle possibili soluzioni del problema [5pt]
 - Supponendo ora $\theta_1 = 180^\circ$ e $\theta_2 = \theta_3 = 0$, determinare una scelta degli ultimi tre angoli di giunto affinché $R_0^6 = I_3$ (con I_3 la matrice identità 3×3), specificando se tale scelta è unica oppure no [5+2pt]
- Calcolare le velocità v_R e v_L (in cm/s) delle ruote destra e sinistra di un unicycle (con distanza d tra le ruote pari a 10 cm) affinché questo, senza cambiare posizione, giri su se stesso a velocità costante, ruotando di 90° in senso orario in 15 secondi [5pt]

Es. 1a) Si ha $\theta = \pm \arccos\left(\frac{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 - 1}{2}\right) = \pm \arccos\left(\frac{-3/2 - 1}{2}\right) = \pm \arccos(-1) = \underline{180^\circ}$

Nel caso di $\theta = 180^\circ$ non si possono usare le formule usuali (c'è $\sin\theta = 0$ e denominatore), ma occorre calcolare $\vec{r}$ confrontando la R assegnata con:

$$R_\theta(180^\circ) = \begin{bmatrix} 2r_x^2 - 1 & 2r_x r_y & 2r_x r_z \\ 2r_x r_y & 2r_y^2 - 1 & 2r_y r_z \\ 2r_x r_z & 2r_y r_z & 2r_z^2 - 1 \end{bmatrix}, \text{ essendo } \vec{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}.$$

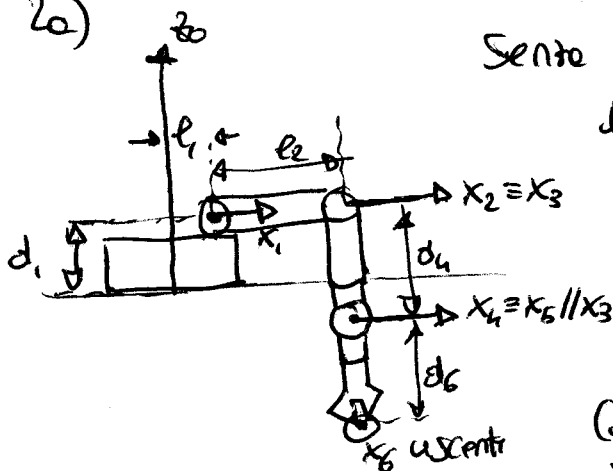
Si ottiene: $2r_x^2 - 1 = 1/3 \rightarrow r_x = \pm \sqrt{2/3} = \pm 0.82$ Poiché $2r_x r_y = -2/3 < 0$
 $2r_y^2 - 1 = -2/3 \rightarrow r_y = \pm \sqrt{1/6} = \pm 0.41$ e $2r_x r_z = -2/3 < 0$,
 $2r_z^2 - 1 = -2/3 \rightarrow r_z = \pm \sqrt{1/6} = \pm 0.41$ r_y e r_z hanno segno opposto rispetto a r_x .

Pertanto, se si sceglie $r_x = \sqrt{2/3}$, sarà $r_y = r_z = -1/\sqrt{6}$.

Cioè $\vec{r} = \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ oppure, equivalentemente, $\vec{r} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ di rotazione diversa dall'identità

1b) Ci sono vari modi per dimostrare che R simmetrica corrisponde a 180° . Il più diretto è utilizzare la formula generale di $R_\theta(\theta)$ (cioè la (15) nel capitolo sui richiami di geometria), notando che per avere $R = R^T$ deve essere $\sin\theta = 0$, cioè $\theta = 0$ o 180° . Ma $\theta = 0$ corrisponde all'identità. Altra possibilità è notare che in generale, per ogni matrice di rotazione, $R(-\theta) = R^T(\theta) = R^T(\theta)$. Ma se $R^T(\theta) = R(\theta)$, cioè se la matrice è simmetrica, ne segue che $R(\theta) = R(-\theta)$. Ciò può accadere solo con $\theta = 0$ o con $\theta = 180^\circ$ (rotare di 180° equivale a rotare di -180° , ed è l'unico angolo per cui vale questo). Infine, un altro modo è osservare che se $R = R^T$, $R^2 = R R^T = I$, per cui R^2 corrisponde a rotare di 360° , ma $[R(\theta)]^2 = R(2\theta)$, per cui $2\theta = 360^\circ \rightarrow \theta = 180^\circ$ (escludendo anche qui il caso banale $\theta = 0$)

2a)



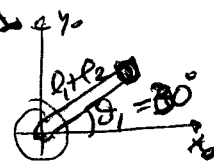
Sento usare le formule di $\vec{p}_e$, guardando semplicemente la figura si ha:

$$x_t = (l_1 + l_2) \cos \theta_1 = 56.3 \text{ cm}$$

$$y_t = (l_1 + l_2) \sin \theta_1 = 32.5 \text{ cm}$$

$$z_t = d_1 - d_4 - d_6 = -20 \text{ cm}$$

(dove $l_1 + l_2$ è stato proiettato col $\cos \theta_1$ sull'asse x_0 e col $\sin \theta_1$ sull'asse y_0)



2b) Completando R_e con l'ultima colonna in modo da ottenere una matrice di rotazione, si ha

$$R_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Pertanto: } \vec{p}_w = \vec{p}_e - d_6 \vec{e}_e = \begin{bmatrix} -30 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 30 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{wx} \\ p_{wy} \\ p_{wz} \end{bmatrix}$$

$$\text{Quindi, } \theta_1 = \arctan 2(p_{wy}, p_{wx}) = \arctan 2(30, -30) = \underline{135^\circ}$$

$$A_1 = p_{wx} C_1 + p_{wy} S_1 - l_1 = 37.4$$

$$A_2 = d_1 - p_{wz} = 15$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \arcsin \left(\frac{A_1^2 + A_2^2 - l_2^2 - d_4^2}{2 l_2 d_4} \right) = \arcsin(-0.75) = \underline{-48.2^\circ}$$

(o anche -131.78°)

2c) Con $\theta_1 = 180^\circ$ e $\theta_2 = \theta_3 = 0$,

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} C_1 C_3 & S_1 C_3 & C_1 S_{23} \\ S_1 C_3 & -C_1 C_3 & S_1 S_{23} \\ S_{23} & 0 & -C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{da cui } R_3^6 = (R_0^3)^T (R_0^6) = (R_0^3)^T (I_3) = (R_0^3)^T = R_0^3$$

Applicando le formule del polso

$$\Rightarrow R_3^6 = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & o_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & o_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & o_z^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sferico:

$$\theta_5 = \arctan 2(\sqrt{(o_x^3)^2 + (o_y^3)^2}, o_z^3) = \arctan 2(0, -1) = \underline{180^\circ}$$

$$\text{Quando } \theta_5 = 180^\circ, \theta_4 \text{ e } \theta_6 \text{ si calcolano con } \theta_4 - \theta_6 = \arctan 2(-n_y^3, -n_x^3)$$

$$= \arctan 2(0, 1) = 0.$$

Esistono quindi infinite soluzioni con $\theta_5 = 180^\circ$ e,

fissato θ_6 arbitrariamente, $\theta_4 = \theta_6$. Una solut. è $\theta_4 = \theta_6 = 0$ e $\theta_5 = 180^\circ$.

3) Deve essere: $v_1 = 0$ (unico ruota da fermo)

$$v_2 = -\frac{90^\circ}{15} = -\frac{0.1}{\pi/30} \text{ rad/s} \quad (\text{il - perché ruota in senso orario}).$$

$$\text{Quindi: } v_R = v_1 + \frac{d}{2} v_2 = -5 \cdot 0.1 = -0.52 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = -\frac{\pi}{6} \text{ cm/s}$$

$$v_L = v_1 - \frac{d}{2} v_2 = 5 \cdot 0.1 = 0.52 \text{ cm/s} = \frac{\pi}{6} \text{ cm/s}$$

